ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 4, с. 465–471

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.5

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ И С ОТРАЖЕНИЕМ ОТ ГРАНИЦЫ

© 2003 г. А. А. Леваков

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau + \int\limits_0^t g(\tau, x(\tau))\, dW(\tau) + K(t) \tag{1}$$

в области D с отражением от границы; здесь $x_0 \in \bar{D}$; $x(t)$ – отраженный процесс на $\bar{D}$; K – процесс с ограниченной вариацией, причем вариация $|K|$ возрастает лишь когда $x(t) \in \partial D$; W – процесс броуновского движения; $f : R_+ \times R^d \to R^d$, $g : R_+ \times R^d \to R^{d\times d}$ – измеримые ограниченные функции. В работе [1] доказана теорема существования слабых решений уравнения (1) при предположениях, что область D удовлетворяет условиям Лионса–Шнитмана (условия A) и B), приведенные ниже), и при условии, что на множестве H, на котором отображение g в определенном смысле вырождено и хотя бы одно из отображений f и g разрывно, выполняются равенства $g(t,x) = 0$, $f(t,x) = 0$, $(t,x) \in H$. Мы же доказываем теорему существования лишь при предположении, что функции f и g измеримы и ограничены, но под слабыми решениями уравнения (1) понимаем решения некоторого стохастического дифференциального включения, соответствующего уравнению (1).

Будем использовать следующие обозначения и определения: $R^{d\times r}$ – пространство действительных $d\times r$-матриц с евклидовой нормой $\|\cdot\|$; $R^{d\times 1} = R^d$; $R_+ = [0, +\infty[$; $\mathcal{R}$ – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств из R_+; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в R^d; $\Omega = [0,1[$; $\operatorname{conv}(R^{d\times r})$ – метрическое пространство непустых выпуклых компактных подмножеств из $R^{d\times r}$ с метрикой $\varkappa(A,B) = \max\{\beta(A,B), \beta(B,A)\}$, $\beta(A,B) = \sup\limits_{a\in A}\inf\limits_{b\in B}\|a-b\|$; $[B]_\alpha = \{x \in R^{d\times r} |\inf\limits_{y\in B}\|y-x\| \le \alpha\}$ – α-окрестность множества $B \subset R^{d\times r}$; $B(x_0,\delta) = \{x \in R^d | \|x - x_0\| \le \delta\}$; $\bar{D} = D\bigcup\partial D$, где ∂D – граница множества D; μ – мера Лебега на R_+; $C(R_+, R^{d\times r})$ – пространство непрерывных функций $a : R_+ \to R^{d\times r}$ с метрикой $\rho(a_1,a_2) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}(\max\limits_{0\le t\le k}\|a_1(t)-a_2(t)\|^2 \wedge 1)$, $b_1\wedge b_2 = \min\{b_1,b_2\}$, $b_1\vee b_2 = \max\{b_1,b_2\}$; $1_H(y) = 1$, если $y \in H$, и $1_H(y) = 0$, если $y \notin H$; $\mathcal{B}(S)$ – топологическая σ-алгебра на топологическом пространстве S; $\mathcal{B}_t(C(R_+, R^{d\times r}))$ – под-σ-алгебра $\mathcal{B}(C(R_+, R^{d\times r}))$, порожденная $a(s)$, $0 \le s \le t$ [2, с. 150]; $|k|_t$ – вариация отображения $k: R_+ \to R^d$ на $[0,t]$; если $a \in R^{d\times d}$ – симметрическая неотрицательная матрица, то существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_{11},\ldots,\lambda_{dd})$, $0 \le \lambda_{11} \le \ldots \le \lambda_{dd}$ такие, что $a = T\Lambda T^*$, через $a^{1/2}$ обозначаем неотрицательную симметрическую матрицу $T\sqrt{\Lambda}T^*$, $\sqrt{\Lambda} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_{11}},\ldots,\sqrt{\lambda_{dd}})$, $*$ – знак транспонирования; если $(\mathcal{A},\Sigma,\theta)$ – измеримое пространство с σ-аддитивной конечной мерой θ, то $\mathcal{L}_i(\mathcal{A}, R^{d\times r})$ – пространство классов эквивалентности i-интегрируемых отображений $z: \mathcal{A} \to R^{d\times r}$ с нормой $(\int_{\mathcal{A}}\|z(\tau)\|^i d\theta)^{1/i}$; P^x – распределение вероятностей на $(S, \mathcal{B}(S))$ случайной величины $x: \Omega \to S$; $E(x)$ – математическое ожидание случайной величины x. Функция $L: R^d \to \operatorname{conv}(R^{d\times r})$ ограничена, если $\|b\| \le C = \text{const}$ $\forall b \in L(x)$, $\forall x \in R^d$. Отображение $F: R_+ \times R^d \to \operatorname{conv}(R^{d\times r})$ называется измеримым [3, с. 29], если для любого замкнутого множества $Y \subset R^{d\times r}$ $F^-(Y) = \{(t,x) \in R_+\times R^d | F(t,x)\bigcap Y \neq 0\} \subset \mathcal{R}\otimes\mathcal{B}(R^d)$, где

$\mathcal{R}\otimes\mathcal{B}(R^d)$ – произведение σ-алгебр $\mathcal{R}$ и $\mathcal{B}(R^d)$. Отображение $L:\ R^d\to \operatorname{conv}(R^{d\times r})$ называют полунепрерывным сверху, если для любого замкнутого множества $Y\subset R^{d\times r}$ множество $\{x\in R^d|L(x)\bigcap Y\neq 0\}$ замкнуто в R^d. Отображение L полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда для любых точки $x\in R^d$ и последовательностей $x_n\to x$ и $y_n\in L(x_n)$ существует сходящаяся подпоследовательность y_{n_k}, предел которой принадлежит $L(x)$ [3, с. 31]. Если отображение L ограничено, то оно полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда для любых точки $x\in R^d$ и последовательности $x_n\to x$ выполняется $\bigcap_{m=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{n=m}^{\infty}L(x_n)}\subset L(x)$ [4, с. 69]. Иначе говоря, отображение L полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда для любых точки $x\in R^d$, $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon,x)>0$ такое, что для всех $y\in[x]_\delta$ выполняется $F(y)\subset[F(x)]_\varepsilon$ [3, с. 28–29]. Если D – область в R^d, то можно определить множества $N_x=\bigcup_{r>0}N_{x,r}$, $N_{x,\infty}=\bigcap_{r>0}N_{x,r}$, $N_{x,r}=\{n\in R^d|\|n\|=1,\ B(x-rn,r)\bigcap D=\emptyset\}$. Следуя Лионсу, Шнитману [5] и Сейшо [6], будем рассматривать области D, удовлетворяющие условиям:

А) существует $r_0\in]0,+\infty]$ такое, что $N_x=N_{x,r_0}\neq\emptyset$ для каждого $x\in\partial D$;

В) существуют постоянные $\delta>0$, $\beta\geq 1$ такие, что $\forall x\in\partial D$ существует единичный вектор e_x со свойством $\langle e_x,n\rangle\geq 1/\beta$ $\forall n\in\bigcup_{y\in B(x,\delta)\cap\partial D}N_y$.

В каждой точке $(t,x)\in R_+\times R^d$ построим множества $F(t,x)$, $A(t,x)$, которые являются наименьшими выпуклыми замкнутыми множествами, содержащими соответственно все предельные точки $f(t,x')$, $a(t,x')$ при $x'\to x$, где $a(t,x)=g(t,x)g^*(t,x)$.

Пусть $H=\{(t,x)\in R_+\times R^d|\int_{U(t,x)}(\det a(\tau,y))^{-1}d\tau\,dy=\infty$ для каждой открытой окрестности $U(t,x)$ точки $(t,x)\}$; $H^c=(R_+\times R^d)\setminus H$; $G(t,x)=\{b^{1/2}(t,x)|b(t,x)\in A(t,x)\}$;

$$F_0(t,x)=\begin{cases}f(t,x), & (t,x)\in H^c,\\ F(t,x), & (t,x)\in H,\end{cases}\qquad G_0(t,x)=\begin{cases}g(t,x), & (t,x)\in H^c,\\ G(t,x), & (t,x)\in H,\end{cases}$$

$$A_0(t,x)=\begin{cases}a(t,x), & (t,x)\in H^c,\\ A(t,x), & (t,x)\in H.\end{cases}$$

Определение. Под слабым решением уравнения (1) в области D с отражением от границы понимаем d-мерный непрерывный случайный процесс $x(t)$, $t\in R_+$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, который $\mathcal{F}_t$-согласован, $x(t)\in\bar D$ для любого $t\in R_+$ почти наверное (п.н.) и такой, что: 1) существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$ с $W(0)=0$ п.н.; 2) существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы v,u такие, что $v(t,\omega)\in F_0(t,x(t,\omega))$, $u(t,\omega)\in G_0(t,x(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in R_+\times\Omega$; 3) существует непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $K(t)$, $t\in R_+$, $K(0)=0$, п.н. имеющий локально ограниченную вариацию и удовлетворяющий условиям

$$K(t)=\int\limits_0^t n(\tau)\,d|K|_\tau,\quad |K|_t=\int\limits_0^t 1_{\partial D}(x(\tau))\,d|K|_\tau,\tag{2}$$

где $n(\tau)\in N_{x(\tau)}$, если $x(\tau)\in\partial D$; 4) для каждого $t\in R_+$ с вероятностью 1 $x(t)=x_0+$ $+\int_0^t v(\tau)\,d\tau+\int_0^t u(\tau)\,dW(\tau)+K(t)$, где интеграл по $dW(\tau)$ является интегралом Ито.

Теорема. *Если f и g измеримы и ограничены, то для любой области $D\subset R^d$, удовлетворяющей условиям А) и В), для любого $x_0\in\bar D$ уравнение (1) имеет слабое решение в области D с отражением от границы.*

Доказательство. Отображения $F:\ R_+\times R^d\to\operatorname{conv}(R^d)$, $A:\ R_+\times R^d\to\operatorname{conv}(R^{d\times d})$ полунепрерывны сверху по x при каждом $t\in R_+$, множество H замкнуто, а отображения F_0, A_0 измеримы. Согласно теореме Куратовского–Рыля–Нарджевского [3, с. 47], отображение A_0 имеет измеримый селектор, т.е. существует измеримое отображение $S(t,x)$ такое, что $S(t,x)\in$ $\in A_0(t,x)$ $\forall(t,x)\in R_+\times R^d$. Представим $S(t,x)$ в виде $S=T\Lambda T^*$ и положим $S_n=T\Lambda_nT^*$, где Λ_n – диагональная матрица с элементами $\max\{\lambda_{ii}, 1/n\}$ на диагонали. Для каждого $n \in N$ $\det S_n \geq \delta(n) > 0$, кроме того, для каждой точки $(t,x) \in R_+ \times R^d$

$$S_n(t,x) \to S(t,x) \quad \text{при} \quad n \to +\infty, \quad S_n(t,x) \in [A(t,x)]_{c/n}, \quad c = \text{const}. \tag{3}$$

По теореме 3.2 [1] для каждого $n \in N$ для уравнения (1) с $g = g_n = T\sqrt{\Lambda_n}T^*$ существуют вероятностное пространство $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ с потоком $\mathcal{F}_{nt}$, $\mathcal{F}_{nt}$ – винеровский процесс $W_n(t)$ и пара непрерывных $\mathcal{F}_{nt}$-согласованных процессов x_n, K_n таких, что $\forall t \in R_+$

$$x_n(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(\tau, x_n(\tau))\,d\tau + \int\limits_0^t g_n(\tau, x_n(\tau))\,dW_n(\tau) + K_n(t) \quad \text{п.н.}, \tag{4}$$

$x_n(t) \in \bar{D}$ п.н., $K_n(t)$ – процесс с локально ограниченной вариацией и такой, что $K_n(0) = 0$ п.н., $K_{nt} = \int_0^t n(\tau)\,d|K_n|_\tau$, $|K_n|_t = \int_0^t 1_{\partial D}(x_n(\tau))\,d|K_n|_\tau$, $n(\tau) \in N_{x_n(\tau)}$, если $x_n(\tau) \in \partial D$.

Из леммы 2.3 [1] следует, что последовательность $(x_n, K_n, |K_n|)$ плотна в $C(R_+, R^{2d+1})$. Отсюда и из теоремы Скорохода [2, с. 18] вытекает, что существуют подпоследовательность n_i, вероятностное пространство $(\Omega, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$ и непрерывные процессы $\widehat{x}, \widehat{x}_{n_i}, \widehat{K}, \widehat{K}_{n_i}, \widehat{B}$ такие, что $\widehat{x}_{n_i}, \widehat{K}_{n_i}, |\widehat{K}_{n_i}|$ сходятся равномерно на каждом компактном промежутке из R_+ соответственно к $\widehat{x}, \widehat{K}, \widehat{B}$ п.н. и $P^{x_{n_i}} = P^{\widehat{x}_{n_i}}$, $P^{K_{n_i}} = P^{\widehat{K}_{n_i}}$ (для упрощения обозначений считаем, что сами последовательности $\widehat{x}_n$, $\widehat{K}_n$ сходящиеся).

Пусть $y_n(t) = x_n(t) - K_n(t)$, $\widehat{y}_n(t) = \widehat{x}_n(t) - \widehat{K}_n(t)$, $\widehat{y}(t) = \widehat{x}(t) - \widehat{K}(t)$, тогда для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $h: R^d \to R$, ограниченной вместе с частными производными до второго порядка включительно; для любых $s, t \in R_+$, $s \leq t$, и любой непрерывной ограниченной $\mathcal{B}_s(C(R_+, R^d))$-измеримой функции $z: C(R_+, R^d) \to R$, используя формулу Ито, из равенств (4) имеем

$$E_n\left(\left(h(y_n(t)) - h(y_n(s)) - \int\limits_s^t \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d S_n^{(ij)} \frac{\partial^2 h(x_n(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}} + \sum_{i=1}^d f^{(i)}(\tau, x_n(\tau)) \frac{\partial h(x_n(\tau))}{\partial x^{(i)}}\right)d\tau\right) z(x_n)\right) = 0, \tag{5}$$

где $S_n^{(ij)}$, $f^{(i)}$, $x^{(i)}$ – компоненты соответственно матрицы S_n и векторов f и x.

Согласно теореме Данфорда–Петтиса, последовательности $f(t, \widehat{x}_n(t))$, $S_n(t, \widehat{x}_n(t))$ относительно слабо компактны соответственно в $\mathcal{L}_1([0,1] \times \Omega, R^d)$, $\mathcal{L}_1([0,1] \times \Omega, R^{d\times d})$. Пусть $f(t, \widehat{x}_{n(1)}(t))$, $S_{n(1)}(t, \widehat{x}_{n(1)}(t))$ – подпоследовательности, слабо сходящиеся к $\widehat{v}^1(t,\omega)$, $\widehat{b}^1(t,\omega)$, $(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$. Пусть $f(t, \widehat{x}_{n(2)}(t))$, $S_{n(2)}(t, \widehat{x}_{n(2)}(t))$ – подпоследовательности для $f(t, \widehat{x}_{n(1)}(t))$, $S_{n(1)}(t, \widehat{x}_{n(1)}(t))$, слабо сходящиеся в $\mathcal{L}_1([1,2] \times \Omega, R^d)$, $\mathcal{L}_1([1,2] \times \Omega, R^{d\times d})$ к $\widehat{v}^2(t,\omega)$, $\widehat{b}^2(t,\omega)$, $(t,\omega) \in [1,2]\times\Omega$ и т.д., в результате построим отображения $\widehat{v}: R_+ \times \Omega \to R^d$, $\widehat{b}: R_+ \times \Omega \to R^{d\times d}$, где $\widehat{v} = \widehat{v}^1$, $\widehat{b} = \widehat{b}^1$, если $(t,\omega) \in [0,1[\times\Omega$, $\widehat{v} = \widehat{v}^2$, $\widehat{b} = \widehat{b}^2$, если $(\tau,\omega) \in \in [1,2[\times\Omega$, и т.д. Пусть $t \in [l-1, l[$, $l \in N$. Для упрощения обозначений считаем, что подпоследовательность $n(l)$ совпадает с n. Как показано в [7], $\widehat{v}(t,\omega) \in \bigcap_{m=1}^\infty \overline{\text{co}} \bigcup_{n=m}^\infty f(t, \widehat{x}_n(t,\omega))$, $\widehat{b}(t,\omega) \in \bigcap_{m=1}^\infty \overline{\text{co}} \bigcup_{n=m}^\infty S_n(t, \widehat{x}_n(t,\omega))$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in [0,l] \times \Omega$. Отсюда, из полунепрерывности сверху по x отображений F, A и из включений (3) следует, что $\widehat{v}(t,\omega) \in \in F(t, \widehat{x}(t,\omega))$, $\widehat{b}(t,\omega) \in A(t, \widehat{x}(t,\omega))$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$.

Пусть $\sigma(\widehat{x}(s)|0 \leq s \leq \tau + \varepsilon)$ – наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные векторы $\widehat{x}(s)$, $0 \leq s \leq \tau + \varepsilon$, и пусть $\widehat{\mathcal{F}}_\tau = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma(\widehat{x}(s)|0 \leq s \leq \tau + \varepsilon)$. Через $\widehat{\widehat{v}} = (\widehat{v}|\widehat{\mathcal{F}}_\tau)$, $\widehat{\widehat{b}} = (\widehat{b}|\widehat{\mathcal{F}}_\tau)$ обозначим условные математические ожидания для $\widehat{v}, \widehat{b}$ относительно $\widehat{\mathcal{F}}_\tau$, причем условные математические ожидания выбраны таким образом, что процессы $\widehat{\widehat{v}}, \widehat{\widehat{b}}$ измеримы. Как показано в [8], $\widehat{\widehat{v}}(t,\omega) \in F(t, \widehat{x}(t,\omega))$, $\widehat{\widehat{b}}(t,\omega) \in A(t, \widehat{x}(t,\omega))$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$. Пусть

$$\widetilde{v}(t,\omega) = \begin{cases} f(t,\widehat{x}(t,\omega)), & (t,\omega) \in B^c, \\ \widehat{\widehat{v}}(t,\omega), & (t,\omega) \in B, \end{cases} \qquad \widetilde{b}(t,\omega) = \begin{cases} a(t,\widehat{x}(t,\omega)), & (t,\omega) \in B^c, \\ \widehat{\widehat{b}}(t,\omega), & (t,\omega) \in B, \end{cases}$$

где $B = \{(t,\omega) | (t,\widehat{x}(t,\omega)) \in H\}$, $B^c = (R_+ \times \Omega) \setminus B$. Для $(\mu \times P)$-почти всех $(t,\omega) \in R_+ \times \Omega$ $\widetilde{v}(t,\omega) \in F_0(t,\widehat{x}(t,\omega))$, $\widetilde{b}(t,\omega) \in A_0(t,\widehat{x}(t,\omega))$.

Определим $\tau_n^r = \inf\{t | \|x_n(t)\| \vee |K_n|_t > r\}$, $\widehat{\tau}_n^r = \inf\{t | \|\widehat{x}_n(t)\| \vee |\widehat{K}_n|_t > r\}$, $\widehat{\tau}^r = \inf\{t | \|\widehat{x}(t)\| \vee |\widehat{B}|_t > r\}$. Существует последовательность $r_k \uparrow +\infty$ такая, что для каждого $k \in N$ $(\tau_{nk}, x_n, K_n, |K|_n) \to_D (\widehat{\tau}_k, \widehat{x}, \widehat{K}, \widehat{B})$ при $n \to +\infty$ [1], где $\tau_{nk} = \tau_n^{r_k}$, $\widehat{\tau}_k = \widehat{\tau}^{r_k}$, символ $\to_D$ означает сходимость законов распределения в $R \times C(R_+, R^{3d+1})$. Можно считать, что $\widehat{\tau}_{nk} = \widehat{\tau}_n^{r_k} \to \widehat{\tau}_k$ при $n \to +\infty$ п.н. Возьмем последовательность $\varepsilon_k \downarrow 0$ при $k \to +\infty$ и для каждого $k \in N$ последовательность непрерывных функций $\varphi_m : R_+ \times R^d \to [0,1]$ такую, что $\varphi_m \le 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}$, $\varphi_m \uparrow 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}$ при $m \to +\infty$, где $[H]^c_{\varepsilon_k} = (R_+ \times R^d) \setminus [H]_{\varepsilon_k}$. Для любых $m,k \in N$, $1 \le i \le d$, $1 \le j \le d$

$$\lim_{n\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_{nk}}^{t\wedge\widehat{\tau}_{nk}} \varphi_m(\tau,\widehat{x}_n(\tau)) S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\Bigg) z(\widehat{x}_n)\Bigg) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_{nk}}^{t\wedge\widehat{\tau}_{nk}} \Bigg(\varphi_m(\tau,\widehat{x}_n(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, z(\widehat{x}_n) - \varphi_m(\tau,\widehat{x}(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} z(\widehat{x})\Bigg) S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))\, d\tau\Bigg) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_k}^{t\wedge\widehat{\tau}_k} \varphi_m(\tau,\widehat{x}(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} z(\widehat{x}) (S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau)) - \widehat{b}^{(ij)}(\tau))\, d\tau\Bigg) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} E\Bigg(\int\limits_{t\wedge\widehat{\tau}_k}^{t\wedge\widehat{\tau}_{nk}} \varphi_m(\tau,\widehat{x}(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} z(\widehat{x}) S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))\, d\tau + \int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_{nk}}^{s\wedge\widehat{\tau}_k} \ldots\Bigg) +$$

$$+ E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_k}^{t\wedge\widehat{\tau}_k} \varphi_m(\tau,\widehat{x}(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} \widehat{b}^{(ij)}(\tau)\, d\tau\Bigg) z(\widehat{x})\Bigg). \tag{6}$$

В соотношении (6) первое слагаемое в правой части равно нулю, так как $\widehat{x}_n(\tau) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{x}(\tau)$ равномерно по $\tau \in [0,t]$ п.н., второе слагаемое равно нулю из-за слабой сходимости в $\mathcal{L}_1([0,t] \times \Omega, R^{d\times d})$ последовательности $S_n(\tau,\widehat{x}_n(\tau))$ к $\widehat{b}(\tau)$, третье слагаемое равно нулю, так как $\widehat{\tau}_{nk} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{\tau}_k$ п.н. Далее, $\varphi_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}$, $k \in N$, поэтому

$$\lim_{m\to\infty} E\Bigg(\Bigg(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_k}^{t\wedge\widehat{\tau}_k} \widehat{b}^{(ij)}(\tau) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} (\varphi_m(\tau,\widehat{x}(\tau)) - 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(\tau,\widehat{x}(\tau))) d\tau\Bigg) z(\widehat{x})\Bigg) = 0. \tag{7}$$

Используя теорему 5.1 [1], для $\forall k \in N$ получаем

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E\Bigg|\Bigg(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_{nk}}^{t\wedge\widehat{\tau}_{nk}} (1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(\tau,\widehat{x}_n(\tau)) - \varphi_m(\tau,\widehat{x}_n(\tau))) S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\Bigg) z(\widehat{x}_n)\Bigg| \le$$

$$\leq C \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} E_n\left(\int\limits_0^t (1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(\tau, x_n(\tau)) - \varphi_m(\tau, x_n(\tau)))\, d\tau\right) \leq$$

$$\leq C_1 \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \|(\det a_n(t,x))^{-1/(d+1)}(1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(t,x) - \varphi_m(t,x))\|_{\mathcal{L}_{d+1}(([0,t]\times B(0,r_k))\cap[H]^c_{\varepsilon_k}, R)} = 0, \tag{8}$$

где $C, C_1 = \mathrm{const}$.

Из соотношений (6)–(8) следует, что для каждого $k \in N$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_{nk}}^{t\wedge\widehat{\tau}_{nk}} 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \widehat{x}_n(\tau)) S_n^{(ij)}(\tau, \widehat{x}_n(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x}_n)\right) =$$

$$= E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_k}^{t\wedge\widehat{\tau}_k} 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \widehat{x}(\tau)) \widehat{b}^{(ij)}(\tau) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x})\right). \tag{9}$$

Так же как и в [1], $\lim\limits_{k\to\infty} P(\widehat{\tau}_k \leq q) = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \limsup\limits_{n\to\infty} P(\widehat{\tau}_{nk} \leq q) = 0$, $q > 0$. Отсюда и из соотношения $1_{[H]^c_{\varepsilon_k}} \to 1_{[H]^c}$ при $k \to +\infty$ следует

$$\lim_{k\to\infty} E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_k}^{t\wedge\widehat{\tau}_k} 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \widehat{x}(\tau)) \widehat{b}^{(ij)}(\tau) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x})\right) =$$

$$= E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{[H]^c}(\tau, \widehat{x}(\tau)) \widehat{b}^{(ij)}(\tau) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x})\right) = 0. \tag{10}$$

Равенство (10) справедливо и после замены в нем $\widehat{b}^{(ij)}(\tau)$ на $S^{(ij)}(\tau, \widehat{x}(\tau))$. Рассуждая так же, как при выводе соотношения (2.17) в [1], устанавливаем, что

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_{nk}}^{t\wedge\widehat{\tau}_{nk}} 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \widehat{x}_n(\tau)) S_n^{(ij)}(\tau, \widehat{x}_n(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x}_n)\right) =$$

$$= E\left(\left(\int\limits_{s\wedge\widehat{\tau}_k}^{t\wedge\widehat{\tau}_k} 1_{[H]^c_{\varepsilon_k}}(\tau, \widehat{x}(\tau)) S^{(ij)}(\tau, \widehat{x}(\tau)) \frac{\partial^2 h(x(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x})\right). \tag{11}$$

Сравнивая (9), (11) и используя (10), имеем

$$E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{[H]^c}(\tau, \widehat{x}(\tau)) S^{(ij)}(\tau, \widehat{x}(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x})\right) =$$

$$= E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{[H]^c}(\tau, \widehat{x}(\tau)) \widehat{b}^{(ij)}(\tau) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x})\right). \tag{12}$$

Из соотношения (9) следует существование последовательности $k_n \to +\infty$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{[H]^c_{\varepsilon_{k_n}}}(\tau, \widehat{x}_n(\tau)) S_n^{(ij)}(\tau, \widehat{x}_n(\tau)) \frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}}\, d\tau\right) z(\widehat{x}_n)\right) =$$

$$= E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{[H]^c}(\tau,\widehat{x}(\tau))\widehat{b}^{(ij)}(\tau)\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x})\right). \tag{13}$$

Так как последовательность $S_n(\tau,\widehat{x}_n(\tau))$ слабо сходится к $\widehat{b}(\tau)$ в $\mathcal{L}_1([0,t]\times\Omega,R^{d\times d})$, а последовательность $\widehat{x}_n(t)$ стремится к $\widehat{x}(t)$ равномерно на $[0,l]$ п.н., то

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_s^t S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))\frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x}_n)\right) = E\left(\left(\int\limits_s^t \widehat{b}(\tau)\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x})\right). \tag{14}$$

Сравнивая (13), (14), получаем

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{[H]_{\varepsilon_{k_n}}}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))\frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x}_n)\right) =$$

$$= E\left(\left(\int\limits_s^t 1_H(\tau,\widehat{x}(\tau))\widehat{b}^{(ij)}(\tau)\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x})\right). \tag{15}$$

Теперь из равенств (12), (15), свойств условных математических ожиданий, определения $\widetilde{b}$ и соотношений $P^{x_n} = P^{\widehat{x}_n}$ имеем

$$E\left(\left(\int\limits_s^t \widetilde{b}^{(ij)}(\tau)\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x})\right) = E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{H^c}(\tau,\widehat{x}(\tau))S^{(ij)}(\tau,\widehat{x}(\tau))\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x})\right)+$$

$$+E\left(\left(\int\limits_s^t 1_H(\tau,\widehat{x}(\tau))\widehat{\widehat{b}}^{(ij)}(\tau)\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x})\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{[H]^c_{\varepsilon_{k_n}}}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))\frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x}_n)\right)+$$

$$+\lim_{n\to\infty} E\left(\left(\int\limits_s^t 1_{[H]_{\varepsilon_{k_n}}}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))S_n^{(ij)}(\tau,\widehat{x}_n(\tau))\frac{\partial^2 h(\widehat{x}_n(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x}_n)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} E_n\left(\left(\int\limits_s^t S_n^{(ij)}(\tau,x_n(\tau))\frac{\partial^2 h(x_n(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}\,d\tau\right)z(x_n)\right), \quad i,j=\overline{1,d}. \tag{16}$$

Аналогично

$$E\left(\left(\int\limits_s^t \widetilde{v}^{(i)}(\tau)\frac{\partial h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}}\,d\tau\right)z(\widehat{x})\right) = \lim_{n\to\infty} E_n\left(\left(\int\limits_s^t f^{(i)}(\tau,x_n(\tau))\frac{\partial h(x_n(\tau))}{\partial x^{(i)}}\,d\tau\right)z(x_n)\right), \quad i=\overline{1,d}. \tag{17}$$

Из равенства (5), используя (16), (17), имеем

$$E\left(\left(h(\widehat{y}(t)) - h(\widehat{y}(s)) - \int\limits_s^t\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \widetilde{b}^{ij}(\tau)\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}} + \sum_{i=1}^d \widetilde{v}^{(i)}\frac{\partial h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}}\right)d\tau\right)z(\widehat{x})\right) = 0,$$

поэтому процесс

$$h(\widehat{y}(t)) - h(\widehat{y}(0)) - \int_0^t \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \widetilde{b}^{(ij)}(\tau)\frac{\partial^2 h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}} + \sum_{i=1}^d \widetilde{v}^{(i)}(\tau)\frac{\partial h(\widehat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}}\right)d\tau$$

является $\widehat{\mathcal{F}}_t$-мартингалом. Если взять $\widetilde{u}(t,\omega) = \begin{cases}\widetilde{b}^{1/2}(t,\omega), & (t,\omega)\in B,\\ g(t,\widehat{x}(t,\omega)), & (t,\omega)\in B^c,\end{cases}$ то $\widetilde{u}$ является измеримым $\widehat{\mathcal{F}}_t$-согласованным процессом таким, что $\widetilde{u}(t,\omega)\in G_0(t,\widehat{x}(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in R_+\times\Omega$ и $\widetilde{u}\widetilde{u}^* = \widetilde{b}$. На расширении $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathcal{F}},\widetilde{P})$ и $\widetilde{\mathcal{F}}_t$ пространства $(\Omega,\widehat{\mathcal{F}},\widehat{P})$ с $\widehat{\mathcal{F}}_t$ можно определить $(\widetilde{\mathcal{F}}_t)$-броуновское движение $\widetilde{W}(t)$ такое, что $\forall t\in R_+$ $\widehat{y}(t)-\widehat{y}(0) - \int_0^t \widetilde{v}(\tau)\,d\tau = \int_0^t \widetilde{u}(\tau)\,d\widetilde{W}(\tau)$ п.н. [2, с. 159–160]. Согласно предложению 4 [9], $\widehat{x}(t)$, $\widehat{K}(t)$ – процессы такие, что $\forall t\in R_+$ $x(t)\in\bar{D}$ п.н., $\widehat{K}(0)=0$ п.н., $\widehat{K}$ имеет локально ограниченную вариацию, удовлетворяет условиям (2) и $\widehat{y}(t) = \widehat{x}(t)+\widehat{K}(t)$. Таким образом, $\widehat{x}$ – слабое решение уравнения (1) в области D с отражением от границы. Теорема доказана.

Замечания. 1. Если функции f и g измеримы и удовлетворяют условию

$$\|f(t,x)\| + \|g(t,x)\| \le c(1+\|x\|), \quad c=\text{const}, \quad \forall (t,x)\in R_+\times R^d, \tag{18}$$

то утверждение теоремы справедливо для любой выпуклой области D [1].

2. Когда $D=R^d$, то из теоремы вытекает теорема существования слабых решений уравнения

$$dx(t) = f(t,x(t))\,dt + g(t,x(t))\,dW(t), \tag{19}$$

если f и g – измеримые отображения, удовлетворяющие условию (18), то для любого $x_0\in R^d$ уравнение (19) имеет по крайней мере одно слабое решение [10].

3. Теорема применима и в том случае, когда $g: R_+\times R^d \to R^{d\times r}$, $r<d$, надо лишь матрицу $g(t,x)$ дополнить нулевыми столбцами до квадратной матрицы. В этом случае $\det gg^*\equiv 0$, $H = R_+\times R^d$.

4. Теоремы существования сильных решений уравнения (1) и более общих уравнений с отражением от границы даны в [5, 6, 9, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rozkosz A., Slominski L.* // Stochastic Processes and Their Applications. 1997. V. 68. P. 285–302.
2. *Ватанбэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
3. *Kisielewicz M.* Differential Inclusions and Optimal Control. Warszawa, 1991.
4. *Куратовский К.* Топология. Т. 2. М., 1986.
5. *Lions P.L., Sznitman A.S.* // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1984. V. 37. P. 511–537.
6. *Saisho Y.* // Probability Theory and Related Fields. 1987. V. 74. P. 455–477.
7. *Леваков А.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. 47–53.
8. *Леваков А.А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 212–220.
9. *Slominski L.* // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1993. V. 29. № 2. P. 163–198.
10. *Леваков А.А.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 8. С. 1041–1048.
11. *Cépa E.* // The Annal. of probability. 1998. V. 26. № 2. P. 500–532.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
28.12.2001 г.