ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 7, с. 1001–1003

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.955

О НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© 2003 г. С. В. Жестков, П. П. Забрейко

Хорошо известно (см. [1, с. 203–216]), что классическая теорема Коши–Ковалевской носит локальный характер. В последнее время ее различным обобщениям посвящено значительное число работ (см., например, [2–8]). При этом в работах [2, 5–8] установлены глобальные варианты этой теоремы для различных частных случаев систем Ковалевской. Цель настоящей работы – установить глобальный вариант этой теоремы для нормальных систем первого порядка. При этом основная трудность заключается в построении такой мажорантной задачи, которая допускает существование аналитического интеграла, позволяющего получить эффективные условия существования глобального по t решения исходной задачи.

Следуя [1, с. 214–215], достаточно исследовать разрешимость следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{n}C_k(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}+f(t,x,u),\quad u\in R^m,\quad u|_{t=0}=0, \tag{1}$$

$$G=\{t,x,u:\ t\ge 0,\ \|x\|\le Q,\ \|u\|\le Q\},\quad Q>0,$$

где матрицы $C_k(t,x,u)$ и вектор $f(t,x,u)$ непрерывны по t и аналитичны по остальным переменным в области G, точнее говоря, разлагаются в абсолютно сходящиеся в области G степенные ряды по x, u, причем

$$C_k(t,x,u)\ll\frac{c_k(t)(1-x_k/Q)}{\omega^2(x)(1-mz/Q)},\quad f(t,x,u)\ll\frac{f(t)}{\omega(x)(1-mz/Q)}, \tag{2}$$

$$\omega(x)\equiv(1-x_1/Q)\cdots(1-x_n/Q)\quad(\|x\|\le Q_0<Q,\ \|u\|\le z<Q/m).$$

Здесь скалярные функции $c_k(t)$, $f(t)$ непрерывны и неотрицательны на $[0,+\infty)$. Под нормой вектора (матрицы) понимаются величины $\|u\|=\max\limits_{1\le i\le m}|u_i|$, $\|x\|=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k|$ $(\|C\|=\max\limits_{1\le s\le m}\sum_{i=1}^m|c_{si}|)$. Знак мажорирования $\ll$ означает, что нормы матричных (векторных) коэффициентов разложения в степенной ряд матрицы (вектора), стоящей (стоящего) слева, не превосходят соответствующих коэффициентов разложения в степенной ряд скалярной функции, стоящей справа.

Развивая классический метод мажорант, сформулируем следующее утверждение.

Лемма. *Система вида*

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{c(t)}{\omega^2(x)}\frac{1}{1-mz/Q}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x_k}{Q}\right)\frac{\partial z}{\partial x_k}+\frac{c(t)}{\omega(x)}\frac{1}{1-mz/Q},\quad z|_{t=0}=0, \tag{3}$$

где $c(t)\equiv\max\{c_1(t),\ldots,c_n(t),f(t)\}$, *является мажорантной для задачи (1).*

Доказательство этой леммы проводится по схеме работы [9] и состоит в доказательстве соотношения

$$u_0(x)+\sum_{\ell=0}^{+\infty}(u_{\ell+1}(t,x)-u_\ell(t,x))\ll z_0(x)+\sum_{\ell=0}^{+\infty}(z_{\ell+1}(t,x)-z_\ell(t,x)),$$

где левая и правая части – решения соответственно задач (1) и (3), построенные классическим методом последовательных приближений. Очевидно, что $u_0(x)\equiv 0$, $z_0(x)\equiv 0$. Используя свойства аналитических мажорант, связанные с их сложением, умножением, подстановкой в другие аналитические мажоранты, а также с их интегрированием и дифференцированием (см. [10, с. 48–50]), нетрудно видеть, что

$$u_{\ell+1}(t,x)\ll z_{\ell+1}(t,x),\quad \ell=0,1,2,\ldots,$$

$$u_1(t,x)-u_0(x)=\int_0^t f(\tau,x,0)d\tau\ll\int_0^t\frac{c(\tau)}{\omega(x)}\,d\tau=z_1(t,x)-z_0(x).$$

Установим следующее важное свойство аналитических мажорант, сформулированное в [9]. Пусть $p(t,x,\nu)$ – скалярная функция, непрерывная по t и аналитическая по скалярным аргументам x, ν в некоторой окрестности начала координат, и выполнены соотношения: $p(t,x,\nu) \ll \hat{p}(t,x,\nu)$, $\nu_1(t,x) \ll \ll \hat{\nu}_1(t,x)$, $\nu_2(t,x) \ll \hat{\nu}_2(t,x)$, $\nu_2(t,x)-\nu_1(t,x) \ll \hat{\nu}_2(t,x)-\hat{\nu}_1(t,x)$, где $\nu_1(t,x)$, $\nu_2(t,x)$ – произвольные непрерывные по t и аналитические по x функции, $\hat{p}(t,x,\nu)$, $\hat{\nu}_1(t,x)$, $\hat{\nu}_2(t,x)$ – соответствующие аналитические мажоранты. Тогда имеем

$$p(t,x,\nu_2(t,x)) - p(t,x,\nu_1(t,x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(t,x)[\nu_2^k(t,x) - \nu_1^k(t,x)] \ll$$

$$\ll \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{p}_k(t,x)[\hat{\nu}_2(t,x) - \hat{\nu}_1(t,x)][\hat{\nu}_2^{k-1}(t,x) + \hat{\nu}_2^{k-2}(t,x)\hat{\nu}_1(t,x) + \ldots + \hat{\nu}_1^{k-1}(t,x)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{p}_k(t,x)[\hat{\nu}_2^k(t,x) - \hat{\nu}_1^k(t,x)] = \hat{p}(t,x,\hat{\nu}_2(t,x)) - \hat{p}(t,x,\hat{\nu}_1(t,x)).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для функции $p(t,x,\nu)$, где $x \in R^n$, $\nu \in R^m$ (см. [9]). Поэтому, используя указанные выше свойства аналитических мажорант, получаем

$$u_{\ell+1}(t,x) - u_\ell(t,x) = \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^n C_k(\tau,x,u_\ell(\tau,x)) \left(\frac{\partial u_\ell(\tau,x)}{\partial x_k} - \frac{\partial u_{\ell-1}(\tau,x)}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=1}^n (C_k(\tau,x,u_\ell(\tau,x)) - \right.$$

$$\left. - C_k(\tau,x,u_{\ell-1}(\tau,x))) \frac{\partial u_{\ell-1}(\tau,x)}{\partial x_k} + (f(\tau,x,u_\ell(\tau,x)) - f(\tau,x,u_{\ell-1}(\tau,x))) \right\} d\tau \ll$$

$$\ll z_{\ell+1}(t,x) - z_\ell(t,x), \quad \ell = 1,2,3,\ldots,$$

а это и означает справедливость леммы.

По определению мажорантной задачи имеем $u(t,x) \ll z(t,x)$ для любых t, x из области определения функции $z(t,x)$. Задача (3) допускает эффективное исследование. Ее решение строим в виде $z(t,x) = h(t,y)$, $\quad y = \omega(x)$. Используя классический метод характеристик, придем к уравнению

$$h^3 - 3Q\left(\frac{1}{m} + \frac{y}{n}\right)h^2 + \left(\frac{6Q^2}{mn}y\right)h - \frac{6Q^2}{mn}\int_0^t c(\tau)\,d\tau = 0, \tag{4}$$

из которого находим решение $h(t,y)$. Очевидно, что при $t = 0$ уравнение (4) имеет три различных действительных корня, причем искомому решению соответствует корень $h_1 = 0$.

Из формул Кардано следует, что существование трех различных действительных корней уравнения (4) обеспечивается выполнением неравенства

$$-m^2n^2y^2(3m^2y^2 - 2mny + 3n^2) - (\gamma m^3n^3/Q^3)(n+my)(-n^2 + mny - m^2y^2) + \gamma^2m^6n^6/(4Q^6) < 0$$

$$(q_0 \le y \le 1),$$

где $\gamma \equiv (6Q^2/(mn))\int_0^{+\infty} c(\tau)\,d\tau$, $q_0 \equiv (1 - Q_0/Q)^n$. Следовательно, параметр γ должен удовлетворять условию

$$\gamma < \min_{y\in[q_0,1]} R(y), \tag{5}$$

где $R(y) \equiv -2Q^3m^{-3}n^{-3}(n+my)(n^2 - mny + m^2y^2) + [4Q^6m^{-6}n^{-6}(n+my)^2(n^2 - mny + m^2y^2)^2 + + 4Q^6y^2m^{-4}n^{-4}(3m^2y^2 - 2mny + 3n^2)]^{1/2}$, при этом первый (искомый) корень уравнения (4) всегда меньше (строго) числа Q/m.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Пусть выполнены условия (3) и (5). Тогда задача (1) имеет единственное глобальное по t решение, которое можно построить классическим методом последовательных приближений.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
2. *Жестков С.В.* // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43. № 5. С. 583–590.
3. *Heersink R., Tutschke W.* // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. 1994. V. 43. № 3. P. 419–434.
4. *Ebenfelt P., Shapiro Harold S.* // Commun. Part. Diff. Equat. 1995. V. 20. № 5–6. P. 939–960.
5. *Жестков С.В.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 558–559.
6. *Жестков С.В., Забрейко П.П.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 1999. Т. 3. С. 66–70.
7. *Жестков С.В.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 7. С. 1000–1002.
8. *Жестков С.В., Забрейко П.П.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С. 48–53.
9. *Демидов Г.В.* // Численные методы механики сплошной среды: Информационный бюллетень. 1970. Т. 1. № 2. С. 10–32.
10. *Пуанкаре А.* // Изб. тр.: В 3 т. Т. 1. М., 1971.

Институт прикладной оптики НАН Беларуси, г. Могилев,
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск

Поступила в редакцию
17.07.2002 г.