ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 4, с. 563–564

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925

О НЕПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2003 г. С. Л. Соболевский

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$P_j'(w_j', w_1, w_2, \ldots, w_n, z) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где P_j – полином по $w_j', w_1, w_2, \ldots, w_n$ с коэффициентами, аналитическими по z в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Будем считать, что все полиномы P_j неприводимы, т.е. не могут быть представлены в виде произведения двух полиномов по $w_j', w_1, w_2, \ldots, w_n$, существенно зависящих хотя бы от одной из этих переменных, и что все P_j имеют хотя бы один коэффициент, равный единице.

В настоящей работе установим связь между характером решений системы (1) и ее коэффициентами.

Пусть $w_j^1 \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,n}$, $\lambda_0 = (w_1^0, w_2^0, \ldots, w_n^0) \in \mathbb{C}^n$ таковы, что для всех $j = \overline{1,n}$ имеет место $P_j(w_j^1, \lambda_0, z_0) = 0$, $\partial P_j(w_j^1, \lambda_0, z_0)/\partial w_j' \neq 0$. Тогда для всех $j = \overline{1,n}$ существуют голоморфные в некоторой окрестности точки (λ_0, z_0) отображения $\varphi_j : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ такие, что $P_j(\varphi_j(\lambda, z), \lambda, z) = 0$ и $w_j^1 = \varphi_j(\lambda_0, z_0)$. Пусть Φ – некоторая окрестность точки (λ_0, z_0), Ω – множество n-вектор-функций, являющихся решениями системы (1), удовлетворяющими начальным условиям $w_j(z_*) = w_j^*$, $w_j'(z_*) = w_j^{**}$, $j = \overline{1,n}$, где $(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*, z_*) \in \Phi$ и $w_j^{**} = \varphi_j(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*, z_*)$, $j = \overline{1,n}$. Обозначим через Δ наименьшее замкнутое относительно дифференцирования поле мероморфных в окрестности точки z_0 функций, содержащее все компоненты w_j, $j = \overline{1,n}$, вектор-функций из Ω, кроме тождественного нуля (поле Δ – это множество всех рациональных комбинаций компонент вектор-функций из Ω и их производных).

Имеет место

Теорема. *Все коэффициенты системы (1) принадлежат полю* Δ.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $j^* \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть

$$P_{j^*} = v_0 + a_1(z)v_1 + a_2(z)v_2 + \ldots + a_s(z)v_s,$$

где $v_i = v_i(w_{j^*}', w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $i = \overline{0,s}$, – одночлены, а a_i, $i = \overline{0,s}$, – аналитические в окрестности точки z_0 коэффициенты. Положим для $\omega = (\omega_k(z),\ k = \overline{1,s}) \in \Omega$, $v_i(\omega) = v_i(\omega_{j^*}'(z), \omega_1(z), \omega_2(z), \ldots$ $\ldots, \omega_n(z))$.

Далее нам потребуется

Лемма. *Пусть* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *– не тождественно равные нулю мероморфные в окрестности* z_0 *функции от* z. *Тогда найдется* $\omega \in \Omega$ *такое, что*

$$R(\omega) = b_1(z)v_1(\omega) + b_2(z)v_2(\omega) + \ldots + b_s(z)v_s(\omega) \not\equiv 0.$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть при всех $\omega \in \Omega$ имеем $R(\omega) = 0$. Легко видеть, что P_{j^*} и R взаимно просты как полиномы по w_{j^*}' с рациональными по $w_1, w_2, \ldots, w_n$ и мероморфными по z в окрестности z_0 коэффициентами, так как в противном случае, учитывая очевидную невозможность $P_{j^*}|R$, полином P_{j^*} был бы приводим. Тогда, исключая w_{j^*}' из системы $P_{j^*}(w_{j^*}', w_1, w_2, \ldots, w_n, z) = 0$, $R(w_{j^*}', w_1, w_2, \ldots, w_n, z) = 0$, будем иметь для всех $\omega \in \Sigma$ $S(\omega) = 0$, где S – полином по $w_1, w_2, \ldots, w_n$ с мероморфными в окрестности z_0 по z коэффициентами. Таким образом, все вектор-функции $\omega \in \Omega$ удовлетворяют системе

$$P_j(w_j', w_1, w_2, \ldots, w_n, z) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad S(w_1, w_2, \ldots, w_n, z) = 0.$$

Однако последняя система определяет $n-1$ параметрическое семейство решений (действительно, выразив из $S(w_1, w_2, \ldots, w_n, z) = 0$ одно из w_j через остальные, мы найдем последние из системы $(n-1)$-го порядка), а значит, ей не могут удовлетворять все вектор-функции из Ω. Полученное противоречие доказывает лемму.

Покажем, что можно выбрать такие $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s \in \Omega$, что $\det(v_j(\omega_i))_{i,j=\overline{1,s}} \not\equiv 0$. Действительно, на основании леммы можно выбрать ω_1 так, чтобы $v_1(\omega_1) \not\equiv 0$. Далее на основании леммы в силу $v_1(\omega_1) \not\equiv 0$ можно выбрать ω_2 так, чтобы

$$\det(v_j(\omega_i))_{i,j=1}^2 = v_1(\omega_1)v_2(\omega_2) - v_2(\omega_1)v_1(\omega_2) \not\equiv 0.$$

Продолжая данный процесс, выберем $\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_s$ так, что для $k = \overline{3,s}$ будем иметь

$$\det(v_j(\omega_i))_{i,j=\overline{1,k}} \not\equiv 0.$$

Теперь коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_s$ найдем из системы $\sum_{j=1}^s a_j(z)v_j(\omega_i) = -v_0(\omega_i)$, $i = \overline{1,s}$, в виде рациональных выражений от функций $v_j(\omega_i)$, принадлежащих, очевидно, полю Δ. Теорема доказана.

Следствие. *Если хотя бы один из коэффициентов системы (1) допускает в некоторой точке z^* соответственно неполярную, неалгебраическую или критическую особенности, то найдется частное решение системы (1), допускающее в точке z^* соответственно неполярную, неалгебраическую или критическую особенности.*

Данное утверждение для неполярной, неалгебраической, критической особенностей вытекает из теоремы, если в качестве Δ выбрать поле функций, мероморфно продолжимых вдоль некоторого замкнутого контура Γ, окружающего z^*, с началом и концом в точке z_0, достаточно близкой к точке z^*, и соответственно мероморфных внутри контура Γ, мероморфных внутри контура Γ, кроме точки z^*, и алгеброидных в точке z^*, однозначных на контуре Γ.

Несложно показать, что таких частных решений, удовлетворяющих условиям следствия, "большинство" в том смысле, что множество их начальных данных является всюду плотным открытым множеством в пространстве всех начальных данных, а его дополнение соответственно – нигде не плотным замкнутым множеством.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
15.11.2001 г.