ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2001, том 37, № 1, с. 42–47

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956

ОБ УРАВНЕНИИ ФИЛЬТРАЦИИ-АБСОРБЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2001 г. А. Л. Гладков

1. Введение. Рассматривается задача Коши для уравнения

$$u_t = \Delta u^m - c(x,t)u^p, \quad (x,t) \in S = R^N \times R_+, \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{1.2}$$

где $m > 1$, $p > m$, $N \geq 1$, $c(x,t) \in C^{\alpha}_{\text{loc}}(S)$, $0 < \alpha < 1$, – неотрицательная функция, положительная вне некоторого цилиндра $B_a \times [0,\infty), R_+ = (0,+\infty)$, $u_0(x)$ – неотрицательная непрерывная функция, которая может иметь произвольный рост на бесконечности. Здесь и далее $B_a = \{x \in R^N : |x| < a\}$, $0 < a < +\infty$.

Уравнение (1.1) описывает, например, ряд процессов фильтрации, теплопередачи, диффузии, динамики биологических популяций. Оно является параболическим при $u > 0$ и вырождается при $u = 0$. В настоящее время имеется обширная литература, посвященная нелинейным вырождающимся параболическим уравнениям (см., например, [1–3] и приведенную там библиографию).

Положим $S_T = R^N \times (0,T)$, $T > 0$. Через ν будем обозначать в дальнейшем внешнюю нормаль к границе рассматриваемой области. Вследствие вырождения уравнения задача Коши (1.1), (1.2) может не иметь классического решения даже при гладкой начальной функции.

Определение 1. Неотрицательную непрерывную в $\bar{S}(\bar{S}_T)$ функцию $u(x,t)$ назовем обобщенным решением уравнения (1.1) в $S(S_T)$, если $u(x,t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R} \{uf_t + u^m \Delta f - c(x,t)u^p f\}dx\,dt - \int_{B_R} uf|_{t=t_1}^{t=t_2}\,dx - \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial B_R} u^m \frac{\partial f}{\partial \nu}\,ds\,dt = 0 \tag{1.3}$$

для всех $R > 0$, t_i таких, что $0 < t_1 < t_2 < +\infty$ $(0 < t_1 < t_2 < T)$, и любой неотрицательной функции $f(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\bar{B}_R \times [t_1,t_2])$, равной нулю при $|x| = R$, $t_1 \leq t \leq t_2$.

При замене в (1.3) знака “ $=$ ” на знак “ $\geq$ ” $(\leq)$ получаем определение обобщенного субрешения (суперрешения) уравнения (1.1) в $S(S_T)$.

Определение 2. Функцию $u(x,t)$ назовем обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2) в $S(S_T)$, если она является обобщенным решением уравнения (1.1) в $S(S_T)$ и выполнено условие (1.2).

Аналогично вводятся понятия обобщенного суб- и суперрешения задачи Коши (1.1), (1.2) в $S(S_T)$.

Классы существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнения (1.1) с $c(x,t) = \text{const} > 0$ при $m > 1$ и $p > 1$ описаны в работах [4–9]. При этом в случае $p > m$ в [6, 7] показано, что задача Коши имеет единственное обобщенное решение без каких-либо ограничений на рост начальной функции на бесконечности.

В настоящей работе для задачи (1.1), (1.2) доказываются результаты аналогичного характера. При этом существование обобщенного решения устанавливается без каких-либо предположений о поведении при $|x| \to \infty$ коэффициента $c(x,t)$, а единственность доказывается при условии достаточно медленного убывания $c(x,t)$ на бесконечности.

В п. 2 устанавливается разрешимость исследуемой задачи Коши.

Теорема 1. *Пусть $u_0(x)$ – произвольная неотрицательная непрерывная функция. Тогда для любого $T > 0$ в S_T определено обобщенное решение задачи (1.1), (1.2).*

Теорема единственности решения задачи (1.1), (1.2) доказывается в п. 3 при предположении, что коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет следующим интегральным неравенствам:

$$\int_0^T \int_{B_R \setminus B_a} [c(x,t)]^{-m/(p-m)}\, dx\, dt \le \delta(R) R^{2p/(p-m)}, \quad N = 1,$$

$$\int_0^T \int_{B_R \setminus B_a} [c(x,t)]^{-m/(p-m)}\, dx\, dt \le \delta(R) R^{(Np+(2-N)m)/(p-m)}, \quad N \ge 2, \tag{1.4}$$

где $\delta(R)$ – положительная функция, для которой $\lim\limits_{R\to\infty} \delta(R) = 0$.

Замечание 1. Легко проверить, что условия (1.4) выполнены, например, для функций $c(x,t)$, удовлетворяющих при достаточно больших значениях $|x|$ неравенствам: $c(x,t) \ge (\varepsilon(|x|)|x|^{(p+m)/m})^{-1}$ при $N = 1$, $c(x,t) \ge (\varepsilon(|x|)|x|^2)^{-1}$ при $N \ge 2$ с функцией $\varepsilon(|x|)$, обладающей теми же свойствами, что и $\delta(R)$ в (1.4).

Теорема 2. *Пусть $c(x,t)$ удовлетворяет неравенствам (1.4). Тогда обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) единственно в произвольном слое S_T.*

2. Существование обобщенного решения. Аналогично тому, как это сделано в работе [4], доказывается следующая

Лемма 1. *Пусть $\phi(x,t)$ – произвольное обобщенное суперрешение уравнения (1.1) в S_T $(0 < T < +\infty)$ и $u_0(x) \le \phi(x,0)$. Тогда в S_T существует минимальное обобщенное решение $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.2) такое, что $u(x,t) \le \phi(x,t)$.*

Замечание 2. Если в условиях леммы 1 функция $\phi(x,t)$ удовлетворяет неравенствам $\varepsilon \le \phi(x,t)$ в S_T, $u_0(x) < \phi(x,0)$ в R^N при некотором положительном ε, то обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) может быть построено следующим образом. Пусть $u_{0k}(x)$ – последовательность гладких положительных в шаре B_k функций, равномерно стремящихся на любом компактном подмножестве R^N к $u_0(x)$ при $k \to \infty$ и удовлетворяющих при $k \ge k_0$ соотношениям $\max\{1/k, u_0(x)\} \le u_{0k}(x) \le u_{0(k-1)}(x) \le \phi(x,0)$, $u_{0k}(x)|_{x\in\partial B_k} = \phi(x,0)|_{x\in\partial B_k}$. В цилиндре $Q_{k,T} = B_k \times (0,T)$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения (1.1) с условиями

$$u(x,0) = u_{0k}(x), \quad x \in B_k, \quad u(x,t)|_{x\in\partial B_k} = \phi(x,t)|_{x\in\partial B_k}, \quad 0 \le t \le T. \tag{2.1}$$

Несложно проверить, что функция $g_k(t) = [(p-1)c_k t + \alpha_k]^{-1/(p-1)}$ является субрешением задачи (1.1), (1.2), если $c_k = \max\limits_{(x,t)\in\bar{Q}_{k,T}} c(x,t)$, а α_k – достаточно большая положительная постоянная. Вследствие сделанных предположений и теоремы сравнения в $Q_{k,T}$ существуют классические решения $u_k(x,t)$ задачи (1.1), (2.1), удовлетворяющие неравенствам $0 < g_k(t) \le u_k(x,t) \le u_{k-1}(x,t) \le \phi(x,t)$. Аналогично [1, 6] доказывается, что функция $u(x,t) = \lim\limits_{k\to\infty} u_k(x,t)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2).

С помощью формулы Гаусса–Остроградского легко доказывается

Лемма 2. *Пусть $v(x,t)$ – непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая неравенству $-v_t + \Delta v^m - c(x,t)v^p \le 0$ (≥ 0) и принадлежащая пространству $C^{2,1}_{x,t}$ в S_T вне множества точек G, состоящего при каждом фиксированном значении $t \in (0,T)$ из конечного числа ограниченных замкнутых гиперповерхностей, каждая из которых состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Кроме того, ∇v^m непрерывен в точках множества G. Тогда $v(x,t)$ – обобщенное суперрешение (субрешение) уравнения (1.1).*

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем произвольное $0 < T < +\infty$. В силу сделанного предположения коэффициент $c(x,t)$ положителен вне цилиндра $B_a \times [0,T]$, $a > 0$. Положим $\bar{u}_0(r) = \sup\limits_{|x|\le r} u_0(x) + 1$, $\bar{c}(r) = \inf\limits_{a\le|x|\le r} \inf\limits_{0\le t\le T} c(x,t)$. Очевидно, $\bar{u}_0(r)$ и $\bar{c}(r)$ – соответственно монотонно неубывающая и невозрастающая непрерывные функции, причем

$$\max\{1, u_0(x)\} \le \bar{u}_0(|x|) \quad \text{при} \quad x \in R^N, \quad 0 < \bar{c}(|x|) \le c(x,t) \quad \text{при} \quad |x| \ge a, \quad t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

Построим в S_T обобщенное суперрешение $g(x,t)$ уравнения (1.1), для которого выполняется неравенство
$$\bar{u}_0(|x|) \le g(x,0). \tag{2.3}$$

По лемме 1 из (2.2) и (2.3) будет следовать искомый результат. С помощью леммы 2 легко показать, что в качестве функции $g(x,t)$ можно взять положительную функцию $v(r)$, $r=|x|$, такую, что
$$(v^m)'' + (N-1)r^{-1}(v^m)' - \bar{c}v^p \le 0, \quad r>a, \quad v'(a)=0, \tag{2.4}$$
$$v(r) = \text{const} \quad \text{при} \quad 0 \le r \le a, \quad \bar{u}_0(r) \le v(r) \quad \text{при} \quad r \ge 0. \tag{2.5}$$

Причем неравенство из (2.4) может не выполняться в отдельных точках, где непрерывна производная функции $v^m(r)$. Убедимся в существовании функции, удовлетворяющей соотношениям (2.4), (2.5). Сделав замену $y(r) = [v(r)]^{-(p-m)/2}$, соотношения (2.4) можно переписать в виде
$$-yy'' + (p+m)(p-m)^{-1}(y')^2 - (N-1)r^{-1}yy' - (2m)^{-1}(p-m)\,\bar{c} \le 0, \tag{2.6}$$
$$y'(a) = 0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу
$$Lz \equiv -zz'' + \frac{p+m}{p-m}(z')^2 - \frac{N-1}{r}zz' - \frac{p-m}{2m}\bar{c}_1 = 0, \tag{2.8}$$
$$z(a) = b, \quad z'(a) = 0, \tag{2.9}$$
где $\bar{c}_1 = \bar{c}(a+1)$, а положительная постоянная b будет выбрана ниже. Установим некоторые простые свойства решений задачи (2.8), (2.9).

Лемма 3. *Для решения $z(r)$ задачи (2.8), (2.9) существует такое значение $r_0 > a$, что $z(r_0) = 0$, $z(r) > 0$, $z'(r) < 0$, $z'' \le 0$ при $a < r < r_0$. При $b \to 0$ $r_0 \to a$.*

Доказательство. Очевидно, $z''(a) = (2m)^{-1}(p-m)\bar{c}_1 b^{-1} < 0$. Следовательно, в правой части некоторой окрестности точки $r=a$, $z'<0$ и $z''<0$. Предположим, что найдется такое значение $r_1 > a$, для которого $z'(r_1)=0$, $z(r)>0$ при $a \le r \le r_1$, $z'(r) < 0$ при $a<r<r_1$. Тогда $z''(r_1) = -(2mz(r_1))^{-1}(p-m)\bar{c}_1 < 0$. Это доказывает тот факт, что
$$z'(r) < 0 \quad \text{для значений} \quad r > a, \quad \text{при которых} \quad z(r) > 0. \tag{2.10}$$

Покажем теперь, что
$$z''(r) \le 0 \quad \text{для значений} \quad r, \quad \text{при которых} \quad z(r) > 0. \tag{2.11}$$

Предположим противное. Это означает, что существует значение $r_2 > a$, для которого $z''(r_2) = 0$ и $z''(r) > 0$ в правой части некоторой окрестности точки r_2. Выберем произвольную точку r_3 из этой части окрестности и сравним все члены уравнения (2.8) в точках r_2 и r_3. Вследствие сделанных предположений $Lz|_{r=r_2} > Lz|_{r=r_3}$, что доказывает неравенство (2.11). Из (2.10), (2.11) следует существование такого значения r_0, для которого $z(r_0) = 0$. Очевидно, $r_0 \to a$ при $b \to 0$. Лемма 3 доказана.

Обозначим через $f(r)$ гладкую положительную при $r \ge 0$ функцию, удовлетворяющую условиям
$$f(r) \le \min\{a/(N-1), [\bar{u}_0(r)]^{-(p-m)/2}\}, \quad f'(r) < 0, \quad \lim_{r\to\infty} f(r) = 0. \tag{2.12}$$

При $r \ge a$ определим гладкую положительную функцию $c_1(r)$, для которой выполняются соотношения
$$c_1'(r) < 0, \quad c_1(r) \le k^{-1}\min\{\bar{c}(r+1), -f'(r+1), e^{-r}\}. \tag{2.13}$$

Постоянную k выбираем таким образом, чтобы
$$k > \max\{1, 4mp/(p-m)^2\}, \quad \int\limits_a^\infty c_1(r)\,dr < f(a+1) \tag{2.14}$$

и для решения $z(r)$ задачи (2.8), (2.9) с

$$b = \int_a^\infty c_1(r)\,dr \tag{2.15}$$

выполнялось неравенство $r_0 < a+1$. Для $\alpha \in [0,1]$ рассмотрим семейство функций $g_\alpha(r)$, являющихся при $r \geq a+\alpha$ решениями задачи

$$g'_\alpha = -c_1(r-\alpha), \quad g_\alpha(a+\alpha) = b. \tag{2.16}$$

В силу (2.13) $g_\alpha(r)$ – вогнутая функция. Далее, согласно (2.12), (2.13), (2.15), (2.16),

$$g_\alpha(r) = b - \int_{a+\alpha}^{r} c_1(s-\alpha)\,ds = \int_{r-\alpha}^{\infty} c_1(s)\,ds \leq -\int_{r-\alpha}^{\infty} f'(s+1)\,ds = f(r+1-\alpha) \leq f(r).$$

Отсюда, в частности, вытекает неравенство $g_\alpha(r) > 0$. Отметим, что $g_\alpha(r)$ получается из $g_0(r)$ сдвигом на α вправо. Так как $g''_\alpha(r) > 0$ и $z''(r) \leq 0$, где $z(r)$ – решение задачи (2.8), (2.9) с постоянной b из (2.15), то в силу (2.9), (2.16) и леммы 3 существует значение $\alpha_0 \in (0,1)$ такое, что графики $g_{\alpha_0}(r)$ и $z(r)$ пересекаются при единственном значении $r = \bar{r}$, причем $a < \bar{r} < a+1$ и $g'_{\alpha_0}(\bar{r}) = z'(\bar{r})$. Используя (2.8), (2.9), (2.12)–(2.14), несложно показать, что функция $y(r)$, равная $0, z(r)$ и $g_{\alpha_0}(r)$ соответственно на промежутках $[0,a]$, $(a,\bar{r})$ и $[\bar{r},+\infty)$, удовлетворяет условию (2.7) и неравенствам $y(r) \leq [\bar{u}_0(r)]^{-(p-m)/2}$ и (2.6) при $r \neq a$, $r \neq \bar{r}$, причем в этих точках непрерывна $y'(r)$. Из (2.6) и свойств функции $y(r)$ вытекает справедливость равенства из (2.4) и неравенств (2.5), а также (2.4) при $r \neq a$, $r \neq \bar{r}$. В точках $r = a$, $r = \bar{r}$ функция $v^m(r)$ имеет непрерывную производную. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы единственности. Единственность обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) является следствием принципа сравнения, при доказательстве которого используются некоторые методы работы [10].

Теорема 3. *Предположим, что $c(x,t)$ удовлетворяет неравенствам (1.4). Пусть $u(x,t)$ и $v(x,t)$ – обобщенные суб- и суперрешения уравнения (1.1) в некотором слое S_T соответственно с начальными условиями $u_0(x)$ и $v_0(x)$. Тогда если $u_0(x) \leq v_0(x)$, то*

$$u(x,t) \leq v(x,t) \quad \text{в} \quad S_T. \tag{3.1}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $z(x) = \max\limits_{0\leq t\leq T} u(x,t) + 1$. Как следует из доказательства теоремы 1, в S_T существует обобщенное суперрешение $U(x)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее неравенству $z(x) \leq U(x)$. Из замечания 2 вытекает, что в S_T определено обобщенное решение $u_1(x,t)$ задачи (1.1), (1.2) с начальным условием $u_1(x,0) = u_0(x)$, причем $u(x,t) \leq u_1(x,t) \leq U(x)$. Далее, по лемме 1 в S_T существует обобщенное решение $u_2(x,t)$ задачи Коши (1.1), (1.2) с начальным условием $u_2(x,0) = v_0(x)$, удовлетворяющее неравенству $u_2(x,t) \leq v(x,t)$. Таким образом, для доказательства (3.1) в S_T достаточно установить справедливость соотношения

$$u_1(x,t) \leq u_2(x,t). \tag{3.2}$$

Несложно проверить, что обобщенными решениями начально-краевой задачи для уравнения (1.1) в $Q_{R,T} = B_R \times (0,T)$ с условиями

$$u(x,0) = u_i(x,0), \quad x \in \bar{B}_R, \quad u(x,t)|_{x\in\partial B_R} = u_i(x,t)|_{x\in\partial B_R}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.3}$$

являются соответственно функции $u_i(x,t)$, $i = 1,2$.

Пусть $\{u_{0ki}(x)\}$, $\{g_{ki}(x,t)\}$ – последовательности положительных гладких функций таких, что $u_{0ki}(x) \geq 1/k$, $g_{ki}(x,t) \geq 1/k$, $u_{0ki}(x) \to u_i(x,0)$, $g_{ki}(x,t) \to u_i(x,t)$ при $k \to \infty$ равномерно соответственно на множествах $\bar{B}_R$ и $\partial B_R \times [0,T]$, причем

$$u_{0ki}(x,0)|_{x\in\partial B_R} = g_{ki}(x,0)|_{x\in\partial B_R}, \quad u_{0k1}(x) \leq u_{0k2}(x). \tag{3.4}$$

Как известно, решения задач (1.1), (3.3) для $i = 1, 2$ могут быть аппроксимированы в $C(\bar{Q}_{R,T})$ последовательностью классических положительных решений $u_{ki}(x,t)$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2$, уравнения

$$u_t = \Delta u^m - c(x,t)u^p + c(x,t)/k^p \tag{3.5}$$

с начальными и граничными условиями

$$u_{ki}(x,0) = u_{0ki}(x), \quad x \in \bar{B}_R, \quad u_{ki}(x,t) = g_{ki}(x,t), \quad (x,t) \in \partial B_R \times [0,T]. \tag{3.6}$$

Согласно одному из вариантов неравенства Като [11], имеем $-\Delta(u_{k1}^m - u_{k2}^m)^+ \leq -\Delta(u_{k1}^m - -u_{k2}^m)\,\mathrm{sign}^+(u_{k1} - u_{k2})$. Здесь $s^+ = \max\{s, 0\}$, $\mathrm{sign}^+ s = 1$ при $s > 0$ и $\mathrm{sign}^+ s = 0$ при $s \leq 0$. Отсюда и из (3.5) находим, что

$$(u_{k1} - u_{k2})_t^+ - \Delta(u_{k1}^m - u_{k2}^m)^+ + c(x,t)(u_{k1}^p - u_{k2}^p)^+ \leq 0 \tag{3.7}$$

в $D'(Q_{R,T})$. Таким образом, при любых неотрицательных функциях $\xi(x) \in C_0^\infty(B_R)$ и $\alpha(t) \in \in C_0^\infty(0,\tau)$, $0 < \tau \leq T$, справедливо неравенство

$$-\int_0^\tau \int_{B_R} \alpha'\xi(u_{k1} - u_{k2})^+ \leq \int_0^\tau \int_{B_R} \alpha\Delta\xi(u_{k1}^m - u_{k2}^m)^+ - \int_0^\tau \int_{B_R} \alpha\xi c(x,t)(u_{k1}^p - u_{k2}^p)^+. \tag{3.8}$$

Для упрощения записи в (3.8) и далее, где это не приводит к путанице, не пишутся дифференциалы переменных в интегралах. Положим в (3.8) $\alpha(t) = e^{-t}\gamma_l(t)$, где $\gamma_l(t) \in C_0^\infty(0,\tau)$, $0 \leq \gamma_l(t) \leq 1$, $\gamma_l(t) = 1$ при $1/l \leq t \leq \tau - 1/l$, $l > 2/\tau$, $\gamma_l'(t) \leq 0$ при $t \in (\tau - 1/l, \tau)$. Устремляя в (3.8) l к бесконечности и используя (3.4), (3.6) и теорему о среднем, получим

$$\int_0^\tau \int_{B_R} e^{-t}\xi(u_{k1} - u_{k2})^+ \leq \int_0^\tau \int_{B_R} e^{-t}\Delta\xi(u_{k1}^m - u_{k2}^m)^+ - \int_0^\tau \int_{B_R} e^{-t}\xi c(x,t)(u_{k1}^p - u_{k2}^p)^+. \tag{3.9}$$

Пусть $w(x)$ – функция, удовлетворяющая соотношениям $w(x) \in C_0^\infty(R^N)$, $0 \leq w(x) \leq 1$, $w(x) = 0$ при $|x| \geq 2$, $w(x) = 1$ при $|x| \leq 1$, $|\Delta w| + |\nabla w| \leq d_1$. Здесь и далее через d_i обозначаются положительные постоянные. Положим $\xi(x) = w^k(y)$, где $y = 2x/R$, $k > 2p/(p-m)$. Тогда

$$|\xi^{-m/p}\Delta\xi| = 4R^{-2}(kw^{k-1}\Delta w + k(k-1)w^{k-2}|\nabla w|^2)w^{-km/p} \leq d_2 R^{-2}. \tag{3.10}$$

Подставляя выбранную функцию $\xi(x)$ в (3.9), применяя неравенство Юнга со значением $\varepsilon = = \{p/(2m)\}^{m/p}$, неравенство

$$|r - s|^q \leq |r^q - s^q|, \tag{3.11}$$

в котором $r > 0$, $s > 0$, $q > 1$, а также используя (1.4) и (3.10), при $R > 2a$ находим, что

$$\int_0^\tau \int_{B_{R/2}} e^{-t}\xi(u_{k1} - u_{k2})^+ \leq \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{B_R} e^{-t}\xi c(x,t)[(u_{k1}^m - u_{k2}^m)^+]^{p/m} + \frac{p-m}{p}\left\{\frac{p}{2m}\right\}^{-m/(p-m)} \times$$

$$\times \int_0^\tau \int_{B_R \setminus B_a} e^{-t}|\Delta\xi|^{p/(p-m)}\xi^{-m/(p-m)}[c(x,t)]^{-m/(p-m)} - \int_0^\tau \int_{B_R} e^{-t}\xi c(x,t)(u_{k1}^p - u_{k2}^p)^+ \leq$$

$$\leq d_3\delta(R)R^{N-h(N)} - \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_{B_R} e^{-t}\xi c(x,t)(u_{k1}^p - u_{k2}^p)^+, \tag{3.12}$$

где $h(1)=1,\ h(N)=2$ при $N=2,3,\ldots$ Переходя при $N=1,2$ в (3.12) к пределу сначала при $k\to\infty$, а затем при $R\to\infty$, получим соотношение (3.2), а следовательно, и (3.1). Для доказательства утверждения в случае $N\geq 3$ введем вспомогательную функцию $\eta_k(x,t)= =\int_0^t (u_{k1}^m-u_{k2}^m)^+$. Обозначим через $B_R(\zeta)$ шар радиуса R с центром в точке $\zeta\in R^N$. Интегрируя (3.7) по переменной t, приходим к неравенству

$$\int_0^t c(x,\tau)(u_{k1}^p-u_{k2}^p)^+\,d\tau+(u_{k1}-u_{k2})^+(x,t)\leq \Delta\eta_k(x,t) \tag{3.13}$$

в $D'(B_R)$ при любом $t>0$. Следовательно, $\eta_k(x,t)$ – субгармоническая функция в B_R. Таким образом, в любой точке $\zeta\in B_R$ и для любого $r>0$, такого, что $B_r(\zeta)\subset B_R$,

$$\eta_k(\zeta,t)\leq \frac{d_4}{r^N}\int\limits_{B_r(\zeta)}\eta_k(x,t)\,dx. \tag{3.14}$$

Используя неравенства Гёльдера, (1.4), (3.11) и (3.12), получим

$$\int\limits_{B_r(\zeta)}\eta_k(x,t)\,dx=\int_0^t\int\limits_{B_r(\zeta)}(u_{k1}^m-u_{k2}^m)^+\leq$$

$$\leq\left\{\int_0^t\int\limits_{B_r(\zeta)}\Big[(u_{k1}^m-u_{k2}^m)^+\Big]^{p/m}c(x,t)\right\}^{m/p}\left\{\int_0^t\int\limits_{B_r(\zeta)\setminus B_a}\Big[c(x,t)\Big]^{-m/(p-m)}\right\}^{(p-m)/p}+d_5\leq d_6\delta(r)r^N+d_5,$$

где постоянная d_6 может зависеть от ζ. Отсюда с учетом неравенства (3.14) находим, что $\eta_k(\zeta,t)\leq d_6\delta(r)+d_7r^{-N}$. Устремляя в последнем неравенстве k, R и r к бесконечности, получаем в силу произвольности $\zeta\in R^N$ и $t\in(0,T)$ неравенство (3.1). Теорема 3 доказана.

Очевидно, что из теорем 1 и 2 легко получить

Следствие. *При выполнении условий теорем 1 и 2 в S определено единственное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. New York, 1993.
2. *Калашников А.С.* // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. № 1. С. 135–176.
3. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987.
4. *Kamin S., Peletier L.A., Vazquez J.L.* // Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. 1992. V. 3. P. 243–263.
5. *McLeod J.B., Peletier L.A., Vazquez J.L.* // Differ. and Integral Equat. 1991. V. 4. P. 1–14.
6. *Гладков А.Л.* // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34. № 1. С. 47–64.
7. *Vazquez J.L., Walias M.* // Differ. and Integral Equat. 1994. V. 7. № 1. P. 15–36.
8. *Zhao J., Liu H.* // J. Partial Differ. Equat. 1994. V. 7. P. 231–247.
9. *Chaves M., Vazquez J.L., Walias M.* // Proc. Royal Soc. Edinburgh. 1997. V. 127A. P. 217–242.
10. *Гладков А.Л.* // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1996. Т. 36. № 10. С. 73–86.
11. *Brezis H.* // Appl. Math. and Optimizat. 1984. V. 12. P. 271–282.

Витебский государственный университет

Поступила в редакцию
28.09.1999 г.