

УДК 517.958:536.24

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОВЕРХНОСТИ ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2002 г. П. А. Мандрик

Введение. В феноменологической теории теплопроводности предполагается, что скорость распространения тепла является бесконечно большой, и это подтверждается расчетами температурных полей в телах при обычных условиях, встречающихся в практике. Однако в разреженных средах при высокоинтенсивных нестационарных процессах теплообмена приходится учитывать, что тепло распространяется с некоторой конечной скоростью. В работе [1, с. 21] предложена теория о конечных скоростях распространения тепла и массы в капиллярно-пористых телах, согласно которой справедлива формула $w_r = \sqrt{\lambda/(c\gamma\tau_r)}$, где w_r – скорость распространения тепла, τ_r – постоянная времени релаксации теплового потока, λ – теплопроводность, c – удельная теплоемкость, γ – плотность рассматриваемого тела. Как правило, для газов $w_r \cong 150 - 300$ м/с, $\tau_r \cong 10^{-9} - 10^{-15}$ с и в условиях сверхзвукового потока влияние конечной величины скорости распространения тепла на процесс теплообмена становится заметным. В этом случае закон распространения тепла имеет вид [1, с. 21]

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T - \tau_r \partial \mathbf{q} / \partial \tau, \quad (1)$$

где \mathbf{q} – вектор плотности теплового потока, T – температура, ∇ – векторный дифференциальный оператор.

Постановка задачи. Пусть требуется определить закономерности развития пространственных температурных полей в изотропном полупространстве при задании на его поверхности смешанных граничных условий, линией разрыва которых служит окружность радиуса R . С учетом (1) в цилиндрической системе координат $r \geq 0$, $z \geq 0$ осесимметричное дифференциальное уравнение теплопроводности гиперболического типа запишется в виде [1, с. 21]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T(r, z, \tau)}{\partial z^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial \tau} + \frac{1}{w_r^2} \frac{\partial^2 T(r, z, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad r > 0, \quad z > 0, \quad (2)$$

где $a > 0$ – коэффициент температуропроводности, $\tau > 0$ – временная переменная.

При этом будем считать, что в заданном температурном диапазоне теплофизические характеристики (a, λ, c) не зависят от температуры, а известны некие их усредненные значения, чего всегда можно добиться, введя соответствующим образом новые переменные (см., например, [2, с. 15]).

Краевые условия на бесконечности имеют вид

$$\partial T(r, \infty, \tau) / \partial z = \partial T(\infty, z, \tau) / \partial r = 0, \quad r > 0, \quad z > 0, \quad (3)$$

условие симметрии – вид

$$\partial T(0, z, \tau) / \partial r = 0, \quad z > 0, \quad (4)$$

а смешанные граничные условия на поверхности $z = 0$ – вид

$$-\partial T(r, 0, \tau) / \partial z = \lambda^{-1} q(\tau) + C^{-1} w_r^{-2} \partial q(\tau) / \partial \tau, \quad 0 < r < R, \quad (5)$$

$$T(r, 0, \tau) = 0, \quad R < r < \infty, \quad (6)$$

где $C = c\gamma$ – объемная теплоемкость, $q(\tau)$ – функция плотности теплового потока через область $0 < r < R$ на поверхности $z = 0$ полупространства.

Рассмотрим однородные начальные условия для уравнений (2) и (5)

$$T(r, z, 0) = \partial T(r, z, 0) / \partial \tau = 0, \quad r > 0, \quad z > 0, \quad (7)$$

$$q(0) = 0. \quad (8)$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа (см., например, [3, с. 63]) $\bar{T}(r, z, s) = L[T(r, z, \tau)] = \int_0^\infty \exp(-s\tau)T(r, z, \tau) d\tau$, $\text{Re } s > 0$, $\bar{q}(s) = L[q(\tau)] = \int_0^\infty \exp(-s\tau)q(\tau) d\tau$, $\text{Re } s > 0$, сформулированную выше задачу (2)–(8) в области изображений Лапласа приводим к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{T}(r, z, s)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \bar{T}(r, z, s)}{\partial z^2} = s^* \bar{T}(r, z, s), \quad r > 0, \quad z > 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{T}(r, \infty, s)}{\partial z} = \frac{\partial \bar{T}(\infty, z, s)}{\partial r} = \frac{\partial \bar{T}(0, z, s)}{\partial r} = 0, \quad r > 0, \quad z > 0; \quad (10)$$

$$-\frac{\partial \bar{T}(r, 0, s)}{\partial z} = \bar{q}(s)(\lambda^{-1} + C^{-1} w_r^{-2} s), \quad 0 < r < R; \quad (11)$$

$$\bar{T}(r, 0, s) = 0, \quad R < r < \infty, \quad (12)$$

где $s^* = w_r^{-2} s^2 + a^{-1} s$, а требование $\text{Re } s > 0$ для L -параметра здесь и далее для краткости в записи опускается.

Необходимо заметить, что в общем случае задания неоднородных начальных условий (в отличие от однородных условий (7), (8)) соответствующие преобразования Лапласа от правых частей уравнений (2) и (5) имеют вид

$$L \left[a^{-1} \frac{\partial T(r, z, \tau)}{\partial \tau} + w_r^{-2} \frac{\partial^2 T(r, z, \tau)}{\partial \tau^2} \right] = s^* \bar{T}(r, z, s) - (w_r^{-2} s + a^{-1}) T(r, z, 0) - w_r^{-2} \frac{\partial T(r, z, 0)}{\partial \tau},$$

$$L \left[\lambda^{-1} q(\tau) + C^{-1} w_r^{-2} \frac{\partial q(\tau)}{\partial \tau} \right] = (w_r^{-2} s + a^{-1}) \bar{q}(s) - C^{-1} w_r^{-2} q(0).$$

Не уменьшая общности задачи, в дальнейшем будем рассматривать случай однородных начальных условий (7), (8).

Утверждение. Решение исходной задачи теплопроводности (2)–(8) представимо в виде

$$T(r, z, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(s\tau) \int_0^\infty p J_0(pr) \frac{\exp(-z\psi(p, s))}{\psi(p, s)} \int_0^R \bar{\varphi}(t, s) \sin(t\psi(p, s)) dt dp ds, \quad (13)$$

$$r \geq 0, \quad z \geq 0, \quad \tau > 0, \quad \text{Re } s > \sigma > 0,$$

где $\psi(p, s) = \sqrt{p^2 + w_r^{-2} s^2 + a^{-1} s}$.

Доказательство. Если применить к уравнению (9) бесконечное интегральное преобразование Ханкеля (см., например, [3, с. 64]) $\bar{T}_H(p, z, s) = H[\bar{T}(r, z, s)] = \int_0^\infty \bar{T}(r, z, s) J_0(pr) r dr$, где $J_0(pr)$ – функция Бесселя вещественного аргумента, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$d^2 \bar{T}_H(p, z, s) / dz^2 - (p^2 + s^*) \bar{T}_H(p, z, s) = 0, \quad z > 0,$$

частное решение которого с учетом краевых условий (10) может быть записано в виде [3, с. 166] $\bar{T}_H(p, z, s) = \bar{D}(p, s) \exp(-z\sqrt{p^2 + s^*})$, $z > 0$, где $\bar{D}(p, s)$ – неизвестная аналитическая функция, подлежащая определению.

Применяя формулу обратного преобразования Ханкеля, находим решение рассматриваемой задачи в области L -изображений в виде

$$\bar{T}(r, z, s) = \int_0^\infty \bar{D}(p, s) \exp(-z(p^2 + s^*)^{1/2}) J_0(pr) p dp, \quad r > 0, \quad z > 0. \quad (14)$$

Используя смешанные граничные условия (11), (12), из выражения (14) при $z = 0$ для определения неизвестной функции $\bar{D}(p, s)$ получим парные интегральные уравнения с L -параметром

$$\int_0^\infty \bar{D}(p, s) (p^2 + s^*)^{1/2} J_0(pr) p dp = \bar{q}(s) (\lambda^{-1} + C^{-1} w_r^{-2} s), \quad 0 < r < R, \quad (15)$$

$$\int_0^\infty \bar{D}(p, s) J_0(pr) p dp = 0, \quad R < r < \infty,$$

где предполагается существование и сходимости соответствующего интеграла $\bar{q}(s)$.

Решение парных интегральных уравнений (15) можно найти, используя подстановку

$$\bar{D}(p, s) = (p^2 + s^*)^{-1/2} \int_0^R \bar{\varphi}(t, s) \sin(t(p^2 + s^*)^{1/2}) dt, \quad (16)$$

где $\bar{\varphi}(t, s)$ – вспомогательная неизвестная функция-изображение. Подстановка (16) автоматически обеспечивает выполнение второго парного уравнения (15) при любом выборе функции $\bar{\varphi}(t, s)$, так как соответствующий разрывный интеграл обращается в нуль при $R < r < \infty$:

$$\int_0^R (p^2 + s^*)^{-1/2} \sin(t(p^2 + s^*)^{1/2}) J_0(pr) p dp = \begin{cases} 0, & 0 < t < r, \\ (t^2 - r^2)^{-1/2} \cos(t(s^*(t^2 - r^2))^{1/2}), & 0 < r < t, \quad \operatorname{Re} \sqrt{s^*} > 0. \end{cases}$$

Если подставить (16) в первое парное уравнение (15), использовать равенство

$$p J_0(pr) = r^{-1} d(r J_1(pr))/dr$$

и проинтегрировать полученное равенство по r от нуля до r , то получим уравнение для определения вспомогательной аналитической функции $\bar{\varphi}(t, s)$:

$$\int_0^r (r^2 - t^2)^{-1/2} t \bar{\varphi}(t, s) \exp(-(s^*(r^2 - t^2))^{1/2}) dt - \int_r^R (t^2 - r^2)^{-1/2} t \bar{\varphi}(t, s) \sin((s^*(t^2 - r^2))^{1/2}) dt + \\ + \int_0^R \bar{\varphi}(t, s) \sin(t\sqrt{s^*}) dt = 2^{-1} \bar{q}(s) r^2 (\lambda^{-1} + C^{-1} w_r^{-2} s), \quad 0 < r < R. \quad (17)$$

При этом следует указать здесь, что методы нахождения аналитической функции $\bar{\varphi}(t, s)$ из уравнения типа (17) представлены, например, в монографии [3, с. 196] и что при выводе (17) использовано значение разрывного интеграла

$$\int_0^\infty \sin(t(p^2 + s^*)^{1/2}) J_1(pr) dp = \\ = \begin{cases} r^{-1} [\sin(t\sqrt{s^*}) + t(r^2 - t^2)^{-1/2} \exp(-(s^*(r^2 - t^2))^{1/2})], & 0 < t < r, \\ r^{-1} [\sin(t\sqrt{s^*}) - t(t^2 - r^2)^{-1/2} \sin((s^*(t^2 - r^2))^{1/2})], & 0 < r < t, \quad \operatorname{Re} \sqrt{s^*} > 0. \end{cases}$$

Наконец, возвращаясь к формулам (14), (16) и применяя обратное преобразование Лапласа, можем записать решение исходной задачи в виде (13). Тем самым утверждение доказано.

Отметим, что если скорость распространения тепла $w_r \rightarrow \infty$, то формула (13) вырождается в решение параболического дифференциального уравнения теплопроводности при соответствующих смешанных граничных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., 1967.
2. Карслоу Г.С., Егер Д.К. Теплопроводность твердых тел. М., 1964.
3. Козлов В.П., Мандрик П.А. Системы интегральных и дифференциальных уравнений с L -параметром в задачах математической физики и методы идентификации тепловых характеристик. Минск, 2000.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
05.02.2001 г.