
УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:536.24:517.968

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2001 г. П. А. Мандрик

Пусть задано уравнение нестационарной теплопроводности

$$T_{rr}(r, z, \tau) + r^{-1}T_r(r, z, \tau) + T_{zz}(r, z, \tau) = a^{-1}T_\tau(r, z, \tau) \quad (1)$$

в цилиндрических координатах ($r > 0$, $z > 0$, $\tau > 0$) при наличии осевой симметрии, начальном $T(r, z, 0) = 0$ и смешанных граничных условиях

$$-T_z(r, 0, \tau) = \lambda^{-1}q_1(\tau)q_2(r), \quad 0 < r < R, \quad \tau > 0, \quad (2)$$

$$T(r, 0, \tau) = 0, \quad R < r < \infty, \quad \tau > 0. \quad (3)$$

Математическая постановка этой задачи, в частности, описывает нестационарное пространственное температурное поле при локальном нагреве изотропного полупространства (с коэффициентами температуропроводности $a > 0$ и теплопроводности $\lambda > 0$) через круговую область радиуса R на поверхности $z = 0$, причем вне рассматриваемой круговой области поверхность полупространства теплоизолирована. При этом, очевидно, однородное начальное условие и граничное условие (3) не влияют на общность постановки задачи.

Применяя к задаче (1)–(3) преобразование Лапласа $\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) \exp(-s\tau) dx$, $\operatorname{Re} s > 0$, для температуры-изображения имеем

$$\bar{T}_{rr}(r, z, s) + r^{-1}\bar{T}_r(r, z, s) + \bar{T}_{zz}(r, z, s) = \sigma\bar{T}(r, z, s), \quad \sigma = s/a, \quad (4)$$

$$-\bar{T}_z(r, 0, s) = \lambda^{-1}\bar{q}_1(s)q_2(r), \quad 0 < r < R, \quad (5)$$

$$\bar{T}(r, 0, s) = 0, \quad R < r < \infty. \quad (6)$$

Заметим, что в (4)–(6), как и далее, для краткости изложения опустим в записи очевидное ограничение $\operatorname{Re} s > 0$ на параметр s .

Учитывая условие ограниченности $\bar{T}(r, z, s)$ при $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty$ и применяя метод разделения переменных или преобразование Ханкеля

$$H[\bar{T}(r, z, s)] = \bar{T}_H(p, z, s) = \int_0^\infty \bar{T}(r, z, s) J_0(pr) r dr, \quad p > 0,$$

решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$\bar{T}(r, z, s) = \int_0^\infty \bar{C}(p, s) \exp(-z\sqrt{p^2 + \sigma}) J_0(pr) dp, \quad (7)$$

а производная по нормали к поверхности $z = 0$ имеет представление

$$-\bar{T}_z(r, z, s) = \int_0^\infty \bar{C}(p, s) \sqrt{p^2 + \sigma} \exp(-z\sqrt{p^2 + \sigma}) J_0(pr) dp, \quad (8)$$

где $\bar{C}(p, s)$ – неизвестная функция-изображение, подлежащая определению, $J_0(pr)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Учитывая смешанные граничные условия (5), (6), для определения $\bar{C}(p, s)$ приходим к парным интегральным уравнениям

$$\int_0^{\infty} \bar{C}(p, s) \sqrt{p^2 + \sigma} J_0(pr) dp = \lambda^{-1} \bar{q}_1(s) q_2(r), \quad 0 < r < R, \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{C}(p, s) J_0(pr) dp = 0, \quad R < r < \infty, \quad (10)$$

в области L -изображений.

Выбор функции $\bar{C}(p, s)$ в виде (см. [1])

$$\bar{C}(p, s) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \sigma}} \int_0^R \bar{\varphi}(t, s) \sin(t\sqrt{p^2 + \sigma}) dt, \quad (11)$$

где $\bar{\varphi}(t, s)$ – некоторая новая неизвестная аналитическая функция, обеспечивает автоматически выполнение равенства (10), так как (см. [2, с. 203])

$$\int_0^{\infty} \sin(t\sqrt{p^2 + \sigma}) \frac{p J_0(pr)}{\sqrt{p^2 + \sigma}} dp = \begin{cases} 0, & r > t, \\ (t^2 - r^2)^{-1/2} \cos(\sqrt{(t^2 - r^2)\sigma}), & r < t. \end{cases}$$

Подставляя (11) в (9), для определения функции-изображения $\bar{\varphi}(t, s)$ получаем (как это сделано в [1]) интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{t\bar{\varphi}(t, s)}{\sqrt{r^2 - t^2}} \exp(-\sqrt{(r^2 - t^2)\sigma}) dt + \int_0^R \bar{\varphi}(t, s) \sin(t\sqrt{\sigma}) dt - \int_r^R \frac{t\bar{\varphi}(t, s)}{\sqrt{t^2 - r^2}} \sin(\sqrt{(t^2 - r^2)\sigma}) dt = \\ = \frac{\bar{q}_1(s)}{\lambda} \int_0^r q_2(\rho) \rho d\rho, \quad 0 < r < R. \end{aligned}$$

Применив интегрирующий множитель $2\mu \cos(\sqrt{(r^2 - \mu^2)\sigma}) / \sqrt{r^2 - \mu^2}$ и выполнив аналогичные решению уравнения Абеля [3, с. 46] преобразования, приходим к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(t, s) - \frac{1}{\pi} \int_0^R \bar{\varphi}(\rho, s) \left[\frac{\sin((\rho - t)\sqrt{\sigma})}{\rho - t} - \frac{\sin((\rho + t)\sqrt{\sigma})}{\rho + t} \right] d\rho = \\ = \frac{2\bar{q}_1(s)}{\pi\lambda} \int_0^t \frac{q_2(\mu) \cos(\sqrt{(t^2 - \mu^2)\sigma}) \mu}{\sqrt{t^2 - \mu^2}} d\mu, \quad 0 < t < R, \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\bar{\psi}(t, s) - \frac{1}{\pi} \int_0^R \bar{\psi}(\rho, s) \left[\frac{\sin((\rho - t)\sqrt{\sigma})}{\rho - t} - \frac{\sin((\rho + t)\sqrt{\sigma})}{\rho + t} \right] d\rho =$$

$$= \frac{2}{\pi \lambda s} \int_0^t \frac{q_2(\mu) \cos(\sqrt{(t^2 - \mu^2)\sigma}) \mu}{\sqrt{t^2 - \mu^2}} d\mu, \quad 0 < t < R,$$

где $\bar{\psi}(\rho, s) := \bar{\varphi}(\rho, s)/(s\bar{q}_1(s))$. Для решения последнего интегрального уравнения в области L -изображений не существует готовых методов, кроме подхода, изложенного в работе [4].

Представим неизвестную функцию $\bar{\psi}(t, s)$ в виде ряда

$$\bar{\psi}(t, s) = \exp(-R\sqrt{\sigma}) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t)(\sqrt{s})^{n-2} = \frac{1}{s} \exp(-R\sqrt{\sigma}) \psi_0(t) + \exp(-R\sqrt{\sigma}) \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{n+1}(t)(\sqrt{s})^{n-1}, \quad (12)$$

что подтверждает существование обратного преобразования Лапласа $L^{-1}[\bar{\psi}(t, s)]$, так как

$$L^{-1}[s^{-1} \exp(-k\sqrt{s})] = \operatorname{erfc}(k/(2\sqrt{\tau})),$$

$$L^{-1}[(\sqrt{s})^{m-1} \exp(-k\sqrt{s})] = (\exp(-k^2/(4\tau))/(2^m \sqrt{\pi\tau^{m+1}})) H_m(k/(2\sqrt{\tau})),$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt = 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)},$$

$H_m(x) = m! \sum_{k=0}^{[m/2]} (-1)^k (2x)^{m-2k} / (k!(m-2k)!)$ – многочлен Эрмита [5].

Аналогично [4] построена рекуррентная формула для определения функций $\psi_n(t)$ из (12):

$$\psi_n(t) = \frac{2}{\pi \lambda} \sum_{j=0}^n A_{nj}(R) \int_0^t (\sqrt{t^2 - \mu^2})^{j-1} q_2(\mu) \mu d\mu + \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^n \int_0^R C_m(\rho, t) \psi_{n-m}(\rho) d\rho, \quad (13)$$

$$\psi_0(t) = \frac{2}{\pi \lambda} \int_0^t \frac{q_2(\mu) \mu}{\sqrt{t^2 - \mu^2}} d\mu, \quad A_{nj}(R) = \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^n \binom{n}{j} R^{n-j} \cos\left(\frac{j\pi}{2}\right),$$

$$C_m(\rho, t) = \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right)^m \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) [(\rho - t)^{m-1} - (\rho + t)^{m-1}],$$

$\binom{n}{j}$ – биномиальные коэффициенты.

Последовательной подстановкой выражения (13) в (12), полученных выражений в (11) и, наконец, в (7) определяется решение поставленной задачи в области L -изображений

$$\begin{aligned} \bar{T}(r, z, s) = & \bar{q}_1(s) \exp(-R\sqrt{\sigma}) \int_0^R \psi_0(t) \int_0^{\infty} \exp(-z\sqrt{p^2 + \sigma}) \sin(t\sqrt{p^2 + \sigma}) \frac{pJ_0(pr)}{\sqrt{p^2 + \sigma}} dp dt + \\ & + \bar{q}_1(s) \exp(-R\sqrt{\sigma}) \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{s})^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} \left[\frac{2}{\pi \lambda} A_{n+1j}(R) \int_0^R \int_0^t (\sqrt{t^2 - \mu^2})^{j-1} q_2(\mu) \mu \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{\infty} \exp(-z\sqrt{p^2 + \sigma}) \sin(t\sqrt{p^2 + \sigma}) \frac{pJ_0(pr)}{\sqrt{p^2 + \sigma}} dp d\mu dt + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=0}^{n+1} \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_0^R C_m(\rho, t) \psi_{n+1-m}(\rho) \int_0^\infty \exp(-z\sqrt{p^2 + \sigma}) \sin(t\sqrt{p^2 + \sigma}) \frac{pJ_0(pr)}{\sqrt{p^2 + \sigma}} dp d\rho dt, \quad (14)$$

$r > 0$, $z > 0$, $\operatorname{Re} s > 0$. Нетрудно проверить, что для этого решения при $z = 0$ смешанные граничные условия (5), (6) выполняются.

В частном случае $q_1(\tau)q_2(r) = \text{const}$ оригинал решения $T(r, z, \tau)$ получен в [1, 4]. В общем случае задания $q_1(\tau)q_2(r)$ решение-оригинал находится с использованием формулы обращения интеграла Лапласа [5, с. 807; 6, с. 499]

$$T(r, z, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \exp(\tau s) \bar{T}(r, z, s) ds.$$

Отметим, что полученное решение (14) удовлетворяет известным предельным соотношениям при $s \rightarrow 0$ ($\tau \rightarrow \infty$) и при $s \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow 0$) в предположении, что пределы $\lim_{s \rightarrow 0} [s\bar{q}_1(s)]$ и $\lim_{s \rightarrow \infty} [s\bar{q}_1(s)]$ существуют.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // ИФЖ. 1998. Т. 71. № 4. С. 734–743.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.
3. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959.
4. Козлов В.П., Юрчук Н.И., Мандрик П.А. // Вестн. Бел. ун-та. Сер. 1. 1999. № 2. С. 37–42.
5. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М. и Стиган Н. М., 1979.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию
16.11.1999 г.