ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2002, том 38, № 6, с. 847–848

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.7

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

© 2002 г. В. И. Громак

Для второго уравнения Пенлеве

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \tag{P_2}$$

известны преобразования Беклунда

$$T: w_{\alpha-1} \to w_\alpha = -w_{\alpha-1} - (\alpha - 1/2)/(w'_{\alpha-1} + w^2_{\alpha-1} + z/2), \tag{1}$$

$$T^{-1}: w_\alpha \to w_{\alpha-1} = -w_\alpha + (\alpha - 1/2)/(w'_\alpha - w^2_\alpha - z/2), \tag{2}$$

$$S: w(z,\alpha) \to -w(z,-\alpha), \tag{3}$$

на основе которых получены автопреобразования Беклунда [1].

Теорема 1. *Пусть* $w_\alpha = w(z,\alpha)$ *– решение уравнения* (P_2) *при фиксированном значении параметра* $\alpha \in \mathbb{Z}$. *Тогда функция*

$$\tilde{w}(z,\alpha) = T^\alpha S T^{-\alpha} w(z,\alpha) \tag{4}$$

также является решением уравнения (P_2) *при том же значении параметра* α, *при этом* $\tilde{w}(z,\alpha) \equiv \equiv w(z,\alpha)$ *тогда и только тогда, когда* $w(z,\alpha)$ *является рациональным решением.*

В настоящей работе для $\alpha = \pm 1$ получим автопреобразование (4) в явной форме.

Пусть $w_1 = w(z,1)$ – нерациональное решение уравнения (P_2) при значении параметра $\alpha = 1$. Тогда в соответствии с теоремой 1 новое решение при этом же значении параметра $\alpha = 1$ будем строить по схеме

$$w(z,1) \overset{T^{-1}}{\to} w(z,0) \overset{S}{\to} \tilde{w}(z,0) \overset{T}{\to} \tilde{w}(z,1), \tag{5}$$

где $\tilde{w}(z,0) = Sw(z,0) = -w(z,0)$. В силу (5) $\tilde{w}(z,1) = T(\tilde{w}(z,0)) = T(-w(z,0))$. Следовательно,

$$\tilde{w}(z,1) = -\tilde{w}(z,0) - \frac{1/2}{\tilde{w}'(z,0) + \tilde{w}^2(z,0) + z/2} = w(z,0) - \frac{1/2}{-w'(z,0) + w^2(z,0) + z/2}. \tag{6}$$

Подставляя в (6) полученное из (2)

$$w(z,0) = -w(z,1) + (1/2)(w'(z,1) - w^2(z,1) - z/2)^{-1} \tag{7}$$

и принимая во внимание, что $w''(z,1) \equiv 2w^3(z,1) + zw(z,1) + 1$, находим явное выражение "нового" решения $\tilde{w}(z,1)$ через "старое" решение $w(z,1)$ и его производную $w'(z,1)$:

$$\tilde{w}(z,1) = -w_1 + 1/(2\theta) - (\theta^2/2)((w'_1 + w_1^2 + z/2)\theta^2 - w_1\theta + \theta'/2 + 1/4)^{-1},$$

где $\theta = w'_1 - w_1^2 - z/2$. Поскольку $\theta'/2 + 1/4 = (1/2)(2w^3 + zw - 2ww + 1/2) + 1/4 = -w_1\theta + 1/2$, то окончательно имеем

$$\tilde{w}(z,1) = -w_1 + \frac{1}{2\theta} - \frac{\theta^2}{(2w'_1 + 2w_1^2 + z)\theta^2 - 4w_1\theta + 1}. \tag{8}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $w_1 = w_1(z,1)$ *– произвольное решение уравнения* (P_2) *при* $\alpha = 1$. *Тогда* $\tilde{w}(z,1)$, *определяемое формулой (8), также решение уравнения* (P_2) *при* $\alpha = 1$, *при этом* $\tilde{w}(z,1) \equiv \equiv w(z,1)$ *тогда и только тогда, когда* $w(z,1)$ *– рациональное решение, т.е.* $w(z,1) = -1/z$.

Обозначим преобразование теоремы 2 через F, т.е. $F: w_1 \to \tilde{w}_1(z,1)$. Введем также обозначения $u_{-1} = u(z,-1) = Sw_1(z,1) = -w_1(z,1)$, $\tilde{u}_{-1} = \tilde{u}(z,-1) = S\tilde{w}_1(z,1) = -\tilde{w}_1(z,1)$. Тогда легко проверить непосредственными вычислениями, что $u_{-1} = \tilde{w}_{-1}$ и $\tilde{u}_{-1} = w_{-1}$.

Таким образом, произведение преобразований в соответствии со схемами:

$$w_{-1} \xrightarrow{T} w_0 \xrightarrow{T} w_1 \xrightarrow{F} \tilde{w}_1 \xrightarrow{S} w_{-1}, \quad w_{-1} \xrightarrow{F} \tilde{w}_{-1} \xrightarrow{T} \tilde{w}_0 \xrightarrow{T} \tilde{w}_1 \xrightarrow{S} w_{-1},$$

$$w_0 \xrightarrow{S} \tilde{w}_0 \xrightarrow{S} w_0, \quad w_1 \xrightarrow{S} \tilde{w}_1 \xrightarrow{S} w_1, \quad w_{-1} \xrightarrow{S} \tilde{w}_1 \xrightarrow{S} w_{-1}$$

коммутативно.

Заметим также, что в (8) $\tilde{w}(z,1)$ является функцией w_1 и w_1'. Однако в силу (7) w_1' можно выразить через w_1 и w_0 рациональным образом, т.е. $w_1' = w_1'(z,1) = w_1^2+z/2+(1/2)(w_0+w_1)^{-1}$. Подставляя полученное выражение в (8), находим алгебраическое соотношение между решениями w_0, w_1, $\tilde{w}_1$:

$$(w_1 + w_0)^{-1} + (\tilde{w}_1 - w_0)^{-1} + 4w_0^2 + 2z = 0. \tag{9}$$

Аналогичное (9) алгебраическое соотношение может быть получено для любых трех последовательных решений $w_{\alpha-1}$, w_α, $w_{\alpha+1}$, полученных преобразованием Беклунда (1). Для этого достаточно положить $\alpha \to \alpha + 1$ в (1) и исключить w_α'. Тогда имеем [1] уравнение

$$(2\alpha + 1)/(w_{\alpha+1} + w_\alpha) + (2\alpha - 1)/(w_\alpha + w_{\alpha-1}) + 4w_\alpha^2 + 2z = 0, \tag{10}$$

которое может рассматриваться как дискретный по параметру α аналог второго уравнения Пенлеве.

Нетрудно показать, что не только три последовательных решения одной иерархии Беклунда связаны алгебраическим соотношением, но и любые три решения w_α, $w_{\alpha+i}$, $w_{\alpha+j}$, $\alpha \in C$, $i < j$, $i,j \in Z \setminus \{0\}$, полученные из одного решения w_α преобразованием Беклунда (1), (2), алгебраически зависимы.

Действительно, из (10) следует, что $w_\alpha = R_1(w_{\alpha+1}, w_{\alpha+2})$; здесь и ниже $R, R_k, k \in Z$, – рациональные функции своих аргументов. Аналогично $w_{\alpha+1} = R_1(w_{\alpha+2}, w_{\alpha+3})$. Подставляя это значение $w_{\alpha+1}$ в R_1, находим $w_\alpha = R_2(w_{\alpha+2}, w_{\alpha+3})$. Выполняя эту процедуру i раз, имеем $w_\alpha = R_i(w_{\alpha+i}, w_{\alpha+i+1})$, где $i \in N$. Однако из (10) также следует, что $w_\alpha = R_{-2}(w_{\alpha-2}, w_{\alpha-1})$. Повторяя в этом случае аналогичную процедуру, убеждаемся, что любое решение w_α может быть рационально выражено через любые два последовательных решения иерархии Беклунда, порожденной решением w_α. Следовательно,

$$w_\alpha = R_i(w_{\alpha+i}, w_{\alpha+i+1}), \quad i \in Z \setminus \{0, 1\}. \tag{11}$$

Аналогично

$$w_\alpha = R_j(w_{\alpha+j}, w_{\alpha+j+1}), \quad j \in Z \setminus \{0, -1\}, \tag{12}$$

$$w_{\alpha+i+1} = R_{j-i-1}(w_{\alpha+j}, w_{\alpha+j+1}), \quad j \neq i + 1. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (11), находим, что

$$w_\alpha = R(w_{\alpha+i}, w_{\alpha+j}, w_{\alpha+j+1}). \tag{14}$$

Исключая $w_{\alpha+j+1}$ из (12), (14), получаем требуемое утверждение.

Заметим, что преобразования Беклунда для уравнений Пенлеве $(P_3)-(P_5)$ и высшего аналога второго уравнения Пенлеве $({}_{2n}P_2)$ имеют такую же структуру, как и (1), (2) [2]. Следовательно, для $(P_3)-(P_5)$ также можно установить алгебраическую зависимость между тремя решениями одной и той же иерархии Беклунда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Громак В.И.* // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32. № 5. С. 395–398.

2. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
21.12.2001 г.