ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 4, с. 453–464

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.936

СОВМЕСТНОЕ ОПИСАНИЕ ГРАНИЧНЫХ СТЕПЕННЫХ МНОЖЕСТВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА. II

© 2003 г. Н. А. Изобов, Е. Н. Крупчик

В настоящей работе завершается доказательство сформулированной в первой ее части [1] и ниже теоремы 1. При этом непрерывным образом продолжается начатая в [1] нумерация формул.

Теорема 1. *Для любых натурального числа n, замкнутых выпуклых вверх монотонно убывающих неограниченных соответственно справа и снизу, слева и сверху кривых $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ двумерной плоскости, имеющих отрицательный соответственно не меньший, не больший -1 угловой коэффициент всякой касательной в каждой своей внутренней точке, и замкнутых выпуклых вниз монотонно убывающих неограниченных соответственно справа и снизу, слева и сверху кривых $D^{(3)}$, $D^{(4)}$ двумерной плоскости, имеющих отрицательный соответственно не больший, не меньший -1 угловой коэффициент всякой касательной в каждой своей внутренней точке, существует такая вполне интегрируемая система Пфаффа (1_n) с бесконечно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами, что всякое ее нетривиальное решение $x : R^2_{>1} \to R^n \setminus \{0\}$ имеет левое $\underline{D}_x(p') = D^{(1)}$, правое $\underline{D}_x(p'') = D^{(2)}$ граничные нижние и левое $\overline{D}_x(\lambda') = D^{(3)}$, правое $\overline{D}_x(\lambda'') = D^{(4)}$ граничные верхние степенные множества.*

Доказательство теоремы 1 (продолжение).

4. Построение граничных степенных множеств. В этом пункте будут построены левые и правые граничные нижние и верхние степенные множества построенного в п. 2 первой части [1] настоящей работы нетривиального решения уравнения Пфаффа (1_1).

4.1. Доказательство совпадения левого $\underline{D}_x(p')$ и правого $\underline{D}_x(p'')$ граничных нижних степенных множеств соответственно с кривыми $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$. Возьмем произвольную точку $d = (d_1, d_2)$ всюду плотного разбиения $D^{(1)}_\infty$ кривой $D^{(1)}$ и покажем, что она принадлежит левому $\underline{D}_x(p')$ граничному нижнему степенному множеству.

Как и в [2], введем обозначение

$$\beta^{(1)}(d) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)| + t_1 - (d, \ln t)}{\|\ln t\|}$$

для нижнего предела из определения (5), в котором $p' = (-1, 0)$ – левая граничная точка нижнего характеристического множества P_x.

Докажем неравенство $\beta^{(1)}(d) \le 0$. По построению разбиения $D^{(1)}_\infty$ существует номер $l(d) \in N$ такой, что выполнены включения $d \in D^{(1)}_l$, $\forall l \ge l(d)$ и $d \notin D^{(1)}_l$, $\forall l < l(d)$. Предположим, что точка d является i_m-й точкой $(l(d)+m)$-го разбиения, $m \in N$. В каждой полосе $\Pi^{(1)}(i_m, l(d) + m)$, $m \in N$, в которой функция $\ln\psi(t)$ задается на основе точки $d = \Delta^{(1)}(i_m, l(d)+m)$, возьмем по точке $\tau(m)$ на кривой $\ln t_2/\ln t_1 = 1/|k^{(1)}(d)| > 1$, если угловой коэффициент $k^{(1)}(d)$ касательной в точке d к кривой $D^{(1)}$ отличен от -1, в противном случае – на прямой $t_2/t_1 = 2e$. Тем самым получаем последовательность $\{\tau(m)\} \uparrow +\infty$, для которой справедливы равенства

$$\ln\psi(\tau(m)) = (d, \ln\tau(m)), \quad \ln\varphi(\tau(m)) = \ln\underline{E}(\tau(m)),$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln x(\tau(m)) + \tau_1(m) - (d, \ln\tau(m))}{\|\ln\tau(m)\|} = 0,$$

дающие необходимое неравенство $\beta^{(1)}(d) \le 0$. Отметим, что в случае кривой $D^{(1)}$ вида 3_1) выполнение равенства $\ln\psi(\tau(m)) = (d, \ln\tau(m))$ обеспечивается неравенством (13_1).

Пусть нижний предел $\beta^{(1)}(d)$ реализуется по последовательности $\{t(m)\}\uparrow +\infty$ такой, что $t_j(m) \to +\infty$ при $m \to +\infty$, $j = 1, 2$. Существование такой последовательности следует из леммы 1 работы [3]. Без нарушения общности будем считать, что имеют место неравенства

$$|(d, \ln t(m))| \le \|t(m)\|^{2/3}, \quad m \in N, \tag{24_1}$$

$$t_1(m) \ge \max\{\zeta_0, 128\}, \quad m \in N, \tag{24_2}$$

а в случае кривой $D^{(1)}$ вида 3_1) и неравенство

$$(\Delta^{(1)}(0,0) - d, (1, \sqrt[3]{t_1(m)})) \ge 0, \quad m \in N. \tag{24_3}$$

Также без нарушения общности будем предполагать, что все члены $t(m)$ этой последовательности принадлежат полосам квадранта $R^2_{>1}$ с разными номерами l_m, $1 < l_m < l_{m+1} \to +\infty$ при $m \to +\infty$, и выполнено включение

$$d \in D^{(1)}(l_m), \quad m \in N. \tag{25}$$

Установим теперь справедливость неравенства $\beta^{(1)}(d) \ge 0$. Если последовательность $\{t(m)\}$ содержит такую бесконечную подпоследовательность $\{t(m_j)\}$, что для каждой ее точки $t(m_j)$ выполнена оценка $\ln\psi(t(m_j)) - (d, \ln t(m_j)) \ge 0$, то в силу справедливости неравенства $\ln\varphi(t(m)) + t_1(m) \ge 0$ имеем $\beta(d) \ge 0$. Поэтому без нарушения общности, как и в [2], будем считать выполненным неравенство

$$\ln\psi(t(m)) - (d, \ln t(m)) < 0, \quad \forall m \in N. \tag{26}$$

Зафиксируем $m \in N$ и предположим, что $t(m)$ принадлежит полосе $\Pi^{(1)}(l_m)$, используемой для реализации левого граничного нижнего степенного множества $\underline{D}_x(p') = D^{(1)}$. Отметим, что решение $x(t)$ строилось таким образом, чтобы при реализации левого граничного нижнего степенного множества $\underline{D}_x(p') = D^{(1)}$ в полосах $\Pi^{(1)}(l_m)$, основных для множества $\underline{D}_x(p')$, сохранить идею доказательства неравенства $\beta^{(1)}(d) \ge 0$, приведенную в [2]. Так как в случае углового коэффициента касательной к кривой $D^{(1)}$ в некоторой точке $\Delta^{(1)}(i,l) \in D^{(1)}_l$, равного -1, функция $\psi^{(1)}_{i,l}(t)$, соответствующая этой точке, в данной работе определена отличным от [2] способом, то представим все же краткое доказательство неравенства $\beta^{(1)}(d) \ge 0$ в полосах $\Pi^{(1)}(l_m)$. В этом доказательстве существенно используется то, что достигнуто выполнение оценки (12_1) и в полосах, соответствующих точкам $\Delta^{(1)}(i,l)$, в которых угловые коэффициенты касательных к кривой $D^{(1)}$ равны -1.

Пусть кривая $D^{(1)}$ имеет вид 1_1) или 2_1). Если $t(m)$ принадлежит "основной" полосе $\Pi^{(1)}(i_m, l_m)$, то из (26), (18_1) и (17) следует неравенство $\ln\psi^{(1)}_{i_m,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) < 0$, дающее в силу (14_1) и (25) включение $t(m) \in S\Pi^{(1)}(i_m, l_m)$. В силу выпуклости вверх кривой $D^{(1)}$ точка $d \in D^{(1)}$ лежит не выше касательной, проведенной к кривой $D^{(1)}$ в точке $\Delta^{(1)}(i_m, l_m) \in D^{(1)}$, т.е. выполнено неравенство

$$\Delta^{(1)}_1(i_m, l_m) - d_1 + \Theta^{(1)}_{i_m,l_m}(\Delta^{(1)}_2(i_m, l_m) - d_2) \ge 0. \tag{27}$$

Оценим снизу величину $R_x((-1,0), d, t(m))$. Из включения $t(m) \in S\Pi^{(1)}(i_m, l_m)$, равенств $(8_{1,1})$, $(8_{1,2})$ и неравенств (12_1) и (27) имеем оценки

$$R_x((-1,0), d, t(m)) = \ln\underline{E}(t(m)) + t_1(m) + \ln\psi^{(1)}_{i_m,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) \ge$$

$$\geq (\Delta^{(1)}(i_m, l_m) - d, \ln t(m)) = \Big[\{(\Delta_1^{(1)}(i_m, l_m) - d_1) + \Theta^{(1)}_{i_m,l_m}(\Delta_2^{(1)}(i_m, l_m) - d_2)\}+$$

$$+(\Delta_2^{(1)}(i_m, l_m) - d_2)\left(\frac{\ln t_2(m)}{\ln t_1(m)} - \Theta^{(1)}_{i_m,l_m}\right)\Big] \ln t_1(m) \geq$$

$$\geq -|\Delta_2^{(1)}(i_m, l_m) - d_2| \left|\frac{\ln t_2(m)}{\ln t_1(m)} - \Theta^{(1)}_{i_m,l_m}\right| \ln t_1(m) \geq -2^{-l_m}\|\ln t(m)\|.$$

Пусть $t(m)$ попадает в "переходную" полосу $P^{(1)}(i_m+1, l_m)$, $i_m \in I^1_{l_m}$. Если в точке $t(m)$ выполнено соотношение $\psi^{(1)}_{i_m+1,l_m}(t(m)) \geq \psi^{(1)}_{i_m,l_m}(t(m))$, то из (26), ($18_1$) и (17) вытекает неравенство $\ln\psi^{(1)}_{i_m,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) < 0$. Из этого неравенства совершенно аналогично случаю принадлежности $t(m)$ "основной" полосе $\Pi^{(1)}(i_m, l_m)$ доказывается оценка

$$R_x((-1,0), d, t(m)) \geq -2^{-l_m}\|\ln t(m)\|. \tag{28}$$

Если же в точке $t(m)$ выполняется соотношение $\psi^{(1)}_{i_m+1,l_m}(t(m)) < \psi^{(1)}_{i_m,l_m}(t(m))$, то имеем неравенство $\ln\psi^{(1)}_{i_m+1,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) < 0$. Проводя рассуждения, аналогичные случаю справедливости включения $t(m) \in \Pi^{(1)}(i_m, l_m)$, и записывая уравнение касательной к кривой $D^{(1)}$ не в точке $\Delta^{(1)}(i_m, l_m)$, а в точке $\Delta^{(1)}(i_m+1, l_m)$, получаем оценку (28).

Пусть теперь кривая $D^{(1)}$ имеет вид 3_1) и выполнено включение $t(m) \in \Pi^{(1)}(l_m)$. Если справедливы неравенство $\ln t_2(m) \leq \sqrt[3]{t_1(m)}\ln t_1(m)$ либо неравенства

$$\ln t_2(m) > \sqrt[3]{t_1(m)}\ln t_1(m) \quad \text{и} \quad \ln u^{(1)}_{l_m}(t(m)) \leq (\Delta^{(1)}(0,0), \ln t(m)),$$

то в силу соотношения $\psi(t(m)) \geq u^{(1)}_{l_m}(t(m))$ получаем оценку (28). Если же имеют место неравенства $\ln t_2(m) > \sqrt[3]{t_1(m)}\ln t_1(m)$ и $\ln u^{(1)}_{l_m}(t(m)) > (\Delta^{(1)}(0,0), \ln t(m))$, то из ($24_3$) вытекает оценка

$$R_x((-1,0), d, t(m)) \geq (\Delta^{(1)}(0,0) - d, \ln t(m)) \geq (\Delta^{(1)}(0,0) - d, (1, \sqrt[3]{t_1(m)}))\ln t_1(m) \geq 0.$$

Таким образом, для $R_x((-1,0), d, t(m))$ в случае $t(m) \in \Pi^{(1)}(l_m)$ установлено неравенство (28).

Предположим теперь, что $t(m)$ принадлежит полосе $\Pi^{(2)}(l_m)$, используемой для реализации правого граничного нижнего степенного множества $\underline{D}_x(p'') = D^{(2)}$. Пусть кривая $D^{(2)}$ имеет вид 1_2) или 2_2). Если выполнено включение $t(m) \in \Pi^{(2)}(i_m, l_m)$, то в силу определений (18_1) и (17) функции $\psi(t)$ в этой полосе неравенство (26) примет следующий вид: $\ln\psi^{(2)}_{i_m,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) < 0$. Так как $d \in D(l)$, то из (14_1) следует включение $t(m) \in S\Pi^{(2)}(i_m, l_m)$. Из этого включения и ($11_2$) получаем неравенство $t_2(m) \leq t_1(m)/e$. Тогда в силу (23), (24_1) и (24_2) имеем оценки

$$R_x((-1,0), d, t(m)) \geq \ln \underline{E}(t(m)) + t_1(m) + \ln\psi(t(m)) - (d, \ln t(m)) \geq$$

$$\geq -t_2(m) + t_1(m) - 2\|t(m)\|^{2/3} \geq t_1^{2/3}(m)(t_1^{1/3}(m) - 4\sqrt[3]{2})/2 \geq 0. \tag{29}$$

Если справедливы включение $t(m) \in P^{(2)}(i_m+1, l_m)$, $i \in I^1_{l_m}$, и соотношение $\psi^{(2)}_{i_m+1,l_m}(t(m)) \geq$ $\geq \psi^{(2)}_{i_m,l_m}(t(m))$, то из ($18_1$), (17) и (26) следует неравенство $\ln\psi^{(2)}_{i_m,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) < 0$. Совершенно аналогично случаю принадлежности $t(m)$ полосе $\Pi^{(2)}(i_m, l_m)$ получаем оценку (29) и в этом случае. Если же $t(m)$ попадает в полосу $P^{(2)}(i_m+1, l_m)$ и имеет место соотношение $\psi^{(2)}_{i_m+1,l_m}(t(m)) < \psi^{(2)}_{i_m,l_m}(t(m))$, то из (26) и ($14_1$) следует включение $t(m) \in S\Pi^{(2)}(i_m +$

$+1, l_m)$, дающее в силу (11_2) неравенство $t_2(m) \le t_1(m)/e$. Тогда также выполнена оценка (29). В случае же кривой $D^{(2)}$ вида $3_2)$ и справедливости неравенства $\ln t_1(m) \le \le \sqrt[3]{t_2(m)} \ln t_2(m)$ совершенно аналогично в силу выполнения равенства $\psi(t(m)) = u_{l_m}^{(2)}(t(m))$ устанавливается оценка (29). Пусть теперь справедливо неравенство $\ln t_1(m) > \sqrt[3]{t_2(m)} \ln t_2(m)$. Тогда с учетом (13_2) выполнены соотношения $t_1(m) > t_2(m)^{\sqrt[3]{t_2(m)}} \ge 2et_2(m)$, позволяющие аналогичным образом получить оценку (29).

Таким образом, в случае выполнения включения $t(m) \in \Pi^{(2)}(l_m)$ для $R_x((-1,0), d, t(m))$ установлена оценка (29).

Пусть теперь $t(m)$ попадает в полосы $\overline{\Pi}(l_m)$, используемые для реализации верхних граничных степенных множеств. Оценивая снизу величину $R_x((-1,0), d, t(m))$, из (23), (24_1) и (24_2) имеем неравенства

$$R_x((-1,0), d, t(m)) \ge \ln \overline{E}(t(m)) + \ln \psi(t(m)) + t_1(m) - (d, \ln t(m)) \ge$$

$$\ge 2t_1(m) + t_2(m) - \ln 2 - 2\|t(m)\|^{2/3} \ge t_1(m) - \ln 2 + \|t(m)\| - 2\|t(m)\|^{2/3} \ge 0. \tag{30}$$

Если $t(m)$ принадлежит полосе $P^{(2)}(1, l_m)$, расположенной между полосами $\Pi^{(1)}(l_m)$ и $\Pi^{(2)}(l_m)$, то в силу (18_3) выполнено хотя бы одно из неравенств $\psi(t(m)) \ge \omega_{l_m \cdot 2^{l_m}, l_m}^{(1)}(t(m))$ или $\psi(t(m)) \ge \omega_{1,l_m}^{(2)}(t(m))$. Если имеет место первое неравенство, то рассуждениями, аналогичными проведенным в случае включения $t(m) \in \Pi^{(1)}(l_m)$, устанавливается оценка (28). В случае справедливости второго неравенства из равенства $\varphi(t(m)) = \underline{E}(t(m))$ аналогично уже включению $t(m) \in \Pi^{(2)}(l_m)$ доказывается оценка (29).

Рассмотрим случай принадлежности $t(m)$ полосе $P^{(3)}(1, l_m)$, расположенной между полосами $\underline{\Pi}(l_m)$ и $\overline{\Pi}(l_m)$. Пусть вначале выполнено включение $t(m) \in P_1^{(3)}(1, l_m)$. Тогда в силу (18_4) и (16_3) справедливы равенство $\psi(t(m)) = \omega_{l_m \cdot 2^{l_m}, l_m}^{(2)}(t(m))$ и хотя бы одно из неравенств $\varphi(t(m)) \ge \underline{E}(t(m))$ или $\ln \varphi(t(m)) \ge \zeta(t(m))/2$. Если имеет место первое неравенство, то аналогично случаю включения $t(m) \in \Pi^{(2)}(l_m)$ получаем оценку (29). При выполнении же второго неравенства, используя (24_1), (24_2) и (23), имеем оценки

$$R_x((-1,0), d, t(m)) \ge \zeta(t(m))/2 + t_1(m) + \ln \psi(t(m)) - (d, \ln t(m)) \ge$$

$$\ge (3t_1(m) + t_2(m))/2 - 2\|t(m)\|^{2/3} \ge \|t(m)\|/2 - 2\|t(m)\|^{2/3} \ge 0. \tag{31}$$

Если $t(m)$ принадлежит полосе $P_2^{(3)}(1, l_m)$, то справедливо равенство $\ln \varphi(t(m)) = \zeta(t(m))/2$ и, следовательно, оценка (31). Если же имеет место включение $t(m) \in P_3^{(3)}(1, l_m)$, то выполнено равенство $\psi(t(m)) = \omega_{1,l_m}^{(3)}(t(m))$ и хотя бы одно из неравенств $\ln \varphi(t(m)) \ge \zeta(t(m))/2$ или $\varphi(t(m)) \ge \overline{E}(t(m))$. В случае выполнения первого неравенства снова получаем оценку (31). При выполнении же второго неравенства, проводя рассуждения, аналогичные случаю включения $t(m) \in \overline{\Pi}(l_m)$, можно доказать оценку (30).

И наконец, рассмотрим случай принадлежности $t(m)$ полосе $P^{(1)}(1, l_m + 1)$, расположенной между полосами $\overline{\Pi}(l_m)$ и $\underline{\Pi}(l_m + 1)$. Если выполнено включение $t(m) \in P_1^{(1)}(1, l_m + 1)$, то из (18_5) получаем равенство $\psi(t(m)) = \omega_{l_m \cdot 2^{l_m}, l_m}^{(4)}(t(m))$, а из (16_4) хотя бы одно из неравенств $\varphi(t(m)) \ge \overline{E}(t(m))$ или $\ln \varphi(t(m)) \ge \zeta(t(m))/2$. Тогда имеют место соответственно оценки (30) или (31). Если имеет место включение $t(m) \in P_2^{(1)}(1, l_m + 1)$, то справедливы равенство $\ln \varphi(t(m)) = \zeta(t(m))/2$ и, следовательно, оценка (31). В случае же принадлежности $t(m)$ полосе $P_3^{(1)}(1, l_m + 1)$ имеем равенство $\psi(t(m)) = \omega_{1,l_m+1}^{(1)}(t(m))$ и хотя бы одно из неравенств $\ln \varphi(t(m)) \ge \zeta(t(m))/2$ или $\varphi(t(m)) \ge \underline{E}(t(m))$. Если имеет место первое неравенство, то получаем оценку (31), а при выполнении второго неравенства – оценку (28).

Таким образом, при всех $m \in N$, $1 < l_m \to +\infty$ при $m \to \infty$ установлена оценка (28), а вместе с этим и необходимое свойство $\beta^{(1)}(d) \ge 0$. Второе же условие определения (5) нижней характеристической степени для вектора d реализуется по последовательности $\tau(m)$, построенной выше. Тем самым доказано включение $D_\infty^{(1)} \subset \underline{D}_x(p')$, устанавливающее в силу всюду плотности множества $D_\infty^{(1)}$ на кривой $D^{(1)}$ и непрерывности кривых $D^{(1)}$ и $\underline{D}_x(p')$ принадлежность кривой $D^{(1)}$ множеству $\underline{D}_x(p')$. Из этой принадлежности в случаях кривой $D^{(1)}$ вида 1_1) или 2_1) следует равенство $\underline{D}_x(p') = D^{(1)}$. Покажем теперь, что и в случае кривой $D^{(1)}$ вида 3_1) левое граничное нижнее степенное множество $\underline{D}_x(p')$ не больше этой кривой. Возьмем любую степень $d \in \underline{D}_x(p')$. Тогда по некоторой последовательности $\{t(m)\} \uparrow +\infty$ вида $t(m) = (t_1(m), t_1(m)^3 \sqrt[3]{t_1(m)})$, $t(m) \in \Pi^{(1)}(l_m)$, получаем неравенство $\Delta_2^{(1)}(0,0) - d_2 \ge 0$. В силу замкнутости и строго монотонного убывания кривой $\underline{D}_x(p')$ установлено совпадение $\underline{D}_x(p') = D^{(1)}$ и в этом случае.

Приведенным выше способом можно доказать и совпадение правого граничного нижнего степенного множества $\underline{D}_x(p'')$ с заданной кривой $D^{(2)}$.

4.2. Доказательство совпадения левого $\overline{D}_x(\lambda')$ и правого $\overline{D}_x(\lambda'')$ граничных верхних степенных множеств соответственно с кривыми $D^{(3)}$ и $D^{(4)}$. Покажем, например, равенство $\overline{D}_x(\lambda') = D^{(3)}$, равенство $\overline{D}_x(\lambda'') = D^{(4)}$ устанавливается аналогично. Возьмем произвольную точку d разбиения $D_\infty^{(3)}$ кривой $D^{(3)}$ и докажем ее принадлежность множеству $\overline{D}_x(\lambda')$.

Введем обозначение

$$\beta^{(3)}(d) \equiv \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t)| - t_1 - 2t_2 - (d, \ln t)}{\|\ln t\|}$$

для верхнего предела из определения (4) левой верхней характеристической степени и покажем справедливость равенства $\beta^{(3)}(d) = 0$.

Из построения разбиения $D_\infty^{(3)}$ следует существование номера $l(d) \in N$ такого, что $d \in \in D_l^{(3)}$, $\forall l \ge l(d)$ и $d \notin D_l^{(3)}$, $\forall l < l(d)$. Пусть d является i_m-й точкой $(l(d)+m)$-го разбиения, $m \in N$. В каждой полосе $\Pi^{(3)}(i_m, l(d)+m)$, в которой функция $\ln\psi(t)$ задается на основе точки $d = \Delta^{(3)}(i_m, l(d)+m)$, возьмем по точке $\tau(m)$, определенной следующим правилом. Если угловой коэффициент $k^{(3)}(d)$ касательной в точке d к кривой $D^{(3)}$ отличен от -1, то $\tau(m)$ возьмем на кривой $\ln t_2/\ln t_1 = 1/|k^{(3)}(d)| < 1$, в противном случае – на прямой $t_2/t_1 = 1/(2e)$. Получим последовательность $\{\tau(m)\} \uparrow +\infty$ такую, что выполнены в силу (13_2) равенства $\ln\psi(\tau(m)) = (d, \ln\tau(m))$, $\ln\varphi(\tau(m)) = \overline{E}(\tau(m))$ и

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln x(\tau(m)) - \tau_1(m) - 2\tau_2(m) - (d, \ln\tau(m))}{\|\ln\tau(m)\|} = 0.$$

Тем самым доказано неравенство $\beta^{(3)}(d) \ge 0$.

Установим теперь противоположное неравенство $\beta^{(3)}(d) \le 0$. Построениями, аналогичными приведенным в лемме 1 работы [3], можно показать существование последовательности $\{t(m)\} \uparrow +\infty$, реализующей верхний предел $\beta^{(3)}(d)$ и удовлетворяющей условию $t_j(m) \to +\infty$ при $m \to +\infty$, $j = 1,2$. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что справедливы неравенства

$$|(d, \ln t(m))| \le \|t(m)\|^{2/3}, \quad m \in N, \tag{32_1}$$

$$t_2(m) \ge \max\{\zeta_0, 128\}, \quad m \in N, \tag{32_2}$$

а в случае кривой $D^{(3)}$ вида 3_3) и неравенство

$$(\Delta^{(3)}(0,0) - d, (\sqrt[3]{t_2(m)}, 1)) \le 0, \quad m \in N. \tag{32_3}$$

Снова, не ограничивая общности, будем предполагать, что $t(m)$ принадлежит полосам квадранта $R^2_{>1}$ с разными номерами l_m, $1 < l_m < l_{m+1} \to +\infty$ при $m \to +\infty$, и имеет место включение $d \in D^{(3)}(l_m)$, $m \in N$. Если у последовательности $\{t(m)\}$ существует бесконечная подпоследовательность $\{t(m_j)\}$, для каждой точки которой справедливо неравенство $\ln\psi(t(m_j)) - (d, \ln t(m_j)) \leq 0$, то необходимое неравенство $\beta^{(3)}(d) \leq 0$ в силу выполнения оценки $\ln\varphi(t(m)) - t_1(m) - 2t_2(m) \leq 0$ очевидно. Поэтому будем считать справедливым неравенство

$$\ln\psi(t(m)) - (d, \ln t(m)) > 0, \quad \forall m \in N. \tag{33}$$

Зафиксируем $m \in N$, и пусть $t(m)$ принадлежит полосе $\Pi^{(3)}(l_m)$, используемой для реализации левого граничного верхнего степенного множества $\overline{D}_x(\lambda') = D^{(3)}$. Предположим, что кривая $D^{(3)}$ имеет вид 1_3) или 2_3). Если $t(m)$ попадает в "основную" полосу $\Pi^{(3)}(i_m, l_m)$, то из (33) имеем неравенство $\ln\psi^{(3)}_{i_m,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) > 0$, дающее в силу ($14_2$) включение $t(m) \in S\Pi^{(3)}(i_m, l_m)$. Из этого включения и ($12_2$) следует неравенство $|\ln t_2(m)/\ln t_1(m) - \Theta^{(3)}_{i_m,l_m}| \leq \Delta_2(l)$. В силу выпуклости вниз кривой $D^{(3)}$ точка $d \in D^{(3)}$ лежит не ниже касательной, проведенной к кривой $D^{(3)}$ в точке $\Delta^{(3)}(i_m, l_m) \in D^{(3)}$. Поэтому справедливы неравенство $\Delta^{(3)}_1(i_m, l_m) - d_1 + \Theta^{(3)}_{i_m,l_m}(\Delta^{(3)}_2(i_m, l_m) - d_2) \leq 0$ и оценки

$$R_x((1,2), d, t(m)) = \ln\overline{E}(t(m)) - t_1(m) - 2t_2(m) + \ln\psi^{(3)}_{i_m,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) \leq$$

$$\leq -\ln(e^{t_2(m)-t_1(m)} + 1) + (\Delta^{(3)}(i_m, l_m) - d, \ln t(m)) \leq \Big[\{(\Delta^{(3)}_1(i_m, l_m) - d_1) +$$

$$+\Theta^{(3)}_{i_m,l_m}(\Delta^{(3)}_2(i_m, l_m) - d_2)\} + (\Delta^{(3)}_2(i_m, l_m) - d_2)\left(\frac{\ln t_2(m)}{\ln t_1(m)} - \Theta^{(3)}_{i_m,l_m}\right)\Big] \ln t_1(m) \leq$$

$$\leq |\Delta^{(3)}_2(i_m, l_m) - d_2| \left|\frac{\ln t_2(m)}{\ln t_1(m)} - \Theta^{(3)}_{i_m,l_m}\right| \ln t_1(m) \leq 2^{-l_m} \|\ln t(m)\|.$$

Если $t(m)$ принадлежит переходной полосе $P^{(3)}(i_m + 1, l_m)$, $i_m \in I^1_{l_m}$, и выполняется соотношение $\psi^{(3)}_{i_m+1,l_m}(t(m)) \leq \psi^{(3)}_{i_m,l_m}(t(m))$, то из неравенства $\psi(t(m)) \leq \psi^{(3)}_{i_m,l_m}(t(m))$ аналогично случаю включения $t(m) \in \Pi^{(3)}(i_m, l_m)$ устанавливается оценка

$$R_x((1,2), d, t(m)) \leq 2^{-l_m} \|\ln t(m)\|. \tag{34}$$

Если же имеет место соотношение $\psi^{(3)}_{i_m+1,l_m}(t(m)) > \psi^{(3)}_{i_m,l_m}(t(m))$, то из (33), ($18_1$) и (17) следует неравенство $\ln\psi^{(3)}_{i_m+1,l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) > 0$. Рассуждая аналогично случаю включения $t(m) \in \Pi^{(3)}(i_m, l_m)$, записывая уравнение касательной к кривой $D^{(3)}$ уже в точке $\Delta^{(3)}(i_m + 1, l_m)$, получаем оценку (34). Предположим теперь, что кривая $D^{(3)}$ имеет вид 3_3) и $t(m)$ принадлежит полосе $\Pi^{(3)}(l_m)$. Если справедливы неравенство $\ln t_1(m) \leq \sqrt[3]{t_2(m)}\ln t_2(m)$ либо неравенства $\ln t_1(m) > \sqrt[3]{t_2(m)}\ln t_2(m)$ и $(\Delta^{(3)}(0,0), \ln t(m)) \leq \ln u^{(3)}_{l_m}(t(m))$, то из ($18_2$) следует соотношение $\psi(t(m)) \leq u^{(3)}_{l_m}(t(m))$, из которого получаем оценку (34). Если же выполнены неравенства $\ln t_1(m) > \sqrt[3]{t_2(m)}\ln t_2(m)$ и $(\Delta^{(3)}(0,0), \ln t(m)) > \ln u^{(3)}_{l_m}(t(m))$, то из ($32_3$) получаем оценки

$$R_x((1,2), d, t(m)) \leq (\Delta^{(3)}(0,0) - d, \ln t(m)) \leq (\Delta^{(3)}(0,0) - d, (\sqrt[3]{t_2(m)}, 1)) \ln t_2(m) \leq 0.$$

Тем самым для $R_x((1,2), d, t(m))$ при $t(m) \in \Pi^{(3)}(l_m)$ установлена оценка (34).

Пусть теперь $t(m)$ принадлежит полосе $\Pi^{(4)}(l_m)$, используемой для реализации правого граничного верхнего степенного множества $\overline{D}_x(\lambda'') = D^{(4)}$. Предположим, что кривая $D^{(4)}$

имеет вид 1_4) или 2_4). Если $t(m)$ попадает в полосу $\Pi^{(4)}(i_m, l_m)$, то из (33), (18_1) и (17) вытекает неравенство $\ln \psi^{(4)}_{i_m, l_m}(t(m)) - (d, \ln t(m)) > 0$, а следовательно, и включение $t(m) \in$ $\in S\Pi^{(4)}(i_m, l_m)$. Из (11_1) имеем неравенство $t_2(m) \geq et_1(m)$, в силу которого с использованием (23), (32_1) и (32_2) получаем оценки

$$R_x((1,2), d, t(m)) \leq \ln \overline{E}(t(m)) - t_1(m) - 2t_2(m) + \ln \psi(t(m)) + (d, \ln t(m)) \leq$$

$$\leq -\ln(e^{t_2(m)-t_1(m)} + 1) + 2\|t(m)\|^{2/3} \leq t_2^{2/3}(m)(-t_2^{1/3}(m) + 4\sqrt[3]{2})/2 \leq 0. \tag{35}$$

Если $t(m)$ попадает в полосу $P^{(4)}(i_m + 1, l_m)$, $i \in I^1_{l_m}$, то из (18_1), (17), а также (33) и (14_2) следует одно из включений $t(m) \in S\Pi^{(4)}(i_m, l_m)$ или $t(m) \in S\Pi^{(4)}(i_m + 1, l_m)$, каждое из которых в силу (11_1) влечет за собой неравенство $t_2(m) \geq et_1(m)$. Тогда аналогично случаю принадлежности $t(m)$ полосе $\Pi^{(4)}(i_m, l_m)$ доказывается оценка (35). В случае же кривой $D^{(4)}$ вида 3_4) и справедливости неравенства $\ln t_2(m) \leq \sqrt[3]{t_1(m)} \ln t_1(m)$ аналогично в силу выполнения равенства $\psi(t(m)) = u^{(4)}_{l_m}(t(m))$ получаем оценку (35). Если же справедливо неравенство $\ln t_2(m) > \sqrt[3]{t_1(m)} \ln t_1(m)$, то из ($13_1$) имеем соотношения $t_2(m) > t_1(m)^{\sqrt[3]{t_1(m)}} \geq 2et_1(m)$, устанавливающие оценку (35).

Тем самым в случае принадлежности $t(m)$ полосе $\Pi^{(4)}(l_m)$ доказана оценка (35).

Рассмотрим теперь случай принадлежности $t(m)$ полосам $\underline{\Pi}(l_m)$, используемым для реализации нижних граничных степенных множеств. Оценивая сверху величину $R_x((1,2), d, t(m))$, в силу (23), (32_1) и (32_2) получаем неравенства

$$R_x((1,2), d, t(m)) \leq \ln \underline{E}(t(m)) + \ln \psi(t(m)) - t_1(m) - 2t_2(m) - (d, \ln t(m)) \leq$$

$$\leq \ln 2 - t_1(m) - 2t_2(m) + 2\|t(m)\|^{2/3} \leq \ln 2 - t_2(m) - \|t(m)\| + 2\|t(m)\|^{2/3} \leq 0. \tag{36}$$

В случае принадлежности $t(m)$ полосе $P^{(4)}(1, l_m)$, расположенной между полосами $\Pi^{(3)}(l_m)$ и $\Pi^{(4)}(l_m)$, из (18_3) следует, что выполнено хотя бы одно из неравенств $\psi(t(m)) \leq$ $\leq \omega^{(3)}_{l_m \cdot 2^{l_m}, l_m}(t(m))$ или $\psi(t(m)) \leq \omega^{(4)}_{1, l_m}(t(m))$. Если выполнено первое неравенство, то аналогично случаю принадлежности $t(m)$ полосе $\Pi^{(3)}(l_m)$ устанавливается оценка (34). А в случае выполнения второго неравенства в силу равенства $\varphi(t(m)) = \overline{E}(t(m))$ аналогично уже случаю принадлежности $t(m)$ полосе $\Pi^{(4)}(l_m)$ доказывается оценка (35).

Пусть теперь $t(m)$ попадает в полосу $P^{(3)}(1, l_m)$, расположенную между полосами $\underline{\Pi}(l_m)$ и $\overline{\Pi}(l_m)$. Если имеет место включение $t(m) \in P^{(3)}_1(1, l_m)$, то из ($18_4$) вытекает равенство $\psi(t(m)) = \omega^{(2)}_{l_m \cdot 2^{l_m}, l_m}(t(m))$, а из ($16_3$) следует хотя бы одно из неравенств $\varphi(t(m)) \leq \underline{E}(t(m))$ или $\ln \varphi(t(m)) \leq \zeta(t(m))/2$. При выполнении первого неравенства, рассуждая аналогично случаю включения $t(m) \in \underline{\Pi}(l_m)$, устанавливаем оценку (36). Если же имеет место второе неравенство, то, используя (23), (32_1) и (32_2), получаем оценки

$$R_x((1,2), d, t(m)) \leq \zeta(t(m))/2 - t_1(m) - 2t_2(m) + \ln \psi(t(m)) - (d, \ln t(m)) \leq$$

$$\leq -(t_1(m) + 3t_2(m))/2 + 2\|t(m)\|^{2/3} \leq -\|t(m)\|/2 + 2\|t(m)\|^{2/3} \leq 0. \tag{37}$$

Пусть справедливо включение $t(m) \in P^{(3)}_2(1, l_m)$. Тогда имеет место равенство $\ln \varphi(t(m)) =$ $= \zeta(t(m))/2$ и, следовательно, выполнено неравенство (37). Если же $t(m)$ принадлежит полосе $P^{(3)}_3(1, l_m)$, то справедливы равенство $\psi(t(m)) = \omega^{(3)}_{1, l_m}(t(m))$ и хотя бы одно из неравенств $\ln \varphi(t(m)) \leq \zeta(t(m))/2$ или $\varphi(t(m)) \leq \overline{E}(t(m))$. В случае выполнения первого неравенства снова получаем оценку (37), а при справедливости второго рассуждениями, аналогичными проделанным в случае включения $t(m) \in \Pi^{(3)}(l_m)$, доказываем оценку (34).

Пусть сейчас $t(m)$ принадлежит полосе $P^{(1)}(1, l_m+1)$, расположенной между полосами $\overline{\Pi}(l_m)$ и $\underline{\Pi}(l_m+1)$. Если выполнено включение $t(m) \in P_1^{(1)}(1, l_m+1)$, то из (18_5) и (16_4) следуют равенство $\psi(t(m)) = \omega^{(4)}_{l_m \cdot 2^{l_m}, l_m}(t(m))$ и хотя бы одно из неравенств $\varphi(t(m)) \le \overline{E}(t(m))$ или $\ln\varphi(t(m)) \le \zeta(t(m))/2$. Если имеет место первое неравенство, то аналогично случаю включения $t(m) \in \Pi^{(4)}(l_m)$ получаем оценку (35). Если выполнено второе неравенство, то имеем оценку (37). В случае принадлежности $t(m)$ полосе $P_2^{(1)}(1, l_m+1)$ справедливо равенство $\ln\varphi(t(m)) = \zeta(t(m))/2$, дающее оценку (37). Если же имеет место включение $t(m) \in$ $\in P_3^{(1)}(1, l_m+1)$, то выполнены равенство $\psi(t(m)) = \omega^{(1)}_{1, l_m+1}(t(m))$ и хотя бы одно из неравенств $\ln\varphi(t(m)) \le \zeta(t(m))/2$ или $\varphi(t(m)) \le \underline{E}(t(m))$. При выполнении первого неравенства имеем оценку (37), а при справедливости второго неравенства аналогично случаю принадлежности $t(m)$ полосе $\underline{\Pi}(l_m)$ получаем оценку (36).

Следовательно, установлено неравенство $\beta^{(3)}(d) \le 0$, а вместе с ним и первое условие определения (4) верхней характеристической степени для вектора d. Второе же условие этого определения реализуется по последовательности $\tau(m)$, построенной выше. Таким образом, доказано совпадение левого граничного верхнего степенного множества $\overline{D}_x(\lambda')$ и заданной кривой $D^{(3)}$ на всюду плотном множестве $D^{(3)}_\infty$. В силу непрерывности кривых $\overline{D}_x(\lambda')$ и $D^{(3)}$ это устанавливает справедливость включения $D^{(3)} \subset \overline{D}_x(\lambda')$. Из этого включения в случаях кривой $D^{(3)}$ вида $1_3)$ или $2_3)$ следует равенство $\overline{D}_x(\lambda') = D^{(3)}$. Докажем, что и в случае кривой $D^{(3)}$ вида $3_3)$ левое граничное верхнее степенное множество $\overline{D}_x(\lambda')$ не может быть больше этой кривой. Возьмем любую верхнюю степень $d \in \overline{D}_x(\lambda')$. Тогда из первого условия определения (4) верхней характеристической степени по некоторой последовательности $\{t(m)\} \uparrow +\infty$ вида $t(m) = (t_2(m)^{3\sqrt[3]{t_2(m)}}, t_2(m))$, $t(m) \in \Pi^{(3)}(l_m)$, имеем неравенство $\Delta_1^{(3)}(0,0) - d_1 \le 0$. А поскольку кривая $\overline{D}_x(\lambda')$ замкнута и строго монотонно убывает, то установлено совпадение $\overline{D}_x(\lambda') = D^{(3)}$ и в этом случае.

5. Построение уравнения. Ограниченность коэффициентов. Построенная функция $x(t) > 0$ является решением уравнения (1_1) с коэффициентами

$$a_k(t) = \frac{1}{x(t)}\frac{\partial x(t)}{\partial t_k} = \frac{\partial \ln x(t)}{\partial t_k}, \quad t \in R^2_{>1}, \quad k = 1, 2,$$

удовлетворяющими условию полной интегрируемости в силу бесконечной в $R^2_{>1}$ дифференцируемости $\ln x(t)$. Установим ограниченность этих коэффициентов.

Вначале покажем ограниченность производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\varphi(t)$, $k = 1, 2$. Очевидно, что справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_k}\ln \underline{E}(t)\right| = \left|\frac{e^{-t_k}}{e^{-t_1}+e^{-t_2}}\right| \le 1, \quad t \in R^2_{>1}, \tag{38_1}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_k}\ln \overline{E}(t)\right| = \left|1 + \frac{e^{-t_k}}{e^{-t_1}+e^{-t_2}}\right| \le 2, \quad t \in R^2_{>1}, \tag{38_2}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_k}\left(\frac{\zeta(t)}{2}\right)\right| = \frac{1}{2}, \quad t \in R^2_{>1}. \tag{38_3}$$

Из неравенства (L_1) леммы на всяком отрезке $[\xi_1, \xi_2]$ длины $\xi_2 - \xi_1 \ge 2$ получаем оценки

$$\left|\frac{\zeta(t)}{2}\frac{\partial}{\partial t_k}e_{01}(\ln\zeta(t); \xi_1, \xi_2)\right| \le 2, \quad \left|\ln\underline{E}(t)\frac{\partial}{\partial t_k}e_{01}(\ln\zeta(t); \xi_1, \xi_2)\right| \le \frac{4\ln 2}{\zeta(t)} \le 2\ln 2,$$

$$\left|\ln\overline{E}(t)\frac{\partial}{\partial t_k}e_{01}(\ln\zeta(t); \xi_1, \xi_2)\right| \le 4 + 2\ln 2, \quad t \in R^2_{>1},$$

которые в силу (16_1)–(16_5) и вместе с неравенствами (38_1)–(38_3) дают ограниченность производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\varphi(t)$, $k=1,2$.

Докажем теперь ограниченность производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\psi(t)$, $k=1,2$. Оценим вначале частные производные $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\psi_{i,l}^{(q)}(t)$, $q=\overline{1,4}$, $k=1,2$, в полосе $\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i\in I_l$, $l\in N$. Принимая во внимание $(8_{1,1})$–$(8_{2,2})$, отметим, что скалярное произведение $(\Delta^{(q)}(i,l),\ln t)$ присутствует в определении функции $\ln\psi_{i,l}^{(q)}(t)$ лишь в секторе $\tilde{S}^{(q)}(i,l)$, определенном следующим образом. Если угловой коэффициент $k^{(q)}(i,l)$ не равен -1, то положим

$$\tilde{S}^{(q)}(i,l)\equiv\left\{t\in R^2_{>1}:\left|\frac{\ln t_2}{\ln t_1}-\Theta_{i,l}^{(q)}\right|\le\tau_l^{(q)}+\frac{1}{4}\right\},\quad q=1,4,$$

$$\tilde{S}^{(q)}(i,l)\equiv\left\{t\in R^2_{>1}:\left|\frac{\ln t_2}{\ln t_1}-\Theta_{i,l}^{(q)}\right|\le\tau_l^{(q)}+\frac{\Omega_l^{(q)}}{4}\right\},\quad q=2,3.$$

Если же $k^{(q)}(i,l)=-1$, то в случае $q=1,4$ определим $\tilde{S}^{(q)}(i,l)\equiv\{t\in R^2_{>1}:e-2\le t_2/t_1\le\le 4e\}$, а в случае $q=2,3$ положим $\tilde{S}^{(q)}(i,l)\equiv\{t\in R^2_{>1}:1/(4e)\le t_2/t_1\le 1/e+1/2\}$. Так как в полосе $\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i\in I_l$, $l\in N$, $q=\overline{1,4}$, выполняется неравенство $\zeta(t)\ge\mu_l^{(q)}\exp(\exp(2))$, то в пересечении $\tilde{S}^{(q)}(i,l)\cap\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i\in I_l$, $l\in N$, $q=\overline{1,4}$, получаем оценки

$$t_k\ge\nu_l^{(q)},\quad k=1,2.\tag{39}$$

Заметим, что ограниченность в полосе $\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i\in I_l$, $l\in N$, $q=\overline{1,4}$, частных производных функции $\ln\psi_{i,l}^{(q)}(t)$, $q=1,4$, определенной равенствами $(8_{1,1})$ и (9_1), установлена в работе [2].

Оценим сейчас частные производные функции $\ln\psi_{i,l}^{(q)}(t)$, $q=2,3$, заданной равенствами $(8_{2,1})$ и (9_2). Из разбиения квадранта $R^2_{>1}$, неравенств (39) и $\nu_l^{(q)}\ge 1$ при $t\in\tilde{S}^{(q)}(i,l)\cap\cap\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i\in I_l$, $l\in N$, $q=\overline{1,4}$, следуют оценки

$$\left|\frac{\partial}{\partial t_k}(\Delta^{(q)}(i,l),\ln t)\right|=\frac{|\Delta_k^{(q)}(i,l)|}{t_k}\le\frac{\Delta_1(l)}{\nu_l^{(q)}}\le 1,\quad k=1,2.\tag{40}$$

Также очевидны оценки

$$\frac{\partial}{\partial t_k}\|\ln t\|^2=\frac{2\ln t_k}{t_k}\le 2,\quad k=1,2.\tag{41}$$

Используя первое неравенство леммы, неравенство (39), а также неравенства $\Omega_l^{(q)}/4\le\le\ln t_2/\ln t_1\le 2$ и $\tau_l^{(q)}\le\Omega_l^{(q)}/2$, в пересечении $\tilde{S}^{(q)}(i,l)\cap\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i\in I_l$, $l\in N$, $q=2,3$, имеем оценки

$$\left|(\Delta^{(q)}(i,l),\ln t)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(1-e_{01}\left(\frac{\ln t_2}{\ln t_1};\Theta_{i,l}^{(q)}+\tau_l^{(q)},\Theta_{i,l}^{(q)}+\tau_l^{(q)}+\frac{\Omega_l^{(q)}}{4}\right)\right)\right|\le$$

$$\le 2\|\Delta^{(q)}(i,l)\|(\ln t_1+\ln t_2)\exp[32(\Omega_l^{(q)})^{-2}]\frac{\ln t_2}{t_1\ln^2 t_1}\le 12\Delta_1(l)\frac{\exp[8(\tau_l^{(q)})^{-2}]}{\nu_l^{(q)}}\le 1,\tag{42$_1$}$$

$$\left|(\Delta^{(q)}(i,l),\ln t)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(1-e_{01}\left(\frac{\ln t_2}{\ln t_1};\Theta_{i,l}^{(q)}+\tau_l^{(q)},\Theta_{i,l}^{(q)}+\tau_l^{(q)}+\frac{\Omega_l^{(q)}}{4}\right)\right)\right|\le$$

$$\leq 2\Delta_1(l)(\ln t_1 + \ln t_2)\frac{\exp[32(\Omega_l^{(q)})^{-2}]}{t_2 \ln t_1} \leq 1, \tag{42_2}$$

$$\left|(\Delta^{(q)}(i,l), \ln t)\frac{\partial}{\partial t_k} e_{01}\left(\frac{\ln t_2}{\ln t_1}; \Theta_{i,l}^{(q)} - \tau_l^{(q)} - \frac{\Omega_l^{(q)}}{4}, \Theta_{i,l}^{(q)} - \tau_l^{(q)}\right)\right| \leq 1, \quad k = 1,2, \tag{42_3}$$

$$\|\ln t\|^2 \left|\frac{\partial}{\partial t_1} e_{01}\left(\frac{\ln t_2}{\ln t_1}; \Theta_{i,l}^{(q)}, \Theta_{i,l}^{(q)} + \tau_l^{(q)}\right)\right| \leq 2\exp[2(\tau_l^{(q)})^{-2}]\frac{\ln t_2}{t_1 \ln^2 t_1}(\ln^2 t_1 + \ln^2 t_2) \leq$$

$$\leq 20\exp[2(\tau_l^{(q)})^{-2}]\frac{\ln t_1}{t_1} \leq 1, \tag{42_4}$$

$$\|\ln t\|^2 \left|\frac{\partial}{\partial t_2} e_{01}\left(\frac{\ln t_2}{\ln t_1}; \Theta_{i,l}^{(q)}, \Theta_{i,l}^{(q)} + \tau_l^{(q)}\right)\right| \leq \frac{2\exp[2(\tau_l^{(q)})^{-2}]}{t_2 \ln t_1}(\ln^2 t_1 + \ln^2 t_2) \leq$$

$$\leq 40\exp[2(\tau_l^{(q)})^{-2}]\frac{\ln t_2}{\Omega_l^{(q)} t_2} \leq 1, \tag{42_5}$$

$$\|\ln t\|^2 \left|\frac{\partial}{\partial t_k}\left(1 - e_{01}\left(\frac{\ln t_2}{\ln t_1}; \Theta_{i,l}^{(q)} - \tau_l^{(q)}, \Theta_{i,l}^{(q)}\right)\right)\right| \leq 1, \quad k = 1,2. \tag{42_6}$$

Оценки (40), (41) и (42_1)–(42_6), равенства (6) и (7) и доказывают ограниченность в полосе $\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i \in I_l$, $l \in N$, $q = 2,3$, частных производных функции $\ln\psi_{i,l}^{(q)}(t)$, $q = 2,3$, заданной равенствами ($8_{2,1}$) и (9_2).

Перейдем теперь к доказательству ограниченности в полосе $\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i \in I_l$, $l \in N$, $q = 1,4$, частных производных функции $\ln\psi_{i,l}^{(q)}(t)$, $q = 1,4$, определенной равенством ($8_{1,2}$). Применяя второе неравенство леммы, в пересечении $\tilde{S}^{(q)}(i,l) \cup \Pi L^{(q)}(i,l)$ получаем оценки

$$\left|(\Delta^{(q)}(i,l), \ln t)\frac{\partial}{\partial t_1}\left(1 - e_{01}\left(\frac{t_2}{t_1}; 3e, 4e\right)\right)\right| \leq 4\Delta_1(l)\frac{(\ln t_1 + \ln t_2)t_2}{t_1^2} \leq 16e\frac{\Delta_1(l)}{\sqrt{\nu_l^{(q)}}}\frac{2\ln t_1 + \ln 4e}{\sqrt{t_1}} \leq 1,$$

$$\left|(\Delta^{(q)}(i,l), \ln t)\frac{\partial}{\partial t_2}\left(1 - e_{01}\left(\frac{t_2}{t_1}; 3e, 4e\right)\right)\right| \leq 4\Delta_1(l)\frac{\ln t_1 + \ln t_2}{t_1} \leq 4\frac{\Delta_1(l)}{\sqrt{\nu_l^{(q)}}}\frac{2\ln t_1 + \ln 4e}{\sqrt{t_1}} \leq 1,$$

$$\left|(\Delta^{(q)}(i,l), \ln t)\frac{\partial}{\partial t_k} e_{01}\left(\frac{t_2}{t_1}; e-2, e\right)\right| \leq 1, \quad k = 1,2,$$

которые вместе с очевидными оценками

$$\|\ln t\|^2 \left|\frac{\partial}{\partial t_k} e_{101}\left(\frac{t_2}{t_1}; e, 2e, 3e\right)\right| \leq 1, \quad t \in \tilde{S}^{(q)}(i,l) \cap \Pi L^{(q)}(i,l), \quad k = 1,2,$$

и устанавливают ограниченность в полосе $\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i \in I_l$, $l \in N$, $q = 1,4$, частных производных функции $\ln\psi_{i,l}^{(q)}(t)$, $q = 1,4$, определенной равенством ($8_{1,2}$).

Аналогично, но с применением уже первого неравенства леммы, можно показать и ограниченность в полосе $\Pi L^{(q)}(i,l)$, $i \in I_l$, $l \in N$, $q = 2,3$, частных производных функции $\ln\psi_{i,l}^{(q)}(t)$, $q = 2,3$, заданной формулой ($8_{2,2}$).

Таким образом, в силу (17) установлена ограниченность частных производных функции $\ln u_l^{(q)}(t)$, $q = \overline{1,4}$, в каждой "основной" полосе $\Pi^{(q)}(i,l)$, $i \in I_l$, $l \in N$, $q = \overline{1,4}$. Принимая снова во внимание (17), для доказательства ограниченности этих частных производных в "переходной" полосе $P^{(q)}(i+1,l)$, $i\in I_l^1$, $l\in N$, $q=\overline{1,4}$, достаточно показать ограниченность произведений

$$[\ln\psi^{(q)}_{i+1,l}(t)-\ln\psi^{(q)}_{i,l}(t)]\frac{\partial}{\partial t_k}e_{01}(\ln\zeta(t);\ln\alpha^{(q)}_{i+1,l},\ln\beta^{(q)}_{i+1,l}),\quad k=1,2.$$

Поскольку $\ln\beta^{(q)}_{i+1,l}-\ln\alpha^{(q)}_{i+1,l}=\ln e^6=6>2$ и для всех $t\in P^{(q)}(i+1,l)$ выполнены неравенства $\zeta(t)\ge\nu^{(q)}_l\ge c$, то, применяя второе неравенство леммы, имеем оценки

$$\left|\ln\psi^{(q)}_{j,l}(t)\frac{\partial}{\partial t_k}e_{01}(\ln\zeta(t);\ln\alpha^{(q)}_{i+1,l},\ln\beta^{(q)}_{i+1,l})\right|\le 4\frac{\Delta_1(l)(\ln t_1+\ln t_2)\chi_{\tilde S^{(q)}(j,l)}(t)+\|\ln t\|^2}{\zeta(t)}\le 1,$$

в которых $\chi_{\tilde S^{(q)}(j,l)}(t)$ – характеристическая функция множества $\tilde S^{(q)}(j,l)$ и $j=i,i+1$. Из этих оценок и ограниченности частных производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\psi^{(q)}_{i,l}(t)$ и $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\psi^{(q)}_{i+1,l}(t)$ в "переходной" полосе $P^{(q)}(i+1,l)$ получаем ограниченность частных производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln u^{(q)}_l(t)$ и в этой полосе.

Тем самым в случаях кривой $D^{(q)}$ вида 1_q) и 2_q) в силу определения (18_1) функции $\psi(t)$ доказана ограниченность частных производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\psi(t)$, $k=1,2$, в полосе $\Pi^{(q)}(l)$, $l\in N$, $q=\overline{1,4}$.

Перейдем к установлению ограниченности производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\psi(t)$, $k=1,2$, в полосе $\Pi^{(q)}(l)$, $l\in N$, $q=\overline{1,4}$, в случае кривой $D^{(q)}$ вида 3_q). В каждой полосе $\Pi^{(q)}(i,l)$, $i\in I_l$, $l\in N$, $q=1,4$, получаем оценки

$$\left|(\Delta^{(q)}(0,0),\ln t)\frac{\partial\chi^{(q)}(t)}{\partial t_1}\right|\le 4\|\Delta^{(q)}(0,0)\|(\ln t_1+\ln t_2)\frac{\ln t_2}{3t_1^{4/3}\ln^2 t_1}(\ln t_1+3)\le$$

$$\le 4\|\Delta^{(q)}(0,0)\|\frac{\ln t_1+3+3\sqrt[3]{t_1}\ln t_1+9\sqrt[3]{t_1}}{t_1}\le\|\Delta^{(q)}(0,0)\|b,$$

$$\left|(\Delta^{(q)}(0,0),\ln t)\frac{\partial\chi^{(q)}(t)}{\partial t_2}\right|\le 4\|\Delta^{(q)}(0,0)\|\frac{\ln t_1+\ln t_2}{\sqrt[3]{t_1}t_2\ln t_1}\le 4\|\Delta^{(q)}(0,0)\|\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t_1}t_2}+\frac{3}{t_2}\right)\le\|\Delta^{(q)}(0,0)\|b,$$

$$\left|\ln\psi^{(q)}_{i,l}(t)\frac{\partial\chi^{(q)}(t)}{\partial t_1}\right|\le 4(\Delta_1(l)(\ln t_1+\ln t_2)\chi_{\tilde S^{(q)}(i,l)}(t)+\|\ln t\|^2)\frac{\ln t_2}{3t_1^{4/3}\ln^2 t_1}(\ln t_1+3)\le$$

$$\le 4\frac{\Delta_1(l)}{t_1}\chi_{\tilde S^{(q)}(i,l)}(t)(\ln t_1+3+3\sqrt[3]{t_1}\ln t_1+9\sqrt[3]{t_1})+$$

$$+\frac{4(\ln^2 t_1+3\ln t_1+9(\sqrt[3]{t_1})^2\ln^2 t_1+27(\sqrt[3]{t_1})^2\ln t_1)}{t_1}\le\chi_{\tilde S^{(q)}(i,l)}(t)+b,$$

$$\left|\ln\psi^{(q)}_{i,l}(t)\frac{\partial\chi^{(q)}(t)}{\partial t_2}\right|\le\frac{4(\Delta_1(l)(\ln t_1+\ln t_2)\chi_{\tilde S^{(q)}(i,l)}(t)+\|\ln t\|^2)}{\sqrt[3]{t_1}t_2\ln t_1}\le$$

$$\le 4\left(\Delta_1(l)\chi_{\tilde S^{(q)}(i,l)}(t)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{t_1}t_2}+\frac{3}{t_2}\right)+\frac{\ln t_1}{\sqrt[3]{t_1}}+\frac{3\ln t_2}{t_2}\right)\le\chi_{\tilde S^{(q)}(i,l)}(t)+b$$

с некоторой постоянной $b>0$. Аналогичные оценки можно установить и для $q=2,3$. Из этих оценок и ограниченности в полосе $\Pi^{(q)}(l)$, $l\in N$, $q=\overline{1,4}$, производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln u^{(q)}_l(t)$

и следует ограниченность производных функции $\ln\psi(t)$ в этой полосе в случае кривой $D^{(q)}$ вида 3_q).

В силу задания "переходных" полос $P^{(q)}(1,l)$, $l \in N$, $q = \overline{1,4}$, рассуждениями, аналогичными проведенным в полосах $P^{(q)}(i+1,l)$, $i \in I_l^1$, $l \in N$, $q = \overline{1,4}$, можно показать ограниченность производных $\dfrac{\partial}{\partial t_k}\ln\psi(t)$, $k=1,2$, и в этих полосах.

Таким образом, установлена ограниченность коэффициентов $a_i(t)$, $i=1,2$, во всем квадранте $R^2_{>1}$. Теорема 1 полностью доказана.

Теорема 1 показывает, что граничные степенные множества решения могут располагаться произвольным образом друг относительно друга в отличие от характеристических множеств, на взаимное расположение которых накладывается условие [4]

$$\sup\{p_i : p \in P_x\} \le \inf\{\lambda_i : \lambda \in \Lambda_x\}, \quad i = 1,2.$$

Полное совместное описание граничных степенных множеств содержит следующая

Теорема 2. *Множества* $D^{(q)}$, $q=\overline{1,4}$, *являются соответственно левым* $\underline{D}_x(p')$, *правым* $\underline{D}_x(p'')$ *граничными нижними и левым* $\overline{D}_x(\lambda')$, *правым* $\overline{D}_x(\lambda'')$ *граничными верхними степенными множествами какого-то нетривиального решения* $x(t)$, *нижнее характеристическое* P_x *и характеристическое* Λ_x *множества которого состоят более чем из одной точки, некоторой вполне интегрируемой системы Пфаффа (1) с ограниченными непрерывно дифференцируемыми коэффициентами тогда и только тогда, когда множества* $D^{(1)}$, $D^{(2)}$ *(множества* $D^{(3)}$, $D^{(4)}$ *) представимы в виде замкнутых выпуклых вверх (вниз) монотонно убывающих неограниченных соответственно справа и снизу, слева и сверху кривых двумерной плоскости, имеющих отрицательный соответственно не меньший, не больший (не больший, не меньший)* -1 *угловой коэффициент всякой касательной в каждой своей внутренней точке, или пустые.*

Замечание. Использованное в работе [2] множество $I_l = \{0,1,\ldots,l\cdot 2^l\}$ должно иметь вид $I_l = \{1,\ldots,l\cdot 2^l\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изобов Н.А., Крупчик Е.Н.* // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 3. С. 308–319.
2. *Изобов Н.А., Крупчик Е.Н.* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 10. С. 1310–1321.
3. *Изобов Н.А., Крупчик Е.Н.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 616–627.
4. *Изобов Н.А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1623–1630.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию
18 июня 2002 г.