ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 5, с. 638–644

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

АНАЛОГ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

© 2003 г. А. А. Килбас, О. А. Репин

Посвящается академику
Владимиру Александровичу Ильину
в связи с его 75-летием

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$U_{xx} - D^{\alpha}_{0+,y}U = 0 \quad (y > 0), \qquad (-y)^m U_{xx} - U_{yy} = 0 \quad (m > 0,\ y < 0), \tag{1}$$

где $D^{\alpha}_{0+,y}$ – частная дробная производная Римана–Лиувилля порядка α, $0 < \alpha < 1$, от функции $U(x,y)$ по второй переменной [1, с. 341]:

$$(D^{\alpha}_{0+,y}U)(x,y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y \frac{U(x,t)}{(y-t)^{1-\alpha}}\,dt \quad (0 < \alpha < 1,\ y > 0). \tag{2}$$

Настоящая работа посвящена изучению уравнения (1) в области D, которая представляет собой объединение верхней полуплоскости $D^+ = \{(x,y) :\ -\infty < x < +\infty,\ y > 0\}$ и области D^-, лежащей в нижней полуплоскости $(y < 0)$ и ограниченной характеристиками

$$AC : \xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0, \quad BC : \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 1 \tag{3}$$

и отрезком $[0,1]$ прямой $y = 0$. Обозначим через $J = (0,1)$ единичный интервал прямой $y = 0$, а через $\Theta_0(x) = (x/2) - i[(m+2)x/2]^{2/(m+2)}$ аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0) \in J$, с характеристикой AC. Пусть I^{α}_{0+} – оператор дробного интегрирования Римана–Лиувилля:

$$(I^{\alpha}_{0+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}f(t)\,dt \quad (\alpha > 0,\ x > 0), \tag{4}$$

а $I^{\alpha,\beta,\eta}_{0+}$ – оператор обобщенного дробного интегрирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;z)$, введенный в [2] (см. также [1, с. 326–327]) и имеющий при действительных $\alpha > 0$, β, η и $x > 0$ вид

$$(I^{\alpha,\beta,\eta}_{0+}f)(x) = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}\right)f(t)\,dt. \tag{5}$$

Заметим, что

$$(I^{\alpha,-\alpha,\eta}_{0+}f)(x) = (I^{\alpha}_{0+}f)(x). \tag{6}$$

Для уравнения (1) изучим следующую нелокальную краевую задачу, которую назовем аналогом задачи Бицадзе–Самарского [3]: найти решение $U(x,y)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$y^{1-\alpha}U|_{y=0}=0, \quad -\infty<x\le 0, \quad 1\le x<\infty, \tag{7}$$

$$A(I_{0+}^{a,-a-\beta,-a+\beta-1}U[\Theta_0(t)])(x)+B(I_{0+}^{a+1-\beta}U_y(t,0))(x)=g(x), \quad x\in J, \tag{8}$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}U(x,y)=\lim_{y\to 0-}U(x,y) \quad (x\in \overline{J}), \tag{9}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}U(x,y))_y=\lim_{y\to 0-}U_y(x,y) \quad (x\in J). \tag{10}$$

Здесь $g(x)\in C'(\overline{J})\cap C^2(J)$ – заданная функция; $\beta=m/(2m+4)$, $a>\max[-\beta,\beta-1]$; A и B – действительные числа разных знаков. Будем искать решение $U(x,y)$ поставленной задачи в классе дважды дифференцируемых функций в области D таких, что

$$\begin{gathered} y^{1-\alpha}U(x,y)\in C(\overline{D^+}), \quad U(x,y)\in C(\overline{D^-}),\\ y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}U)_y\in C(D^+\cup\{(x,y):\ 0<x<1, \quad y=0\}), \end{gathered} \tag{11}$$

$$U_{xx}\in C^2(D^+\cup D^-), \quad U_{yy}\in C^2(\overline{D^-}). \tag{12}$$

2. Единственность решения задачи. Пусть существует решение исследуемой задачи. Введем обозначения

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}U(x,y)=\tau_1(x), \quad \lim_{y\to 0-}U(x,y)=\tau_2(x), \tag{13}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{1-\alpha}(y^{1-\alpha}U(x,y))_y=\nu_1(x), \quad \lim_{y\to 0-}U_y(x,y)=\nu_2(x). \tag{14}$$

Известно [4], что решение уравнения (1) в полуплоскости $y>0$, удовлетворяющее условию (7) и условию

$$\lim_{y\to 0+0} y^{1-\alpha}U(x,y)=\tau_1(x) \quad (x\in\overline{J}), \tag{15}$$

дается формулой

$$U(x,y)=\int_0^1 G(x,y,t)\tau_1(t)\,dt, \tag{16}$$

где

$$G(x,y,t)=\frac{\Gamma(\alpha)}{2}y^{\alpha/2-1}e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}(-|x-t|y^{-\alpha/2}), \quad e_{b,c}^{p,q}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(p+kb)\Gamma(q-ck)}, \quad b>c. \tag{17}$$

Также известно [5, с. 20], что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесенное из параболической части D^+ на линию $y=0$, имеет вид

$$\nu_1(x)=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\tau_1''(x). \tag{18}$$

Найдем соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесенное на линию $y=0$ из гиперболической части D^- области D. Используя формулу (19) из [6], имеем

$$U[\Theta_0(x)]=\gamma_1\Gamma(\beta)(I_{0+}^{\beta,0,\beta-1}\tau_2(t))(x)-\gamma_2\Gamma(1-\beta)(I_{0+}^{1-\beta,2\beta-1,\beta-1}\nu_2(t))(x), \tag{19}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}. \tag{20}$$

Подставляя выражение (19) в условие (8), применяя соотношение $I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta} f(x) = I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta} f(x)$ $(\gamma > 0)$ (см., например, [1, с. 327]) и учитывая формулу (6), получаем

$$A\gamma_1\Gamma(\beta)(I_{0+}^{\alpha+\beta}\tau_2(t))(x) + (B - A\gamma_2\Gamma(1-\beta))(I_{0+}^{\alpha+1-\beta}\nu_2(t))(x) = g(x). \tag{21}$$

Пусть D_{0+}^{α} – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ [1, с. 44]:

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^x \frac{y(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \quad (\alpha > 0, \quad n = [\alpha]+1), \tag{22}$$

где $[\alpha]$ – целая часть α. Применяя к обеим частям равенства (21) оператор $D_{0+}^{\alpha+\beta}$ и используя свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования [1, с. 50–51] $D_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\alpha} f = I_{0+}^{\alpha-\beta} f$ $(\beta > \alpha > 0)$, $D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} f = f$ $(\alpha > 0)$, имеем

$$\tau_2(x) = \varkappa(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_2(t))(x) + \Phi(x), \tag{23}$$

где

$$\varkappa = \frac{A\gamma_2\Gamma(1-\beta) - B}{A\gamma_1\Gamma(\beta)}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{A\gamma_1\Gamma(\beta)}(D_{0+}^{\alpha+\beta}g(t))(x). \tag{24}$$

Теперь рассмотрим соответствующую однородную задачу $(g(x) \equiv 0)$ и применим методику, использованную нами в [6]. Оценим интеграл $I = \int_0^1 \tau_2(x)\nu_2(x)\,dx$. В силу (9) и (13), (14) имеем $I = \int_0^1 \tau_1(x)\nu_1(x)\,dx$. Интегрируя по частям и учитывая, что, согласно соотношениям (7) и (15), $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, получаем

$$I = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_0^1 \tau_1(x)\tau_1''(x)\,dx = -\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int\limits_0^1 [\tau_1'(x)]^2\,dx \le 0. \tag{25}$$

Покажем, что для гиперболической области D^- справедливо неравенство $I \ge 0$. При $g(x) = 0$, согласно соотношениям (4) и (24), равенство (23) принимает вид

$$\tau_2(x) = \frac{\varkappa}{\Gamma(1-2\beta)} \int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}\nu_2(t)\,dt$$

и, следовательно,

$$I = \frac{\varkappa}{\Gamma(1-2\beta)} \int\limits_0^1 \nu_2(x)\,dx \int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}\nu_2(t)\,dt.$$

Воспользуемся теперь следующей формулой [7, с. 587]:

$$\int\limits_0^\infty s^{\mu-1}\cos(ks)\,ds = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad (k > 0, \quad 0 < \mu < 1),$$

полагая в которой $k = |x-t|$ и $\mu = 2\beta$, имеем

$$|x-t|^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos(\pi\beta)} \int\limits_0^\infty s^{2\beta-1}\cos(s|x-t|)\,ds \quad \left(0 < \beta < \frac{1}{2}\right).$$

Применяя это равенство и формулу Дирихле перестановки порядка интегрирования в повторном интеграле (см., например, [1, с. 26]), приходим к соотношению

$$I = \frac{\varkappa\sin(\pi\beta)}{\pi}\int\limits_0^\infty s^{2\beta-1}\left[\left(\int\limits_0^1 \nu_2(x)\cos(sx)\,dx\right)^2 + \left(\int\limits_0^1 \nu_2(x)\sin(sx)\,dx\right)^2\right] ds \geq 0. \tag{26}$$

Из неравенств (25) и (26) вытекает, что $I = 0$ и, следовательно, $\int_0^1(\tau_1'(x))^2\,dx = 0$. Отсюда в силу соотношения $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$ следует, что $\tau_1(x) = 0$ для всех $x \in \overline{J}$. Это, согласно (16), означает, что $U(x,y) \equiv 0$ в области $\overline{D}$, что и доказывает единственность решения исходной задачи.

3. Существование решения задачи. Для доказательства существования решения исходной задачи сведем ее к дифференциальному уравнению дробного порядка. Дифференцируя обе части равенства (23) дважды по x, имеем

$$\tau_2''(x) = \varkappa\frac{d^2}{dx^2}(I_{0+}^{1-2\beta}\nu_2(t))(x) + \Phi''(x)$$

или с учетом (22)

$$\tau_2''(x) = \varkappa(D_{0+}^{1+2\beta}\nu_2(t))(x) + \Phi''(x). \tag{27}$$

Полагая $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$ и $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$ и учитывая (18), придем к дифференциальному уравнению дробного порядка $1+2\beta$

$$(D_{0+}^{1+2\beta}\nu(t))(x) - \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa}\nu(x) = -\frac{\Phi''(x)}{\varkappa}. \tag{28}$$

Известно [1, примеры 42.1 и 42.2, с. 601–602], что общее решение дифференциального уравнения дробного порядка $\alpha > 0$

$$(D_{0+}^{\alpha}y)(x) - \lambda y(x) = h(x) \quad (\alpha > 0, \quad n = -[-\alpha]) \tag{29}$$

дается формулой

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{\alpha-k}E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha) + \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha]h(t)\,dt. \tag{30}$$

Здесь $c_1,\ldots,c_n$ – произвольные постоянные, а $E_{\alpha,1+\alpha-k}(\lambda x^\alpha)$ и $E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^\alpha]$ – специальные случаи функции Миттаг–Лёффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$, определяемой равенством

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{\Gamma(\alpha m+\beta)} \quad (\alpha > 0, \quad \beta > 0), \quad E_\alpha(z) \equiv E_{\alpha,1}(z), \tag{31}$$

и являющейся целой функцией от z (см. [1, с. 33; 8, § 18.1; 9, с. 117]).

Уравнение (28) – уравнение вида (29) с $y(x) = \nu(x)$, $\alpha = 1+2\beta$, $\lambda = \Gamma(1+\alpha)/\varkappa$ и $h(x) = -\Phi''(x)/\varkappa$. Так как $0 < \beta < 1/2$, то $1 < 1+2\beta < 2$, и поэтому общее решение вида (30) для уравнения (28) с $\varkappa \neq 0$ дается формулой

$$\nu(x) = c_1x^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa}x^{1+2\beta}\right) + c_2x^{2\beta-1}E_{1+2\beta,2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa}x^{1+2\beta}\right) -$$

$$-\frac{1}{\varkappa}\int\limits_0^x (x-t)^{2\beta}E_{1+2\beta,1+2\beta}\left[\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa}(x-t)^{1+2\beta}\right]\Phi''(t)\,dt, \tag{32}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

Подставляя (32) в (23) (с $\tau_2=\tau$, $\nu_2=\nu$), получаем выражение для $\tau(x)$:

$$\tau(x)=c_1^*\left(I_{0+}^{1-2\beta}t^{2\beta}E_{2\beta+1,2\beta+1}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa}t^{2\beta+1}\right)\right)(x)+$$

$$+c_2^*\left(I_{0+}^{1-2\beta}t^{2\beta-1}E_{2\beta+1,2\beta}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa}t^{2\beta+1}\right)\right)(x)-$$

$$-\left(I_{0+}^{1-2\beta}\int\limits_0^t (t-s)^{2\beta}E_{2\beta+1,2\beta+1}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa}(t-s)^{2\beta+1}\right)\Phi''(s)\,ds\right)(x)+\Phi(x), \tag{33}$$

где $c_1^*=c_1\varkappa$, $c_2^*=c_2\varkappa$.

Для приведения выражения (33) к более простому виду докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Если* $0<\beta<1/2$, $\lambda\in C$, *то*

$$(I_{0+}^{1-2\beta}t^{2\beta}E_{2\beta+1,2\beta+1}(\lambda t^{2\beta+1}))(x)=xE_{2\beta+1,2}(\lambda x^{2\beta+1}) \tag{34}$$

и

$$(I_{0+}^{1-2\beta}t^{2\beta-1}E_{2\beta+1,2\beta}(\lambda t^{2\beta+1}))(x)=E_{2\beta+1,1}(\lambda x^{2\beta+1})\equiv E_{2\beta+1}(\lambda x^{2\beta+1}). \tag{35}$$

Доказательство. Согласно равенству (31), имеем

$$(I_{0+}^{1-2\beta}t^{2\beta}E_{2\beta+1,2\beta+1}(\lambda t^{2\beta+1}))(x)=\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}t^{2\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda t^{2\beta+1})^m}{\Gamma((2\beta+1)m+2\beta+1)}\,dt.$$

Переставляя порядки интегрирования и суммирования, используя формулу (2.44) из [1] $(I_{0+}^{\alpha}t^{\beta-1})(x)=[\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)]x^{\alpha+\beta-1}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$, получаем

$$(I_{0+}^{1-2\beta}t^{2\beta}E_{2\beta+1,2\beta+1}(\lambda t^{2\beta+1}))(x)=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\Gamma[(2\beta+1)m+2\beta+1]}\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)}\int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}t^{(2\beta+1)m+2\beta}\,dt=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{\Gamma[(2\beta+1)m+2\beta+1]}(I_{0+}^{1-2\beta}t^{(2\beta+1)m+2\beta})(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m x^{(2\beta+1)m+1}}{\Gamma[(2\beta+1)m+2]}=$$

$$=x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda x^{2\beta+1})^m}{\Gamma[(2\beta+1)m+2]},$$

что дает равенство (34) в силу (31). Формула (35) доказывается аналогично.

Лемма 2. *Если* $0<\beta<1/2$ *и* $\lambda\in C$, *то*

$$\left(I_{0+}^{1-2\beta}\int\limits_0^t (t-s)^{2\beta}E_{2\beta+1,2\beta+1}[\lambda(t-s)^{2\beta+1}]h(s)\,ds\right)(x)=$$

$$= \int_0^x (x-s) E_{2\beta+1,2\beta+1}[\lambda(x-s)^{2\beta+1}] h(s)\, ds. \tag{36}$$

Доказательство. Осуществляя по формуле Дирихле (1.32) [1] перестановку порядков интегрирования, а затем перестановку ряда и интегрирования, имеем

$$\left(I_{0+}^{1-2\beta} \int_0^t (t-s)^{2\beta} E_{2\beta+1,2\beta+1}[\lambda(t-s)^{2\beta+1}] h(s)\, ds \right)(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} \int_0^x (x-t)^{-2\beta}\, dt \int_0^t (t-s)^{2\beta} E_{2\beta+1,2\beta+1}[\lambda(t-s)^{2\beta+1}] h(s)\, ds =$$

$$= \int_0^x h(s)\, ds \left[\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} \int_s^x (x-t)^{-2\beta} (t-s)^{2\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(t-s)^{2\beta+1}]^m}{\Gamma[(2\beta+1)m+2\beta+1]}\, dt \right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\Gamma[(2\beta+1)m+2\beta+1]} \int_0^x \left[\frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} \int_s^x (x-t)^{-2\beta} (t-s)^{(2\beta+1)m+2\beta}\, dt \right] h(s)\, ds =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{\Gamma[(2\beta+1)m+2]} \int_0^x (x-s)^{(2\beta+1)m+1} h(s)\, ds = \int_0^x (x-s) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\lambda(x-s)^{2\beta+1}]^m}{\Gamma[(2\beta+1)m+2]} h(s)\, ds,$$

что дает равенство (36) в силу (31).

Используя формулы (34), (35) и соотношение (36) с $\lambda = \Gamma(1+\alpha)/\varkappa$, полагая $h(t) = \Phi''(t)$ и подставляя полученные выражения в (33), находим формулу для $\tau(x)$:

$$\tau(x) = c_1 x E_{2\beta+1,2}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa} x^{2\beta+1} \right) + c_2 E_{2\beta+1}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa} x^{2\beta+1} \right) -$$

$$- \int_0^x (x-t) E_{2\beta+1,2}\left[(x-t)^{2\beta+1} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa} \right] \Phi''(t)\, dt + \Phi(x), \tag{37}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные. Для нахождения этих постоянных мы можем использовать соотношение $\tau(0) = \tau(1) = 0$, вытекающее из условий (7) и (15). Подставляя $x = 0$ в (37) и учитывая вытекающее из (31) равенство $E_{2\beta+1}(0) = 1$, получим выражение

$$c_1 = -\Phi(0). \tag{38}$$

Подставляя $x = 1$ в формулу (37) и учитывая выражение (38), находим

$$c_2 = \frac{1}{E_{2\beta+1,2}[\Gamma(1+\alpha)/\varkappa]} \left[\Phi(0) E_{2\beta+1}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa} \right) - \Phi(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-t) E_{2\beta+1,2}\left[(1-t)^{2\beta+1} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa} \right] \Phi''(t)\, dt \right]. \tag{39}$$

Подставляя (37) в формулу (16) (с $\tau_1 = \tau$), получаем явное решение $U(x,y)$ поставленной задачи в виде

$$U(x,y) = c_1 \int_0^1 G(x,y;t) t E_{2\beta+1,2}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa} t^{2\beta+1} \right) dt + c_2 \int_0^1 G(x,y;t) E_{2\beta+1}\left(\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa} t^{2\beta+1} \right) dt -$$

$$-\int_0^1 G(x,y;t)\int_0^t (t-s)E_{2\beta+1,2}\left[(t-s)^{2\beta+1}\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\varkappa}\right]\Phi''(s)\,ds\,dt+\int_0^1 G(x,y;t)\Phi(t)\,dt. \tag{40}$$

Здесь функция $G(x,y;t)$ определена формулой (17), функция $\Phi(x)$ и постоянная $\varkappa$ – формулой (24), а постоянные c_1 и c_2 – соотношениями (38) и (39).

Используя явный вид решения (40), непосредственно проверяется выполнение краевых условий (7), (8) и условий сопряжения (9), (10), а также принадлежность полученного решения $U(x,y)$ поставленной задачи классу функций (11), (12). Это завершает доказательство существования решения исходной задачи.

Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. *Saigo M.* // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11. № 2. P. 135–143.
3. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
4. *Геккиева С.Х.* // Докл. АМАН. 2000. Т. 5. № 1. С. 16–19.
5. *Геккиева С.Х.* // Докл. АМАН. 2001. Т. 5. № 2. С. 18–22.
6. *Килбас А.А., Репин О.А.* // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 6. С. 799–805.
7. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М., 1967.
9. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.

Белорусский государственный университет, г. Минск,
Самарская государственная экономическая академия

Поступила в редакцию
22.11.2002 г.