ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 4, с. 472–481

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.41

КУБИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ С СЕМЬЮ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ЦИКЛАМИ

© 2003 г. А. П. Садовский

1. Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + \lambda y + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \tag{1}$$

где $\lambda, A, B, C, K, L, M, N$ – вещественные постоянные, $|\lambda| < 2$. Проблема центра и фокуса для системы (1) впервые была исследована в [1]. В работе [2] показано, что в [1] при $N \neq 0$ указаны не все случаи центра системы (1), и для этой системы приведены необходимые и достаточные условия центра алгебраического характера. Аналогичные необходимые и достаточные условия рассматривались в [3]. В [4, 5] на основе изучения фокусных величин проблема центра и фокуса решена в случае $N = 0$; при этом в [5] доказано существование при $N = 0$ кубических систем с пятью предельными циклами. На основе исследования фокусных величин решение проблемы центра и фокуса для системы (1) при $B = 0$ приведено в [6–8]. В [7, 8] при $B = 0$ доказано существование кубических систем с шестью предельными циклами. Обстоятельный анализ необходимых условий центра для системы (1) на основе исследования фокусных величин содержится в работе [9], в которой хотя и получены все случаи центра системы (1), однако необходимость этих условий до конца установлена не была. Проблема центра и фокуса для системы (1) на основе метода Л.А. Черкаса [10; 11, с. 70] разрешена в работе [12]. В настоящей работе на основе исследования фокусных величин приводится решение проблемы центра и фокуса для системы (1) при $BN \neq 0$; доказывается существование кубических систем нелинейных колебаний вида (1) с семью предельными циклами.

2. Для системы (1) при $\lambda = 0$ существует формальный ряд

$$V = x^2 + y^2 + \sum_{i+j=3}^{\infty} q_{i,j} x^i y^j, \tag{2}$$

производная которого в силу системы (1) имеет вид

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i (x^2 + y^2)^{i+1}. \tag{3}$$

При этом f_i являются фокусными величинами системы (1). Если в (2) $q_{0,2i} = 0$, $i = 2, 3, \ldots$, то функция V и фокусные величины f_i, $i = 1, 2, \ldots$, из (3) определяются единственным образом. Особая точка $O(0,0)$ системы (1) является центром тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$, $f_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, [11, с. 15; 13, с. 137].

Первая фокусная величина системы (1) имеет вид $f_1 = 3[B(A + C) + L + N]/4$. Фокусная величина f_2 состоит из 22, f_3 – из 80, f_4 – из 224, f_5 – из 536, f_6 – из 1440, f_7 – из 2224 слагаемых. Для вычисления фокусных величин используется система MATHEMATICA (программа для вычисления первых семи фокусных величин в системе MATHEMATICA-4.0 приводится в приложении). Заметим, что всюду ниже используется для вычислений эта система.

Будем далее считать, что $BN \neq 0$. В этом случае замена $X = Nx/B$, $Y = Ny/B$ приводит систему (1) к виду

$$\dot{X} = Y, \quad \dot{Y} = -X + \lambda Y + B(AX^2 + 3BXY + CY^2)/N + B^2(KX^3 + 3LX^2Y + MXY^2 + NY^3)/N^2,$$

т.е. можно считать в системе (1) $N = B$. Предположим теперь, что в системе (1)

$$\lambda = 0, \quad N = B, \quad B \neq 0. \tag{4}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $B > 0$, ибо при $B < 0$ замена $Y = -y$, $\tau = -t$ преобразует систему (1) к виду

$$dx/d\tau = Y, \quad dY/d\tau = -x - \lambda Y + Ax^2 - 3BxY + CY^2 + Kx^3 - 3Lx^2Y + MxY^2 - NY^3.$$

Положим $C = U - A$. Тогда с учетом соотношений (4) система (1) примет вид

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + (U - A)y^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + By^3, \tag{5}$$

где $B > 0$. Для системы (5) $f_1 = 3[B(U+1) + L]/4$. Из равенства $f_1 = 0$ имеем

$$L = -B(U+1), \tag{6}$$

т.е. особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром лишь при выполнении условия (6). Считая далее условие (6) для системы (5) выполненным, для системы (5) вычислим $f_2 = B[-6B^2 + K(A + 4U - 3) - M(A - 2U + 1) + U(2A + 3U)(A - U - 1)]/8$ и из равенства $f_2 = 0$ найдем

$$B^2 = [K(A + 4U - 3) - M(A - 2U + 1) + U(2A + 3U)(A - U - 1)]/8. \tag{7}$$

Будем считать в дальнейшем, что равенство (7) имеет место. С учетом условий (6), (7) $f_3 = BG_3/64$, где $G_3 = 3K^2(A + 4U + 4) + 12KM - M^2(A - 2U - 2) + K[A^2(6U + 5) + A(18U^2 + 25U - 4) + 36U^3 - 25U^2 - 43U + 3] + M[A^2(2U + 3) - 5AU(2U - 1) + (U + 1)(13U^2 - 16U + 1)] + U(A - U - 1)[2A^2(U + 1) + A(16U^2 + 29U - 2) + 3U(U + 1)(14U - 1)]$. С учетом равенства $f_3 = 0$ и условий (6), (7) f_k, $k = \overline{4,7}$, представляем в виде $f_k = \alpha_k B G_k$, где $\alpha_k \neq 0$, G_k – полиномы от K, M, A, U с целыми коэффициентами. При этом $\alpha_4 = 1/640$, $G_4 = 3K^2(175U^2 - 119U - 196 - 20M) - KM[2A^2(4U + 5) - A(U - 2)(52U - 17) + 89U^3 - 371U^2 - 49U + 528] + M^2[2A^2(2U + 1) - A(18U^2 + 35U - 34) + 2(U + 1)(7U^2 + 14U - 44) + 2K(2A - 7U - 10)] + K[2A^3(U + 2)(2U + 1) - A^2(38U^3 + 27U^2 - 10U + 182) - A(91U^4 - 977U^3 + 297U^2 + 1130U - 136) + 690U^5 - 455U^4 - 2442U^3 + 594U^2 + 1474U - 102] + M[-2A^3(4U^2 + 7U + 2) + A^2(66U^3 - 21U^2 - 22U - 106) - 3AU(58U^3 - 98U^2 - 175U + 86) + (U + 1)(131U^4 - 355U^3 - 534U^2 + 548U - 34)] + U(A - U - 1)[4A^3(U + 1)(U + 2) - 4A^2(11U^3 + 12U^2 - 12U + 17) - A(64U^4 - 335U^3 + 348U^2 + 994U - 68) + 3U(U + 1)(223U^3 + 24U^2 - 480U + 34)]$.

Если $A + 4U + 4 \neq 0$, то с учетом равенства $f_3 = 0$ получим $f_i = \beta_i B(A + 4U + 4)^{3-i} H_i$, $i = \overline{4,7}$, где $\beta_i \neq 0$, H_i – полиномы от K, M, A, U с целыми коэффициентами первой степени относительно K. В частности, $\beta_4 = 1/640$, $H_4 = P_4 K + Q_4$, где $P_4 = 2M^2[2A^2 + A(U - 2) - 4(7U^2 + 17U - 20)] + M[-2A^3(4U + 5) + A^2(20U^2 - 73U + 94) + A(119U^3 + 455U^2 + 201U - 472) - 4(89U^4 - 462U^3 + 230U^2 + 337U - 75)] + 2A^4(U + 2)(2U + 1) + A^3(-22U^3 + 29U^2 + 66U - 166) + A^2(-243U^4 - 333U^3 - 526U^2 - 47U + 388) + A(326U^5 - 61U^4 - 1955U^3 + 2089U^2 + 1922U - 342) + 2760U^6 - 5360U^5 - 2929U^4 + 4214U^3 - 2270U^2 - 2583U + 180$, $Q_4 = -20M^3(A - 2U - 2) + M^2[2A^3(2U + 1) + A^2(-2U^2 + 29U + 102) + A(-58U^3 - 195U^2 - 83U - 148) + 2(U + 1)(28U^3 + 39U^2 - 161U + 30)] + M[-2A^4(4U^2 + 7U + 2) + A^3(34U^3 - 69U^2 - 54U - 122) + A^2(90U^4 + 404U^3 + 566U^2 - 101U + 164) + A(-565U^5 + 2526U^4 + 202U^3 - 883U^2 + 502U - 34) + (U + 1)(524U^5 - 4011U^4 + 11U^3 + 585U^2 - 961U + 60)] + U(A - U - 1)[4A^4(U + 1)(U + 2) - 4A^3(7U^3 - 4U^2 - 32U + 9) + A^2(-240U^4 - 383U^3 - 460U^2 - 444U + 188) + A(413U^5 - 975U^4 - 4591U^3 + 231U^2 + 1844U - 120) + 3U(U + 1)(892U^4 - 1462U^3 + 17U^2 + 841U - 60)]$. Заметим, что H_5, H_6, H_7 состоят соответственно из 359, 785, 1454 слагаемых.

Если $A - 2U - 2 \neq 0$, то с учетом равенства $f_3 = 0$ величины f_i, $i = \overline{4,7}$, можно представить в виде $f_i = \beta_i (A - 2U - 2)^{3-i} Z_i$, где Z_i – полиномы от K, M, A, U с целыми коэффициентами первой степени относительно M, при этом $Z_4 = V_4 M + W_4$, где $V_4 = -12K^2(A + 4U + 10) + K[2A^3 - 9A^2(11U - 2) + A(-U^3 + 411U^2 - 357U - 184) - 2(U + 1)(2U^3 + 305U^2 - 272U + 10)] + 2A^4(U + 1) + A^3(6U^3 - 101U^2 - 13U + 4) - 2A^2(23U^4 - 302U^3 -$

$-18U^2+107U+25)+15AU(U+1)(7U^3-88U^2+28U+3)-10(U+1)^2(8U^4-85U^3+51U^2-34U+2)$, $W_4 = 6K^3(A+4U+4)(2A-7U-10)+K^2[2A^3(18U+13)+A^2(-18U^2-123U+10)+A(-282U^3-795U^2-1165U-352)-2(168U^4+374U^3-275U^2-466U-30)]+K[2A^4(U+1)(18U+7)+A^3(-54U^3-187U^2-11U-28)+A^2(-203U^4-333U^3-1390U^2-610U-70)+A(-56U^5-2691U^4-619U^3+1381U^2-105U+80)-2(U+1)(144U^5-1477U^4-576U^3+105U^2-460U+30)]+U(A-U-1)[12A^4(U+1)^2-2A^3(12U^3+19U^2-28U+10)+A^2(-68U^4-211U^3-753U^2-200U-40)+5A(U+1)(53U^4-232U^3+33U^2-124U+8)-30U(U+1)^2(25U^3-33U^2+30U-2)]$, Z_5, Z_6, Z_7 состоят соответственно из 359, 784, 1454 слагаемых.

3. Теорема 1. *Особая точка $O(0,0)$ системы (5) является центром тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующей серии условий:*

1) $L+B(U+1)=0$, $M(A-2U-2)-(A-U-1)[A(U+2)-(U+1)(U+3)]=0$, $K+(U+1)(A-U-1)=0$, $2B^2+M+(A-U-1)(A-U-2)=0$;

2) $L+B(U+1)=0$, $A^2+U(U+1)[A(U+5)+4U(U+1)]=0$, $M-A(U+3)-3U(U+1)=0$, $K+(U+1)[A+U(U+1)]=0$, $2B^2+6KU-U^3(A-2U-2)=0$.

Доказательство. Достаточность. При выполнении одного из серии условий 1), 2) замена $y=(1-Ax-Kx^2)Y/[1+(B+Lx)Y]$ и исключение времени [11] приводят систему (5) к уравнению

$$(1-Ax-Kx^2)YY' = -x+[U+(3B^2+A^2-AU+2K+M)x+ \\ +(6BL+AK-KU-AM)x^2+(3L^2-KM)x^3]Y^2. \tag{8}$$

Очевидно, что особая точка $O(0,0)$ уравнения (8) является центром. Достаточность доказана. Доказательство необходимости будет приведено ниже.

Замена $Y^2=v$ приводит уравнение (8) к линейному уравнению, для которого легко находится общий интеграл. Отсюда при выполнении условий 1) для системы (5) находим первый интеграл вида

$$y^2[1+(1-A+U)x-By]^{-2}[1+(1-A+U)x]^{-1}\exp[r(x)]+ \\ +\int_0^x 2\tau[1-(1+U)\tau][1+(1-A+U)\tau]^{-2}\exp[r(\tau)]\,d\tau, \tag{9}$$

где $r(x)=(3-A+U)x+(A-U-1)[A(U-1)-(U+1)(U-3)](A-2U-2)^{-1}x^2/2$. При выполнении условий 2) система (5) имеет первый интеграл

$$y^2[1-Ax+(U+1)(A+U(U+1))x^2-B(1-(1+U)x)y]^{-2}[1-Ax+(U+1)(A+U(U+1))x^2]^{-1}\exp[r(x)]+ \\ +\int_0^x 2\tau[1-A\tau+(U+1)(A+U(U+1))\tau^2]^{-2}\exp[r(\tau)]\,d\tau, \tag{10}$$

где $r(x)=-(A+2U)x+AUx^2/2$. Первые интегралы (9), (10) имеются в работах [9, 14]. Система (5) при выполнении условий 1) или 2) представляет собой частный случай обратимой системы CR_3^{10} из [15].

4. В дальнейшем через $R_x(P,Q)$ будем обозначать результант [16, с. 158] полиномов P,Q относительно x. Найдем все решения системы полиномиальных уравнений $f_k=0$, $k=\overline{1,6}$.

Пусть сначала $A=-4(U+1)$, $U+1\neq 0$. Тогда $R_M(G_3,Z_i)=\gamma_{1,i}(U+1)^{i-3}[K-5(U+1)^2]T_i$, $i=\overline{4,6}$, где $\gamma_{1,i}\neq 0$, T_i – полиномы от K,U $(2i-4)$-й степени относительно K. Если $K=5(U+1)^2$, то $G_3=D(U+1)(M+10U^2+4U+D)$, $Z_i=\gamma_{2,i}D(U+1)^{i-2}X_{1,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $\gamma_{2,i}\neq 0$, $D=6M+5(U+1)(5U+11)$, $X_{1,i}$ – взаимно простые полиномы от U с целыми коэффициентами $(3i-8)$-й степени. Пусть $D=0$. Тогда $M=-5(U+1)(5U+11)/6$. При $K=5(U+1)^2$, $M=-5(U+1)(5U+11)/6$, $A=-4(U+1)$ $f_2=-B[12B^2+125(U+1)^2]/16$, а значит, особая точка $O(0,0)$ – фокус системы (5). Если $K-5(U+1)^2\neq 0$, то особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром лишь при $T_i=0$, $i=\overline{4,6}$. В этом случае

$R_K(T_4, T_i) = \gamma_{3,i} U^{16}(U+1)^{3i-1}(5U-4)X_{2,i}$, $i = 5, 6$, где $\gamma_{3,i} \neq 0$, $X_{2,5}, X_{2,6}$ – взаимно простые полиномы от U соответственно 81-й, 116-й степени. Особая точка $O(0,0)$ может быть центром только при $U = 4/5$ или $U = 0$. Если $U = 4/5$, то $T_i = \gamma_{4,i}(125K - 1296)T_{1,i}$, $i = \overline{4,6}$, где $T_{1,i}$ – взаимно простые полиномы от K $(2i-5)$-й степени, $\gamma_{4,i} \neq 0$. Пусть $K = 1296/125$. Тогда $Z_i = \widetilde{\gamma}_{4,i}(576 + 25M)$, $i = \overline{4,6}$, где $\widetilde{\gamma}_{4,i} \neq 0$. При $U = 4/5$, $A = -36/5$, $K = 1296/125$, $M = -576/25$ $f_2 = -3B(3456 + 125B^2)/500$, т.е. особая точка $O(0,0)$ – фокус системы (5). Если $U = 0$, то $T_i = \gamma_{5,i} K(3K-8)^2 T_{2,i}$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{5,i} \neq 0$, $T_{2,i}$ – взаимно простые полиномы от K. Начало координат может быть центром при $K = 8/3$ или $K = 0$. Если $K = 8/3$, то $Z_i = \gamma_{6,i}(M+8)$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{6,i} \neq 0$. При $A = -4$, $U = 0$, $K = 8/3$, $M = -8$ $f_2 = -B(64 + 9B^2)/12$, а значит, особая точка $O(0,0)$ – фокус. Если $K = 0$, то $Z_i = \gamma_{7,i} M$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{7,i} \neq 0$. Тогда при $A = -4$, $U = 0$, $K = 0$, $M = 0$ $f_2 = -3B^2/4$ и особая точка $O(0,0)$ – фокус.

Пусть $A = 2(U+1)$, $U + 1 \neq 0$. Тогда $R_K(G_3, H_i) = \gamma_{8,i}(U+1)^i T_{3,i}$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{8,i} \neq 0$, $T_{3,i}$ – полиномы от M, U $(2i-3)$-й степени относительно M; $R_M(T_{3,4}, T_{3,i}) = \gamma_{9,i} U^{16}(U+1)^i(2+3U)X_{3,i}$, $i = 5, 6$, где $\gamma_{9,i} \neq 0$, $X_{3,5}, X_{3,6}$ – взаимно простые полиномы от U соответственно 94-й, 134-й степени. В этом случае особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром только при $U = -2/3$ или $U = 0$. Если $U = -2/3$, то $T_{3,i} = \gamma_{10,i}(9M - 8)T_{4,i}$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{10,i} \neq 0$, $T_{4,i}$ – взаимно простые полиномы от M $(2i-4)$-й степени. Пусть $M = 8/9$. Тогда $H_i = \gamma_{11,i}(27K + 4)$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{11,i} \neq 0$. При $U = -2/3$, $A = 2/3$, $K = -4/27$, $M = 8/9$ находим $f_2 = -B(27B^2 + 8)/36$, т.е. особая точка $O(0,0)$ системы (5) является фокусом. Если $U = 0$, то $T_{3,i} = \gamma_{12,i} M(M-4)^2 T_{5,i}$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{12,i} \neq 0$, $T_{5,i}$ – взаимно простые полиномы от M $(2i-6)$-й степени. Пусть $M = 4$, тогда $H_i = \gamma_{13,i}(4 + 3K)$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{13,i} \neq 0$. При $U = 0$, $A = 2$, $M = 4$, $K = -4/3$ $f_2 = -B(9B^2 + 16)$, т.е. особая точка $O(0,0)$ является фокусом. Пусть $M = 0$. В этом случае $H_i = \gamma_{14,i} K$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{14,i} \neq 0$. При $U = 0$, $A = 2$, $K = 0$, $M = 0$ $f_2 = -3B^2/4$; особая точка $O(0,0)$ – фокус системы (5).

Пусть теперь $U = -1$, $A = 0$. Тогда $f_3 = 3BK(4M-5)/64$. Если $M = 5/4$, то $f_i = \gamma_{15,i} BKT_{6,i}$, $i = \overline{4,6}$, где $\gamma_{15,i} \neq 0$, $T_{6,i}$ – взаимно простые полиномы от K $(i-3)$-й степени. При $A = 0$, $U = -1$, $K = 0$, $M = 5/4$ $f_2 = -3B(8B^2 + 5)/32$ и особая точка $O(0,0)$ для (5) будет фокусом. Если $K = 0$, то $f_2 = -3B(M + 2B^2)/8$. При $A = 0$, $U = -1$, $L = 0$, $K = 0$, $M = -2B^2$ выполняются условия 1) теоремы 1; начало координат в этом случае является центром. Итак, при $(A + 4U + 4)(A - 2U - 2) = 0$ особая точка $O(0,0)$ системы (5) является центром лишь в случае выполнения условий 1).

5. Будем, далее, предполагать, что

$$(A + 4U + 4)(A - 2U - 2) \neq 0. \tag{11}$$

В этом случае $R_K(G_3, H_i) = \mu_i(A + 4U + 4)^{i-3} C_1 D_i$, $i = \overline{4,7}$, где $\mu_4 = \mu_5 = \mu_7 = 1$, $\mu_6 = 3$, $C_1 = M(A - 2U - 2) - (A - U - 1)[A(U+2) - (U+1)(U+3)]$, D_i, $i = \overline{4,7}$, – полиномы от A, U, M, состоящие соответственно из 232, 763, 1765, 3384 слагаемых; $R_K(H_4, H_i) = -(A + 4U + 4)C_1 B_i$, $i = \overline{5,7}$, где B_i, $i = \overline{5,7}$, – полиномы от A, U, M, состоящие соответственно из 291, 594, 1043 слагаемых. Пусть $C_1 = 0$. Тогда

$$M = (A - U - 1)[A(U+2) - (U+1)(U+3)]/(A - 2U - 2). \tag{12}$$

Отсюда следует, что $G_3 = C_2 K_1/(A - 2U - 2)$, $H_i = C_2 A_i/(A - 2U - 2)^{i-2}$, $i = \overline{4,6}$, где $C_2 = K + (U+1)(A - U - 1)$, $K_1 = K[3A^2 + 6A(U+1) - 24(U+1)^2] + A^3(3U+2) + A^2(3U^2 + 9U + 7) + A(30U^3 - 45U^2 - 79U - 19) - 2(U+1)(48U^3 + 5U^2 - 31U - 3)$, $A_4 = 2A^4(-90U^4 - 9U^3 + 24U^2 + 8) + A^3(714U^5 + 1863U^4 + 684U^3 - 1164U^2 - 512U + 104) + A^2(2123U^6 - 10722U^5 - 12822U^4 + 4113U^3 + 6732U^2 + 948U - 224) - 2A(U+1)(5764U^6 - 12735U^5 - 14451U^4 + 6687U^3 + 5095U^2 - 388U + 96) + 4(U+1)^2(2924U^6 - 5718U^5 - 6171U^4 + 3192U^3 + 1594U^2 - 507U + 90)$, A_5, A_6 – полиномы от A, U соответственно 8-й, 12-й степени относительно A. Если $C_2 = 0$, то

$$K = -(U+1)(A - U - 1). \tag{13}$$

Учитывая формулы (12), (13), имеем $f_2 = 3B[-2B^2(A-2U-2)-(A-U-1)^3]/[8(A-2U-2)]$. При выполнении условий $L+B(U+1)=0$, $C_1=0$, $C_2=0$, $2B^2(A-2U-2)-(A-U-1)^3=0$ особая точка $O(0,0)$ системы (5) является центром, так как в этом случае выполняются условия 1) из теоремы 1. Если $C_1=0$, $C_2\neq 0$, то особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром при условии, что $A_i=0$, $i=\overline{4,6}$. Имеем $R_U(A_4,A_i)=\mu_{1,i}A^{7i-15}(2A-3)^6A_1^{i-3}A_2A_{1,i}$, $i=5,6$, где $\mu_{1,i}\neq 0$, $A_1=15A^3+155A^2+396A+240$, $A_2=19A^3+99A^2-63A+9$, $A_{1,5},A_{1,6}$ – взаимно простые полиномы от A соответственно 39-й, 64-й степени. Пусть $A_2=0$, тогда $A_i=(A+4U+3)A_{2,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $A_{2,i}$ – полиномы от A,U второй степени относительно A, причем $R_A(A_{2,4},A_{2,5})$, $R_A(A_{2,4},A_{2,6})$ – взаимно простые полиномы от U. Если $U=-(A+3)/4$, то из $G_3=0$ с учетом $G_2\neq 0$ находим $K=(14A^2-21A+3)/76$. Далее из выражения (12) получаем $M=-(A^2-42A+9)/16$. С учетом найденных значений U,K,M и $A_2=0$ имеем $f_2=-3B[304B^2+9(A+1)(21A-5)]/1216$. Если $L+B(U+1)=0$, $19A^3+99A^2-63A+9=0$, $A+4U+3=0$, $14A^2-21A+3-76K=0$, $A^2-42A+9+16M=0$, $304B^2+9(A+1)(21A-5)=0$, то выполняются условия 2) теоремы 1; начало координат системы (5) является центром.

Пусть $A=3/2$, тогда $A_i=UA_{3,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $A_{3,i}$ – взаимно простые полиномы от U. Если $U=0$, то из $G_3=0$ с учетом $C_2\neq 0$ получаем $K=0$. При $U=0$, $A=3/2$, $K=0$ из (12) находим $M=0$. В этом случае $f_2=-3B^3/4$, особая точка $O(0,0)$ является фокусом. Пусть теперь $A_1=0$. Тогда $A_i=(A+4U+4)A_{4,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $A_{4,i}$ – полиномы от A,U второй степени относительно A. Так как $R_A(A_{4,4},A_{4,5})$, $R_A(A_{4,4},A_{4,6})$ представляют собой взаимно простые полиномы от U, то из условия (11) заключаем, что центра в рассматриваемом случае быть не может. Если $A=0$, то $A_i=(U+1)^{i-2}A_{5,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $A_{5,i}$ – взаимно простые полиномы от U. Так как $U+1\neq 0$, то центр и в этом случае невозможен.

При выполнении неравенства (11) $R_M(G_3,Z_i)=(A-2U-2)^{i-3}C_2S_i$, $i=\overline{4,7}$, где S_i, $i=\overline{4,7}$ – полиномы от A,U,K, состоящие соответственно из 288, 882, 1964, 3683 слагаемых; $R_M(Z_4,Z_i)=3(A-2U-2)C_2X_i$, $i=\overline{5,7}$, где X_i, $i=\overline{5,7}$, – полиномы от A,U,K, состоящие соответственно из 356, 691, 1177 слагаемых. Пусть $C_2=0$, тогда с учетом (13) $G_3=-C_1M_1$, $Z_i=C_1B_{1,i}(A-2U-2)^{i-3}$, $i=\overline{4,6}$, где $M_1=M+5-A-4U-AU+6U^2$, $B_{1,4}=6A(U^3-{}$ ${}-2U^2+8U-4)-21U^4+47U^3-198U^2+144U-40$, $B_{1,i}$, $i=5,6$, – полиномы от A,U. Случай $C_1=0$ рассмотрен выше. Поэтому предположим, что $C_1\neq 0$. Если $U^3-2U^2+8U-4\neq 0$, то из $Z_4=0$ находим $A=(21U^4-47U^3+198U^2-144U+40)/[6(U^3-2U^2+8U-4)]$. Подставляя A в $B_{1,i}$, $i=5,6$, получаем $B_{1,i}=\mu_{2,i}(U^3-2U^2+8U-4)^{8-2i}B_{2,i}$, $i=5,6$, где $\mu_{2,5}=4$, $\mu_{2,6}=8/9$, $B_{2,5},B_{2,6}$ – взаимно простые полиномы от U соответственно 12-й, 21-й степени. Таким образом, новых случаев центра не находим. Если $U^3-2U^2+8U-4=0$, то из $B_{1,4}=0$ получаем $-21U^4+47U^3-198U^2+144U-40=0$, что невозможно. Итак, в случае выполнения неравенства (11) при $C_1C_2=0$ особая точка $O(0,0)$ системы (5) является центром только при выполнении условий 1) или 2).

6. Предположим теперь, что $C_1C_2\neq 0$. Тогда особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром, если $D_i=0$, $S_i=0$, $i=\overline{4,6}$, $B_i=0$, $X_i=0$, $i=5,6$. В этом случае $R_M(D_4,D_i)=\mu_{3,i}U^{16}HL_iK_i$, $i=5,6$, где $\mu_{3,i}\neq 0$, $H=A^2+U(U+1)[A(U+5)+4U(U+1)]$, L_i,K_i – полиномы от A,U. При этом L_5 – полином 23-й степени относительно A, который состоит из 390 слагаемых, L_6 – полином 37-й степени относительно A, состоящий из 1017 слагаемых; полиномы K_5,K_6 состоят соответственно из 2013, 3577 слагаемых. Далее в рассматриваемом случае находим $R_K(S_4,S_i)=\mu_{4,i}U^{16}HL_iM_i(A+4U+4)$, $i=5,6$, где $\mu_{4,i}\neq 0$, M_5,M_6 – полиномы от A,U, состоящие соответственно из 2819, 4831 слагаемых. Пусть $H=0$. Тогда $D_i=H_1M_{1,i}$, $i=\overline{4,6}$, $B_i=H_1M_{2,i}$, $i=5,6$, где $M_{1,i},M_{2,i}$ – полиномы от M,A,U первой степени относительно A, $H_1=M-A(U+3)-3U(U+1)$; $M_{1,4}$, $M_{1,5}$, $M_{1,6}$, $M_{2,5}$, $M_{2,6}$ состоят соответственно из 144, 377, 710, 174, 307 слагаемых. Предположим, что $H_1\neq 0$. Тогда особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром лишь при выполнении условий $M_{1,i}=0$, $i=\overline{4,6}$, $M_{2,i}=0$, $i=5,6$. В этом случае находим $R_M(M_{1,4},M_{1,i})=\mu_{5,i}U^{4i-3}(U+1)^{i-4}M_{3,i}$, $i=5,6$, $R_M(M_{1,4},M_{2,i})=\mu_{6,i}(U+1)^{3i-13}M_{4,i}$, $i=5,6$, где $\mu_{5,i}\neq 0$, $\mu_{6,i}\neq 0$, $M_{3,5}$, $M_{3,6}$, $M_{4,5}$, $M_{4,6}$ – полиномы от A,U первой степени относительно A, состоящие соответственно из 330, 476, 196, 272 слагаемых. Далее

$R_A(M_{4,5}, M_{3,5})$, $R_A(M_{4,5}, M_{4,6})$, $R_A(M_{4,5}, M_{3,6})$ представляют собой полиномы от U, наибольший общий делитель которых равен $U^2(U+1)$. Таким образом, в рассматриваемом случае особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром при $U=-1$ или $U=0$. Если $U=-1$, то из $H=0$ имеем $A=0$, а тогда $A+4U+4=0$, что ввиду условия (11) невозможно. Если $U=0$, то и $A=0$, а тогда $G_3=3K(1+4K+4M)+M(2M+1)$, $H_4=20(9K+3M+15KM+3M^2+8KM^2+2M^3)$, H_i, $i=5,6$, – полиномы от K, M. В данном случае $R_M(G_3,H_i)=\mu_{7,i}(K-1)K^iM_{5,i}$, где $\mu_{7,i}\neq 0$, $M_{5,i}$ – взаимно простые полиномы от K. Центр здесь возможен при $K=1$ или $K=0$. Если $K=1$, $A=0$, $U=0$, то $G_3=(5+M)(3+2M)$, $H_4=20(M+1)(M+3)(2M+3)$. При $A=0$, $U=0$, $K=1$, $M=-3/2$ $f_2=-3B(4B^2+1)/16$, т.е. особая точка $O(0,0)$ системы (5) является фокусом. При $A=0$, $U=0$, $K=0$ $G_3=M(2M+1)$, $H_4=20M(3+3M+2M^2)$. Если $A=0$, $U=0$, $K=0$, $M=0$, то $f_2=-3B^3/4$, следовательно, особая точка $O(0,0)$ системы (5) – фокус.

Предположим теперь, что $H_1=0$. Тогда $M=3(A+U)+U(A+3U)$. В этом случае $G_3=K_1[3K(A+4U+4)+A(-3U^4-23U^3-27U^2+20)-12U^5-44U^4-28U^3-33U^2-19U+3]$, $H_i=K_1Q_{1,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $K_1=K+(U+1)[A+U(U+1)]$, $Q_{1,i}$, $i=\overline{4,6}$, – полиномы от A, U первой степени относительно A. Пусть $K_1=0$, тогда $f_2=-3B[2B^2-AU(U^2+6U+6)-2U^2(U+1)(2U+3)]$. Если $H=0$, $H_1=0$, $K_1=0$, $2B^2-AU(U^2+6U+6)-2U^2(U+1)(2U+3)=0$, $L+B(U+1)=0$, то, очевидно, выполняются условия 2) теоремы 1; начало координат системы (5) – центр. Предположим, что $K_1\neq 0$. Тогда особая точка $O(0,0)$ может быть центром лишь при $Q_{1,i}=0$, $i=\overline{4,6}$. В этом случае $R_A(Q_{1,4},Q_{1,i})=U_0Q_{2,i}$, $i=5,6$, где $U_0=19U^3+18U^2-9U-9$, $Q_{2,5}$, $Q_{2,6}$ – взаимно простые полиномы от U. При $U_0=0$ $Q_{1,i}=(A+4U+3)Q_{3,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $Q_{3,i}$, $i=\overline{4,6}$, – взаимно простые полиномы от U. Из $Q_{1,i}=0$, $i=\overline{4,6}$, находим $A=-4U-3$. Тогда $M=-U^2-12U-9$, $G_3=3[K+(U+1)(A+U(U+1))][K-(U+1)(5U+4)]$. Из $G_3=0$ ввиду $K_1\neq 0$ имеем $K=(U+1)(5U+4)$ и далее находим $f_2=-3B(2B^2+24U^2+33U+11)/8$. При $A+4U+3=0$, $19U^3+18U^2-9U-9=0$, $K-(U+1)(5U+4)=0$, $M+U^2+12U+9=0$, $2B^2+24U^2+33U+11=0$, $L+B(U+1)=0$, заключаем, что особая точка $O(0,0)$ системы (5) является центром, ибо здесь выполняются условия 1) теоремы 1. Таким образом, при $C_1C_2\neq 0$, $H=0$ центр возможен лишь в случае выполнения условий 2).

7. Будем предполагать, что $C_1C_2H\neq 0$, $U=0$. Тогда $G_3=3K^2(A+4)+M^2(2-A)+12KM+K(5A^2-4A+3)+M(3A^2+1)$, $H_4=2[-10M^3(A-2)+2(A^2-A+40)KM^2+M^2(A^3+51A^2-74A+30)+KM(-5A^3+47A^2-236A+150)+M(-2A^4-61A^3+82A^2-17A+30)+K(2A-3)(A^3-40A^2+37A-30)]$. В этом случае $R_K(G_3,H_i)=\omega_iM(A+4)^{i-3}(2A-M)^2C_1P_{1,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $\omega_i\neq 0$, $P_{1,i}$ – полиномы от A, M. Пусть сначала $M=0$. Тогда $G_3=K(3-4A+5A^2+12K+3AK)$, $H_4=2K(2A-3)(A^3-40A^2+37A-30)$, $H_i=6(2A-3)KP_{2,i}$, $i=5,6$, где $P_{2,i}$ – взаимно простые полиномы от A. Если $K=0$, то $f_2=-3B^3/4$, значит, особая точка $O(0,0)$ – фокус. Предположим: $K\neq 0$. Тогда при $A=3/2$ $G_3=33K(2K+1)/4$. При $K=-1/2$, $A=3/2$, $M=0$, $U=0$ $f_2=-3B(8B^2-1)/32$. Если $2K+1=0$, $2A-3=0$, $M=0$, $U=0$, $8B^2-1=0$, $L+B=0$, то особая точка $O(0,0)$ системы (5) является центром, так как в этом случае выполняются условия 1).

Пусть $M\neq 0$, $M=2A$, тогда $G_3=(2A+3K)[A^2+4A+1+K(A+4)]$, $H_4=2(2A+3K)(A+1)(A+3)(A+10)$, $H_5=-2(A+1)(A+3)(2A+3K)P_{3,5}$, $H_6=2(A+1)(A+3)(2A+3K)P_{3,6}$, где $P_{3,5}$, $P_{3,6}$ – взаимно простые полиномы от A. Если $2A+3K=0$, то при $M=2A$, $U=0$ $f_2=-B(4A^2+9B^2)/12$, т.е. особая точка $O(0,0)$ – фокус. Пусть $2A+3K\neq 0$, $A=-1$, тогда из $G_3=0$ находим $K=2/3$; нового случая центра не получаем. В случае $A=-3$ из $G_3=0$ имеем $K=2$, т.е. и здесь не найдем нового случая центра.

При $M(M-2A)\neq 0$ особая точка $O(0,0)$ может быть центром, если $P_{1,i}=0$, $i=\overline{4,6}$. Имеем $R_M(P_{1,4},P_{1,i})=\omega_{1,i}A^{2i-6}(A+1)^4(A+10)^2P_{4,i}$, $i=5,6$, где $\omega_{1,i}\neq 0$, $P_{4,5}, P_{4,6}$ – взаимно простые полиномы от A соответственно 18-й, 22-й степени. Пусть $A=0$, тогда $R_K(G_3,H_i)=\omega_{2,i}M^i(2M+3)P_{5,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $\omega_{2,i}\neq 0$, $P_{5,i}$, $i=\overline{4,6}$, – взаимно простые полиномы от M. При $M=0$ из $H_4=0$ имеем $K=0$. Отсюда находим $f_2=-3B^3/4$, т.е. особая точка $O(0,0)$ – фокус. Пусть $M=-3/2$, тогда $G_3=3(K-1)(4K-1)$, $H_i=\omega_{3,i}(K-1)$, $i=\overline{4,6}$, где $\omega_{3,i}\neq 0$. При $K=1$, $M=-3/2$ $f_2=-3(4B^2+1)/16$, значит, особая точка $O(0,0)$ – фокус. Предположим: $A=-1$, тогда $G_3=(3K+M)(3K+3M+4)$, $H_4=4(2+M)(135K+47M+42KM+15M^2)$. Пусть $M=-2$, тогда из $G_3=0$ имеем $(3K-2)^2=0$, нового случая центра не получаем. Пусть $M+2\neq 0$, но $3K+M=0$, тогда $K=-M/3$. Из равенства $H_4=0$ имеем $M(2+M)=0$. При $M=K=0$ $f_2=-3B^3/4$, т.е. особая точка $O(0,0)$ – фокус. Пусть $M+2\neq 0$, $3K+3M+4=0$, тогда $K=-(3M+4)/3$. Из равенства $H_4=0$ имеем $M=-10/3$. При $A=-1$, $U=0$, $M=-10/3$, $K=2$ величина $f_2=-B(4+3B^2)/4$, т.е. особая точка $O(0,0)$ – фокус. Пусть $A=-10$, тогда $R_M(G_3,H_i)= =\omega_{4,i}K(K-11)(3K-20)^3P_{6,i}$, $i=\overline{4,6}$, где $\omega_{4,i}\neq 0$, $P_{6,i}$ – взаимно простые полиномы от K. Если $K=11$, то $G_3=(15+M)(253+12M)$, $H_4=20(M+20)(M+27)(253+12M)$. При $A=-10$, $U=0$, $K=11$, $M=-253/12$ величина $f_2=-B(1331+24B^2)$, значит, особая точка $O(0,0)$ – фокус. Если $K=0$, то $G_3=M(301+12M)$, $H_4=20M(M+20)(247+12M)$. Центр возможен лишь при $M=0$. Если $M=0$, то $f_2=-3B^3/4$, т.е. особая точка $O(0,0)$ – фокус. При $K=20/3$ $G_3=3(20+M)(47+4M)$, $H_4=60(20+M)^2(69+4M)$. В этом случае центр возможен лишь при $M=-20$. Если $A=-10$, $U=0$, $K=20/3$, $M=-20$, то $f_2=-B(400+9B^2)/12$ и особая точка $O(0,0)$ – фокус. Таким образом, при $U=0$ новых случаев центра не получаем.

8. Пусть $UC_1C_2H\neq 0$. В этом случае особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром, если $L_iK_i=0$, $L_iM_i=0$, $i=5,6$. Имеем $R_M(D_4,B_i)=\lambda_iU^{16}H(A+4U+4)^{4i-16}P_1^2L_i$, $R_K(S_4,X_i)=\lambda_{1,i}U^{16}H(A+4U+4)(A-2U-2)^{5i-20}Q_1^2L_i$, $i=5,6$, где $\lambda_i\neq 0$, $\lambda_{1,i}\neq 0$, $i=5,6$, $\widetilde{P_1}$, Q_1 – полиномы от A,U, состоящие соответственно из 88, 155 слагаемых. Заметим, что $R_M(P_4,Q_4)=P_{1,1}P_1$, $R_K(V_4,W_4)=Q_{1,1}Q_1$, где $P_{1,1},Q_{1,1}$ – полиномы от A,U. Пусть $L_5\neq 0$. Тогда особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром, если $P_1=0$, $Q_1=0$, $K_5=0$. В этом случае $R_A(P_1,K_5)=\lambda_{2,1}U^{49}E_1$, где $\lambda_{2,1}\neq 0$, E_1 – полином от U 625-й степени, коэффициенты которого представляют собой взаимно простые целые числа порядка $10^{397}-10^{598}$; $R_A(P_1,Q_1)=\lambda_{2,2}U^4E_2$, где $\lambda_{2,2}\neq 0$, E_2 – полином от U 187-й степени. Так как E_1, E_2 – взаимно простые полиномы, то новых случаев центра не получаем. Предположим, что $L_6\neq 0$, тогда особая точка $O(0,0)$ может быть центром, если $P_1=0$, $Q_1=0$, $K_6=0$. В этом случае $R_A(P_1,K_6)=\lambda_{2,3}U^{49}E_3$, где $\lambda_{2,3}\neq 0$, E_3 – полином от U 866-й степени, коэффициенты которого – взаимно простые целые числа порядка $10^{708}-10^{985}$. И в этом случае мы не получим нового случая центра ввиду того, что полиномы E_2,E_3 взаимно простые. Таким образом, в рассматриваемом случае особая точка $O(0,0)$ системы (5) может быть центром, если $L_i=0$, $i=5,6$. В этом случае $R_M(D_4,PB_5+B_6)=\mu_0U^{16}(A+4U+4)^4HW_1^2[(-200- -120A-24A^2+4A^3+720U-132AU-12A^2U+756U^2-63AU^2+196U^3)L_5P^5+12W_1P^4-24(A+ +4U+4)W_2P^3+32(A+4U+4)^2W_3P^2-384(A+4U+4)^3W_4P+4608(A+4U+4)^4L_6]$, где W_i – полиномы от A,U. При этом W_i, $i=\overline{1,4}$, – полиномы $(2i+27)$-й степени относительно A, состоящие соответственно из 626, 723, 826, 920 слагаемых. Таким образом, особая точка $O(0,0)$ в этом случае может быть центром, если $W_i=0$, $i=\overline{1,4}$, $L_i=0$, $i=5,6$. Имеем $R_A(L_5,W_i)=\mu_{0,i}U^{n_i}(U-2)^{24}(3U-19)TP_{0,i}$, $i=\overline{1,4}$, где $\mu_{0,i}\neq 0$, $n_1=n_2=177$, $n_3=189$, $n_4=202$, T – полином от U 92-й степени, коэффициенты которого представляют собой взаимно простые целые числа порядка $10^{105}-10^{137}$, $P_{0,i}$, $i=\overline{1,4}$, – взаимно простые полиномы от U соответственно 713-й, 796-й, 867-й, 937-й степени, коэффициенты которых – взаимно простые целые числа соответственно порядков $10^{577}-10^{827}$, $10^{702}-10^{975}$, $10^{813}-10^{1114}$, $10^{937}-10^{1240}$. Пусть $R_A(L_5,L_6)=\mu_{0,5}U^{226}(U-2)^{24}(3U-19)TP_{0,5}$, где $\mu_{0,5}\neq 0$, $P_{0,5}$ – полином от U 996-й степени, коэффициенты которого – взаимно простые целые числа порядка $10^{994}-10^{1340}$. При $U=2$ или $U=19/3$ система $W_i=0$, $i=\overline{1,4}$, $L_i=0$, $i=5,6$ решений не имеет. Полином T имеет 16 вещественных корней. В данном случае $R_U(L_5,W_i)=\lambda_{0,i}A^{m_i}(A+1)(A+10)(9A+1)^4T_0T_1Q_{0,i}$, $i=\overline{1,4}$, где $\lambda_{0,i}\neq 0$, $m_1=m_2=168$, $m_3=180$, $m_4=193$, $T_0=19A^3-2199A^2+10998A-65840$, T_1 – полином от A 92-й степени, коэффициенты которого представляют собой взаимно простые целые числа порядка $10^{122}-10^{200}$; $Q_{0,i}$, $i=\overline{1,4}$, – взаимно простые полиномы от A соответственно 713-й, 796-й, 867-й, 937-й степени, коэффициенты которых – взаимно простые целые числа соответственно порядков $10^{636}-10^{1265}$, $10^{786}-10^{1474}$, $10^{939}-10^{1667}$, $10^{1058}-10^{1839}$. Для полиномов L_5,L_6 $R_U(L_5,L_6)=\lambda_{0,5}A^{217}(A+1)(A+10)(9A+1)^4T_0T_1Q_{0,5}$, где $\lambda_{0,5}\neq 0$, $Q_{0,5}$ – полином от A

996-й степени, коэффициенты которого – взаимно простые целые числа порядка $10^{1127}-10^{1990}$. При $(A+1)(A+10)(9A+1)T_0=0$ система $L_i=0$, $i=5,6$, $P_i=0$, $i=\overline{1,4}$, неразрешима. Полином T_1, так же как и полином T, имеет 16 вещественных корней. Введем вектор $p(U,A)$. Система уравнений $L_i=0$, $i=5,6$, $W_i=0$, $i=\overline{1,4}$, имеет 16 вещественных решений $p=p_k$, $k=\overline{1,16}$, где

$$p_1=(-1.1059822\ldots,-2.8571172\ldots),\quad p_2=(-0.57087600\ldots,-1.9227846\ldots),$$

$$p_3=(-0.33915130\ldots,-1.0036751\ldots),\quad p_4=(0.16907998\ldots,-0.90066860\ldots),$$

$$p_5=(0.95139396\ldots,3.4630203\ldots),\quad p_6=(3.2122132\ldots,25.668225\ldots),$$

$$p_7=(10.1845651\ldots,28.681770\ldots),\quad p_8=(-8.1661358\ldots,-49.714975\ldots),$$

$$p_9=(-3.6039976\ldots,-15.851157\ldots),\quad p_{10}=(-2.7147748\ldots,-2.32695551\ldots),$$

$$p_{11}=(-1.0960753\ldots,-5.8793642\ldots),\quad p_{12}=(-1.0062629\ldots,-5.4853584\ldots),$$

$$p_{13}=(0.0043602693\ldots,-3.8878796\ldots),\quad p_{14}=(0.37195097\ldots,-0.97150836\ldots),$$

$$p_{15}=(1.6111273\ldots,11.033083\ldots),\quad p_{16}=(28.661144\ldots,44.864093\ldots).$$

Других вещественных решений эта система не имеет. Из системы уравнений $B_4=0$, $B_5=0$ находим $M=\widetilde{M}_1/\widetilde{M}_2$, где $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$ – полиномы от A,U, состоящие соответственно из 1178, 1101 слагаемых. Из системы уравнений $X_4=0$, $X_5=0$ получаем $K=\widetilde{K}_1/\widetilde{K}_2$, где $\widetilde{K}_1$, $\widetilde{K}_2$ – полиномы от A,U, состоящие соответственно из 1517, 1430 слагаемых. Подставляя найденные значения $p=p_k$, $k=\overline{1,16}$, в $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2$ и $\widetilde{K}_1$, $\widetilde{K}_2$, находим соответственно $M=M_k$, $K=K_k$, $k=\overline{1,16}$. Далее из $f_2=0$ получаем значения $B=B_k$, $k=\overline{1,16}$. При $k=\overline{1,7}$ B_K – вещественные числа, значения же B_k, $k=\overline{8,16}$, являются комплексными. Положим $r=(A,B,C,K,L,M)$. В результате найдем 7 вещественных решений $r=r_k$, системы уравнений $f_k=0$, $k=\overline{1,6}$, где

$$r_1=(-2.857117\ldots,3.5831666\ldots,1.7511350\ldots,-11.614467\ldots,0.379752141\ldots,41.967634\ldots),$$

$$r_2=(-1.9227846\ldots,1.0200748\ldots,1.3519086\ldots,-2.0142782\ldots,-0.43773857\ldots,3.6966759\ldots),$$

$$r_3=(-1.003675\ldots,0.1846451\ldots,0.6645238\ldots,-0.3687020\ldots,-0.1220224\ldots,0.09517011\ldots),$$

$$r_4=(-0.9006686\ldots,0.1601599\ldots,1.069748\ldots,0.084675897\ldots,-0.1872397\ldots,-0.1086195\ldots),$$

$$r_5=(3.4630203\ldots,0.1687596\ldots,-2.511626\ldots,-2.992901\ldots,-0.3293165\ldots,0.4371017\ldots),$$

$$r_6=(25.66822\ldots,18.55193\ldots,-22.45601\ldots,-60.55710\ldots,-78.14469\ldots,-0.6674931\ldots),$$

$$r_7=(28.68177\ldots,48.259948\ldots,-18.49720\ldots,-133.5905\ldots,-539.7665\ldots,-771.0213\ldots).$$

Для указанных выше $r_k=(A_k,B_k,C_k,K_k,L_k,M_k)$, $k=\overline{1,7}$, A_k – корни полинома T_1, $U_k=A_k+C_k$ – корни полинома T, $M_k=\widetilde{M}_1/\widetilde{M}_2|_{A=A_k,U=U_k}$, $K_k=\widetilde{K}_1/\widetilde{K}_2|_{A=A_k,U=U_k}$, $B_k=$ $=([K_k(A_k+4U_k-3)-M_k(A_k-2U_k+1)+U_k(2A_k+3U_k)(A_k-U_k-1)]/6)^{1/2}$, $L_k=-B_k(U_k+1)$. Покажем, что $f_7|_{r=r_k}\neq 0$, $k=\overline{1,7}$. Имеем $R_M(D_4,PB_5+B_7)=\widetilde{\mu}_0U^{16}(A+4U+4)^4HP_1^2[(-200-$ $-120A-24A^2+4A^3+720U-132AU-12A^2U+756U^2-63AU^2+196U^3)^2L_5P^5+10\widetilde{W}_1P^4+$ $+25(A+4U+4)^2\widetilde{W}_2P^3+250(A+4U+4)^4\widetilde{W}_3P^2+2500(A+4U+4)^6\widetilde{W}_4P+25000(A+4U+4)^8\widetilde{W}_5]$, где $\widetilde{\mu}_0\neq 0$, $\widetilde{W}_i$, $i=\overline{1,5}$, – полиномы от A,U, и в этом случае $\widetilde{W}_i$, $i=\overline{1,5}$, – полиномы $(4i+31)$-й степени относительно A, состоящие соответственно из 910, 1149, 1414, 1666, 1928 слагаемых. Далее находим $R_A(L_5,\widetilde{W}_i)=\widetilde{\mu}_{0,i}U^{200}(U-2)^{24}(3U-19)T_2\widetilde{P}_{0,i}$, $i=1,2$, где $\widetilde{\mu}_{0,i}\neq 0$, T_2 – полином от U 156-й степени, коэффициенты которого представляют собой взаимно простые целые числа порядка $10^{220}-10^{274}$, $\widetilde{P}_{0,i}$, $i=1,2$, – взаимно простые полиномы от U соответственно 821-й, 987-й степени, коэффициенты которых – взаимно простые целые числа порядков $10^{648}-10^{931}$, $10^{908}-10^{1223}$. Так как T, T_2 – взаимно простые полиномы от U, то $f_7|_{r=r_k} \neq 0$, $k=\overline{1,7}$.

Непосредственные вычисления дают $f_7|_{r=r_k} = f_{7,k}$, $k=\overline{1,7}$, где $f_{7,1} = -8945.54\ldots$, $f_{7,2} = 8.14740\ldots\cdot 10^{-3}$, $f_{7,3} = 8.30065\ldots\cdot 10^{-9}$, $f_{7,4} = -1.31122\ldots\cdot 10^{-6}$, $f_{7,5} = -9.08501\ldots\times$ $\times 10^{-5}$, $f_{7,6} = 2.90300\ldots\cdot 10^{8}$, $f_{7,7} = 2.82068\ldots\cdot 10^{13}$. Таким образом, при $r=r_k$, $k=\overline{1,7}$, $f_k = 0$, $k=\overline{1,6}$, но $f_7 \neq 0$.

9. Продолжим доказательство теоремы 1.

Необходимость. Анализ исследования фокусных величин системы (5), проведенный в пп. 4–8, показывает, что особая точка $O(0,0)$ системы (5) является центром лишь при выполнении одного из серии условий 1), 2) теоремы 1. Других случаев центра система (5) не имеет. Теорема 1 доказана полностью.

Из результатов п. 8 вытекает

Теорема 2. *При любых $r=r_k$, $k=\overline{1,7}$, особая точка $O(0,0)$ системы (1), где $\lambda=0$, $N=B$, $B>0$, является фокусом седьмого порядка. В случаях $r=r_1$, $r=r_4$, $r=r_5$ особая точка $O(0,0)$ – устойчивый фокус, в остальных четырех случаях особая точка $O(0,0)$ будет неустойчивым фокусом.*

10. Теорема 3. *Для любых $\varepsilon, \delta > 0$, $k=\overline{1,7}$, существуют $r \in U_\delta(r_k)$ и $\lambda \in U_\delta(0)$, где $U_\delta(r_k)$ – δ-окрестность r_k, $U_\delta(0)$ – δ-окрестность нуля, при которых система (1) имеет в ε-окрестности точки $O(0,0)$ семь предельных циклов.*

Доказательство. Пусть $N=B$. Положим $v=(\lambda,r)=(\lambda,A,B,C,K,L,M)$. Обозначим $v_k=(0,r_k)$, $k=\overline{1,7}$. Для системы (1) существует единственный полином $W=(1+\lambda^2/2)x^2-$ $-\lambda xy+y^2+\sum_{i+j=3}^{16} P_{i,j}x^iy^j$, где $P_{0,2k}=0$, $k=\overline{2,8}$, для которого в силу системы (1) $\dot W=\sum_{i=0}^{7}\widetilde f_i(v)(x^2+y^2)^{i+1}+p_{17}(x,y)+p_{18}(x,y)$, где $\widetilde f_0(v)=\lambda$, $\widetilde f_i(v)|_{\lambda=0}=f_i$, $i=\overline{1,7}$, p_i, $i=17,18$, – однородные полиномы i-й степени. Образуем $f(v)=(\widetilde f_0(v),\widetilde f_1(v),\ldots,\widetilde f_6(v))$. Имеем $\det\partial f(v_k)/\partial v=\gamma_k$, $k=\overline{1,7}$, где $\gamma_1=8.52228\ldots\cdot 10^{10}$, $\gamma_2=-1.70835\ldots\cdot 10^{-3}$, $\gamma_3=3.55867\ldots\cdot 10^{-18}$, $\gamma_4=1.28546\ldots\cdot 10^{-15}$, $\gamma_5=-1.37828\ldots\cdot 10^{-9}$, $\gamma_6=4.01087\ldots\cdot 10^{21}$, $\gamma_7=-1.63859\ldots\cdot 10^{33}$. Введем векторы $z_k=(z_{k,0},z_{k,1},\ldots,z_{k,6})$, $k=\overline{1,7}$. Так как $f(v_k)=0$, $\gamma_k\neq 0$, $k=\overline{1,7}$, то на основании теоремы об обратной функции [17, с. 29] равенство $f(v)=z_k$ определяет единственную аналитическую в окрестности нуля функцию $v=f^{-1}(z_k)$, для которой $f^{-1}(0)=v_k$. Для любого $\delta>0$ выберем z_k такое, что $v=f^{-1}(z_k)\in U_\delta(v_k)$. Для таких v

$$\dot W=\sum_{i=0}^{7} z_{k,i}(x^2+y^2)^{i+1}+p_{17}(x,y)+p_{18}(x,y), \tag{14}$$

где $z_{k,7}=\widetilde f_k(v)$, причем $\widetilde f_k(v_k)=f_{7,k}\neq 0$, $k=\overline{1,7}$. Положим $z_{k,i}=(-1)^{i+1}\cdot 2^{-(4m)^{7-i}}|f_{7,k}|/f_{7,k}$, $i=\overline{0,6}$, где m – достаточно большое положительное число. Для любого $\varepsilon>0$ будем считать m выбранным таким, что $f^{-1}(z_k)\in U_\delta(v_k)$, $2^{-m}<\varepsilon$. Рассмотрим систему замкнутых кривых L_j :

$$W(x,y)=2^{-m^{8-j}}[(1+\lambda^2/2)x^2-\lambda xy+y^2]/(x^2+y^2), \tag{15}$$

$j=\overline{0,7}$, где $\lambda=2^{-(4m)^7}$. При достаточно больших m $G_j\subset G_{j+1}$, $j=\overline{0,6}$, где G_j – область с границей L_j. В полярных координатах $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ уравнение (15) принимает вид

$$r\left[1+\frac{1}{1+\lambda^2(\cos^2\varphi)/2-\lambda\cos\varphi\sin\varphi}\sum_{i+j=3}^{16} p_{i,j}\cos^i\varphi\sin^i\varphi r^{i+j-2}\right]^{1/2}=2^{-m^{8-j}/2}.$$

Отсюда на основании теоремы о неявной функции находим

$$r=r_j=C+\sum_{k=2}^{\infty}U_k(\varphi)C_j^k,\quad j=\overline{0,7}, \tag{16}$$

где $C=2^{-m^{8-j}/2}$. Правая часть уравнения (16) – аналитическая относительно C в окрестности $C_j=0$ функция при $\varphi\in[0,2\pi]$. Из (14), (16) с учетом выбранных $z_{k,i}$, $i=\overline{0,6}$, следует, что вдоль кривых L_j, $j = \overline{0,6}$, в силу системы (1)

$$\dot{W} = (-1)^{j+1} \cdot 2^{-(4m)^{7-j}} C_j^{2(j+1)} |f_{7,k}| f_{7,k}^{-1} [1 + o(C_j)], \tag{17}$$

а вдоль кривой L_7 $\dot{W} = f_{7,k} C_7^{16}[1 + o(C_7)]$. Отсюда и из (17) на основании принципа кольца [18, с. 231] заключаем, что внутри области G_7 система (1) при $v = f^{-1}(z_k)$ имеет семь предельных циклов. Теорема доказана.

Результаты, содержащиеся в пп. 4–10, могут быть получены с помощью первых шести фокусных величин системы (1), которые приведены в работе [18].

Приложение. Программа для вычисления фокусных величин системы (1) в системе MATHEMATICA-4.0.

```
{z1, z2}={y,-x+a*x^2+3*b*x*y+c*y^2+k*x^3+3*l*x^2*y+m*x*y^2+n*y^3};
x^2+y^2+Sum[Sum[p[j,i-j]*x^j*y^(i-j),{j,0,i}],{i,3,16}];
D[%,x]*z1+D[%,y]*z2-Sum[f[i-1](x^2+y^2)^2,{i,2,8}];
CoefficientList[%/.{x->x*s,y->y*s},s];
Do[w[i]=%[[i+1]],{i,3,16}]
Do[w[i]=CoefficientList[w[i],y]/.x->1,{i,3,16}]
Do[t[2*i+1]=Solve[Table[w[2*i+1][[j]]==0,{j,1,2*i+2}],
Table[p[j,2*i+1-j],{j,0,2*i+1}]][[1]],{i,1,7}]
Do[t[2*i+2]=Solve[Table[w[2*i+2][[j]]==0,{j,1,2*i+3}],
Union[Table[p[j,2*i+2-j],{j,1,2*i+2}],{g[i]}]][[1]],{i,1,7}]
Do[p[0,2*j]=0,{j,2,8}]
Do[Do[f[i]=Expand[f[i]/.t[2*i+3-j]],{j,1,2*i}],{i,1,7}]
Do[f[i]=Factor[f[i]],{i,1,7}]
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куклес И.С.* // Докл. АН СССР. 1944. Т. 42. № 5. С. 208–211.
2. *Черкас Л.А.* // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 1594–1600.
3. *Садовский А.П.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 9. С. 1716–1719.
4. *Jin X., Wang D.* // Bull. London Math. Soc. 1990. V. 22. № 1. P. 1–4.
5. *Christopher C.J., Lloyd N.G.* // Bull. London Math. Soc. 1990. V. 22. № 1. P. 5–12.
6. *Шубэ А.С.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 4. С. 728–730.
7. *Lloyd N.G., Pearson J.Y.* // Lecture Notes in Math. Bifurcations of Planar vector fields. New York, 1990. V. 1455. P. 230–242.
8. *Садовский А.П.* // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 2. С. 226–231.
9. *Lloyd N.G., Pearson J.M.* // J. Comp & Appl. Math. 1992. V. 40. № 2. P. 323–336.
10. *Черкас Л.А.* // Докл. АН БССР. 1978. Т. 22. № 11. С. 969–970.
11. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, 1982.
12. *Садовский А.П.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 236–244.
13. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М., 1966.
14. *Christopher C.J.* // Proc. Roy. Sol. Edinburgh. Sect. A. 1994. V. 124. № 6. P. 1209–1229.
15. *Zoladek H.* // Topological methods in nonlinear analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center. 1994. V. 4. № 1. P. 79–136.
16. *Ленг С.* Алгебра. М., 1968.
17. *Ганнинг Р., Росси Х.* Аналитические функции многих комплексных переменных. М., 1969.
18. *Андронов А.А., Леонтонович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., 1967.
19. *Садовский А.П.* // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 7. С. 1122–1127.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
12.07.2001 г.