ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 3, с. 354–358

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.7

ПОДВИЖНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ ПРАВОЙ ЧАСТИ

© 2003 г. С. Л. Соболевский

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$w^{(n)} = F(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z), \tag{1}$$

где $n \in N$, F – некоторая аналитическая функция. В настоящей работе мы получим некоторые необходимые условия, которым должны удовлетворять алгебраические особенности F для того, чтобы уравнение (1) не имело подвижных критических особых точек.

Теорема 1. *Пусть*

$$F = f_0(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} (w^{(s)} - h(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z))^{\sigma_i} f_i(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z),$$

где $k \in N$, $s \leq n-2$; f_i – функции, аналитические в окрестности некоторой точки $\lambda_0 = (w_0^{n-1}, w_0^{n-2}, \ldots, w_0, z_0) \in C^{n+1}$, причем $f_i(\lambda_0) \neq 0$ для $i = \overline{1,k}$; h – функция, аналитическая в окрестности точки $\lambda_0' = (w_0^{s-1}, w_0^{s-2}, \ldots, w_0, z_0)$, причем $w_0^s = h(\lambda_0')$; σ_i – нецелые рациональные числа такие, что $-1 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k$. Тогда уравнение (1) имеет подвижные критические особые точки.

Доказательство. Рассмотрим случай $\sigma_1 < 0$. Пусть функции f_i, $i = \overline{0,k}$, аналитичны и при $i > 0$ не обращаются в нуль в окрестности U точки λ_0. Параметрическая замена переменных $z = z_0 + Z\alpha^M$, $w^{(j)} = w_0^j + w^j\alpha^M$, $j = \overline{1,s}$, $w^{(j)} = w_1^j + w^j\alpha^M$, $j = \overline{s+1, n-2}$, $w^{(n-1)} = w_1^{n-1} + w^{n-1}\alpha^{M(\sigma_1+1)}$, где $\lambda_1 = (w_1^{n-1}, w_1^{n-2}, \ldots, w_1^{s+1}, w_0^s, \ldots, w_0, z_0) \in U$, а M – натуральное число такое, что числа $M\sigma_i$ целые для всех i, приводит уравнение (1) к системе

$$\begin{gathered}\frac{dw^j}{dZ} = w_0^{j+1} + w^{j+1}\alpha^M, \quad j = \overline{1, n-2}, \\ \frac{dw^{n-1}}{dZ} = \left(w^s - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\partial h}{\partial w^i}(\lambda_0')w^i - \frac{\partial h}{\partial z}(\lambda_0')Z\right)^{\sigma_1} f_1(\lambda_1) + o(\alpha).\end{gathered} \tag{2}$$

Подходящим выбором λ_1 всегда можно добиться того, чтобы

$$\gamma = w_1^{s+1} - \sum_{i=0}^{s-1} \frac{\partial h}{\partial w^i}(\lambda_0')w_0^{i+1} - \frac{\partial h}{\partial z}(\lambda_0') \neq 0.$$

Система (2) при $\alpha = 0$ имеет общее решение $w^j = Zw_0^{j+1} + c_j$, $j = \overline{0, n-2}$, $w^{n-1} = f_1(\lambda_1)/(\gamma(\sigma_1+1))(\gamma Z + c_s - \sum_{i=0}^{s-1}(\partial h/\partial w^i)(\lambda_0')c_i)^{\sigma_1+1} + c_{n-1}$, где $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in C$. Следовательно, система (2) при произвольном близком к нулю α и исходное уравнение (1) будут иметь подвижные критические особые точки.

Пусть теперь $\sigma_1 > 0$. Для доказательства теоремы 1 в этом случае будем рассматривать дифференциальные следствия уравнения (1) (под дифференциальным следствием мы здесь и далее будем понимать уравнения, полученные из исходного многократным дифференцированием и исключением всех, кроме старшей, производных порядка не ниже порядка исходного уравнения из предыдущих дифференциальных следствий и исходного уравнения). Нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть правая часть некоторого дифференциального следствия уравнения*

$$w^{(n)} = H(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) +$$
$$+ (w^{(s)} - h(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z))^{\rho} F(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z), \tag{3}$$

где F – алгеброидная в некоторой точке $\lambda_0 = (w_0^{n-1}, w_0^{n-2}, \ldots, w_0^0, z_0) \in C^{n+1}$ функция; H – аналитическая в точке λ_0 функция; s – целое неотрицательное число, меньшее n; h – аналитическая в точке $\lambda_0' = (w_0^{s-1}, w_0^{s-2}, \ldots, w_0^0, z_0)$ функция, причем $w_0^s = h(\lambda_0')$; ρ – положительное действительное число, имеет критический полюс порядка меньше 1 вдоль кривой $w^{(s)} = h(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z)$. Тогда уравнение (3) допускает подвижные критические особые точки.

Доказательство. Дифференциальные следствия уравнения (3) имеют вид

$$w^{(n+j)} = H_j(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) +$$
$$+ (w^{(s)} - h(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z))^{\rho_j} F_j(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z), \quad j = \overline{0, m}, \tag{4}$$

где m – натуральное число; F_j – алгеброидные в некоторой достаточно близкой к λ_0 точке $\lambda_1 = (w_1^{n-1}, w_1^{n-2}, \ldots, w_1^0, z_1) \in C^{n+1}$ функции, причем $F_m(\lambda_1) \neq 0$ и $w_1^s = h(\lambda_1')$, где $\lambda_1' = (w_1^{s-1}, w_1^{s-2}, \ldots, w_1^0, z_1)$; H_j – аналитические в точке λ_1 функции; ρ_j – действительные числа, $\rho_j > 0$ $\forall j = \overline{1, m-1}$ и $\rho_m \in (-1, 0)$. Положим $w_1^{n+j} = H_j(\lambda_1) + (w_1^s - h(\lambda_1'))^{\rho_j} F_j(\lambda_1)$ для $j = \overline{0, m-1}$, где $H_0 \equiv H$, $F_0 \equiv F$, $\rho_0 = \rho$.

Мы можем считать, что $\gamma = w_1^{s+1} - \sum_{j=0}^{s-1} (\partial h / \partial w^{(j)})(\lambda_1') w_1^{j+1} - (\partial h / \partial z)(\lambda_1')$ отлично от нуля. Действительно, при $s < n-1$ этого можно добиться соответствующим выбором λ_1, а именно w_1^{s+1}. При $s = n-1$ неравенство $\gamma \neq 0$ можно обеспечить заменой переменного в уравнении (3) (например, $w = v + z^n$), так как вычитаемое выражение для γ инвариантно относительно замен переменных в (3), а уменьшаемое w_1^n, равное значению правой части уравнения (3) в точке λ_1, не является таковым.

Рассмотрим систему уравнений (3), (4). Замена $z = z_1 + \alpha^M Z$, $w^{(j)} = w_1^j + \alpha^M w^j$, $j = \overline{0, n-1}$, $w^{(n+j)} = w_1^{n+j} + \alpha^{M\varepsilon_j} w^{n+j}$, $j = \overline{0, m-1}$, где $0 < \varepsilon_j < \min\{1, \rho_j\}$, $0 < \varepsilon_{m-1} < \min\{1, \rho_{m-1}, 1 + \rho_m\}$, а M – факториал достаточно большого натурального числа, приводит систему (3), (4) к виду

$$\frac{dw^j}{dZ} = w_1^{j+1} + o(\alpha), \quad j = \overline{0, n-1},$$
$$\frac{dw^{n+j}}{dZ} = o(\alpha) = \alpha^{(1-\varepsilon_j)M} [w_1^{n+j+1} + o(\alpha)], \quad j = \overline{0, m-2}, \tag{5}$$
$$\frac{dw^{n+m-1}}{dZ} = \alpha^{M(1+\rho_m-\varepsilon_{m-1})} \left[\left(w^s - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\partial h}{\partial w^{(j)}}(\lambda_1') w^j - \frac{\partial h}{\partial z}(\lambda_1') Z \right)^{\rho_m} F_m(\lambda_1) + o(\alpha) \right],$$

$$w^{n+j} = o(\alpha) = \alpha^{M(\rho_j - \varepsilon_j)} \left[\left(w^s - \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\partial h}{\partial w^{(j)}}(\lambda_1') w^j - \frac{\partial h}{\partial z}(\lambda_1') Z \right)^{\rho_j} F_j(\lambda_1) + o(\alpha) \right], \quad j = \overline{0, m-1}. \tag{6}$$

При $\alpha \neq 0$ решения системы (5) с начальными данными, удовлетворяющими (6) в какой-либо точке $Z = Z_*$, удовлетворяют системе (6) при всех Z и им соответствуют решения уравнения (3). При этом если последнее не имеет подвижных критических особых точек, то найдется такое положительное действительное число Δ, что решения системы (5), (6) при достаточно малых по модулю ненулевых α однозначны в области $|Z| < \Delta$. Рассмотрим общее решение в форме Коши системы (5) $w^j = \varphi_j(Z, Z_*, w_*^l, l = \overline{0, n+m-1}, \alpha)$, $j = \overline{0, n+m-1}$. Зафиксируем произвольные Z_*, w_*^l, $l = \overline{0, n-1}$, такие, что $w_*^s = \sum_{j=0}^{s-1}(\partial h/\partial w^{(j)})(\lambda_1')w_*^j$, и положим $w_*^{n+j} = w_*^{n+j}(\alpha)$, $j = \overline{0, m-1}$, определенными через Z_*, w_*^l из системы (6). Очевидно, это всегда можно сделать так, чтобы $\varphi(Z, \alpha)$ разлагалось в ряд по α на некотором контуре Г, содержащем Z^* и окружающем нуль. Для φ_{n+m-1} это разложение будет иметь вид $\varphi_{n+m-1}(Z, \alpha) = w_*^{n+j}(\alpha) + \alpha^{M(1+\rho_m-\varepsilon_{m-1})}[\gamma^{\rho_m} F_m(\lambda_1)(1+\rho_m)^{-1} Z^{1+\rho_m} + o(\alpha)]$, что противоречит однозначности φ по Z в области $|Z| < \Delta$ при достаточно малых по модулю ненулевых α. Лемма 1 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось заметить, что $m = ([\sigma_1]+1)$-е дифференциальное следствие уравнения (1) имеет вид

$$w^{(n+m)} = \sum_{i=1}^{q}(w^{(s)} - h(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z))^{\beta_i} g_i(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z),$$

где $q \in N$, g_i – функции, аналитические и не равные нулю в окрестности некоторой достаточно близкой к λ_0 точки $\lambda_1 = (w_1^{n-1}, w_1^{n-2}, \ldots, w_1, z_1) \in C^{n+1}$ такой, что $w_1^s = h(\lambda_1')$, где $\lambda_1' = (w_1^{s-1}, w_1^{s-2}, \ldots, w_1, z_1)$ и $\gamma = w_1^{s+1}\sum_{i=0}^{s-1}(\partial h/\partial w^i)(\lambda_0')w_1^{i+1} - (\partial h/\partial z)(\lambda_1') \neq 0$, β_i – рациональные числа, причем $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_q$ и $\beta_1 = \sigma_1 - m = \{\sigma_1\} - 1 \in (-1; 0)$,

$$g_1(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) = \sigma_1(\sigma_1 - 1)\cdots(\sigma_1 - m + 1) f_1(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z)\times$$

$$\times\left(w^{(s+1)} - \sum_{j=0}^{s-1} w^{(j+1)}\frac{\partial h}{\partial w^{(j)}}(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z) - \frac{\partial h}{\partial z}(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z)\right)^m,$$

т.е. $g_1(\lambda_1) = \gamma^m \sigma_1(\sigma_1 - 1)\cdots(\sigma_1 - m + 1) f_1(\lambda_1) \neq 0$. Таким образом, правая часть последнего уравнения имеет критический полюс порядка ниже 1 вдоль $w^{(s)} = h(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z)$, откуда в силу леммы 1 уравнение (1) допускает подвижные критические особые точки. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Для того чтобы алгебраически неприводимое уравнение*

$$(w^{(n)})^m = \sum_{j=0}^{m-1} P_j(w^{(n-2)}, w^{(n-3)}, \ldots, w, z)(w^{(n)})^j,$$

где $m \geq 1$, P_j – полиномы по w и ее производным с аналитическими по z коэффициентами, не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы $m = 1$.

Теорема 2. *Пусть*

$$F = f_0(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) +$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(w^{(n-1)} - h(w^{(n-2)}, w^{(n-3)}, \ldots, w, z))^{\sigma_i} f_i(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z),$$

где $k \in N$; f_i – функции, аналитические в окрестности некоторой точки $\lambda_0 = (w_0^{n-1}, w_0^{n-2}, \ldots, w_0, z_0) \in C^{n+1}$, причем $f_i(\lambda_0) \neq 0$; h – функция, аналитическая в окрестности точки $\lambda_0' = (w_0^{n-2}, w_0^{n-3}, \ldots, w_0, z_0)$, причем $w_0^{n-1} = h(\lambda_0')$; σ_i – нецелые рациональные числа такие, что $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_k$. Тогда для того, чтобы уравнение (1) не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы

$$\gamma = f_0(\lambda_0) - \sum_{i=0}^{n-2}\frac{\partial h}{\partial w^i}(\lambda_0')w_0^{i+1} - \frac{\partial h}{\partial z}(\lambda_0') = 0$$

и, если $\sigma_1 < 1$, чтобы $\sigma_1 = 1 - 1/\mu$, где $\mu \in N$, и числа $\mu\sigma_i$ для всех $i = \overline{1, k}$ были целыми.

Доказательство. Пусть $\gamma \neq 0$. Тогда рассмотрим $m = ([\sigma_1]+1)$-е дифференциальное следствие уравнения (1), где производные $w^{(n)}, \ldots, w^{(n+m-1)}$ выражены из уравнения (1) и $(m-1)$-го его дифференциального следствия $w^{(n+j)} = H_j(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z)$, $j = \overline{0, m-1}$ ($H_0 \equiv F$). Данное уравнение, как несложно видеть, имеет вид

$$w^{(n+m)} = \sum_{i=1}^{q} (w^{(n-1)} - h(w^{(n-2)}, w^{(n-3)}, \ldots, w, z))^{\beta_i} g_i(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z), \tag{7}$$

где $q \in N$, g_i – функции, аналитические и не равные нулю в окрестности некоторой достаточно близкой к λ_0 точки $\lambda_1 = (w_1^{n-1}, w_1^{n-2}, \ldots, w_1, z_1) \in C^{n+1}$ такой, что $w_1^{n-1} = h(\lambda_1')$, где $\lambda_1' = (w_1^{n-2}, w_1^{n-3}, \ldots, w_1, z_1)$ и $\gamma_1 = f_0(\lambda_1) - \sum_{i=0}^{n-2} (\partial h/\partial w^i)(\lambda_1') w_1^{i+1} (\partial h/\partial z)(\lambda_1') \neq 0$, β_i – рациональные числа, причем $\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_q$ и $\beta_1 = \sigma_1 - m = \{\sigma_1\} - 1 \in (-1; 0)$,

$$g_1(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) = \sigma_1(\sigma_1 - 1) \cdots (\sigma_1 - m + 1) f_1(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) \times$$
$$\times \Bigg(F(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) \sum_{j=0}^{n-2} w^{(j+1)} \frac{\partial h}{\partial w^{(j)}} (w^{(n-2)}, w^{(n-3)}, \ldots, w, z) -$$
$$- \frac{\partial h}{\partial z} (w^{(n-2)}, w^{(n-3)}, \ldots, w, z) \Bigg)^m,$$

т.е. $g_1(\lambda_1) = \gamma_1^m \sigma_1(\sigma_1 - 1) \cdots (\sigma_1 - m + 1) f_1(\lambda_1) \neq 0$. Поскольку правая часть уравнения (7) содержит отрицательные, большие -1 степени $w^{(n-1)} - h$, то, согласно лемме 1, уравнение (1) допускает подвижные критические особые точки.

Таким образом, если уравнение (1) не имеет подвижных критических особых точек, то $\gamma = 0$. Покажем, что если в этом случае $\sigma_1 < 1$, то $\mu = 1/(1-\sigma_1) \in Z$ и $\sigma_i \mu \in Z$, $i = \overline{1, k}$. Выбирая в качестве λ_0' произвольные точки $\lambda' = (w^{n-2}, w^{n-3}, \ldots, w, z)$, в которых голоморфна функция h, будем иметь, что $f_0(h(\lambda'), \lambda') - \sum_{i=0}^{n-2} (\partial h/\partial w^i)(\lambda') w^{i+1} (\partial h/\partial z)(\lambda') \equiv 0$, т.е.

$$F(w^{n-1}, w^{n-2}, \ldots, w, z) - \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\partial h}{\partial w^i} (w^{n-2}, w^{n-3}, \ldots, w, z) w^{i+1} \frac{\partial h}{\partial z} (w^{n-2}, w^{n-3}, \ldots, w, z) \equiv$$
$$\equiv (w^{n-1} - h(w^{n-2}, w^{n-3}, \ldots, w, z))^{\sigma_1} \xi(w^{n-1}, w^{n-2}, \ldots, w, z),$$

где ξ – алгеброидная в окрестности λ_0 функция такая, что

$$\xi(h(w^{n-2}, w^{n-3}, \ldots, w, z), w^{n-2}, w^{n-3}, \ldots, w, z) \not\equiv 0.$$

Выберем $\lambda_1 = (w_1^{n-1}, w_1^{n-2}, \ldots, w_1, z_1)$ так, чтобы $w_1^{n-1} = h(\lambda_1')$, где

$$\lambda_1' = (w_1^{n-2}, w_1^{n-3}, \ldots, w_1, z_1),$$

и $\xi(\lambda_1) \neq 0$. Тогда l-е дифференциальное следствие уравнения (1), где производные $w^{(n)}, \ldots, w^{(n+l-1)}$ выражены из (1) и $(l-1)$-го его дифференциального следствия, будет иметь вид

$$w^{(n+l)} = g_0^l(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} (w^{(n-1)} - h(w^{(n-2)}, w^{(n-3)}, \ldots, w, z))^{\sigma_i - l/\mu} g_i^l(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z),$$

где g_i^l – функции, алгеброидные и не равные нулю в точке λ_1. Отсюда вытекает, что если для некоторого $1 \leq i \leq k$ числа $\sigma_i \mu \notin Z$, то при некотором l правая часть последнего уравнения будет содержать отрицательные большие -1 степени $w^{(n-1)} - h$. Следовательно, в силу леммы 1 уравнение (1) допускает подвижные критические особые точки. Теорема 2 доказана.

Также с помощью метода малого параметра можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $F = (w^{(s)} - h(w^{(s-1)}, w^{(s-2)}, \ldots, w, z))^{-\sigma} f(w^{(s)}, w^{(s-1)}, \ldots, w, z)$, *где* $s \le n-1$, f *– ограниченная алгеброидная и не обращающаяся в нуль в окрестности некоторой точки* $\lambda_0 = (w_0^s, w_0^{s-1}, \ldots, w_0, z_0) \in C^{s+2}$ *функция,* h *– функция, аналитическая в окрестности точки* $\lambda_0' = (w_0^{s-1}, w_0^{s-2}, \ldots, w_0, z_0)$, *причем* $w_0^s = h(\lambda_0')$, σ *– положительное рациональное число. Тогда уравнение (1) имеет подвижные критические особые точки.*

Замечание. Следующие частные случаи доказанных выше теорем были известны ранее: 1) теорема 2 при $n = 1$ [1]; 2) теорема 3 при $s = n-1$ (данный результат использовался как вспомогательный при исследовании уравнений первого, второго, третьего и высших порядков на свойство Пенлеве [2]); 3) теорема 1 для уравнений вида $w''^2 + E(w', w, z)w'' + F(w', w, z) = 0$ ($n = 2$) и теорема 2 для уравнений вида $w'' = \sqrt[m]{R(w', w, z)}$, где E, F, R – рациональные функции по w', w с аналитическими по z коэффициентами ($n = 2$) [3, 4].

Применим теоремы 1, 3 к исследованию подвижных особых точек уравнений вида

$$P(w^{(n)}, w, z) = 0, \tag{8}$$

где $n \ge 3$, P – полином по w и $w^{(n)}$ с аналитическими по z коэффициентами. Наличие подвижных критических особых точек у нелинейных уравнений (8) частного вида

$$w^{(n)} = T(w, z), \tag{9}$$

где T – полином по w с аналитическими по z коэффициентами, доказано в [4].

Уравнение (8), будучи разрешенным относительно $w^{(n)}$, примет вид $w^{(n)} = H(w, z)$, где H – алгебраическая по w функция с аналитическими по z коэффициентами. Для того чтобы рассматриваемое уравнение не имело подвижных критических особых точек, необходимо в силу теоремы 3, чтобы функция H не имела полюсов (обыкновенных или критических) по w, а в силу теоремы 1 также и неполярных алгеброидных особенностей по w, т.е. была полиномом по w. Таким образом, для того чтобы уравнение (8) не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы оно имело вид (9), а значит, согласно [4], было линейным. Это условие является, очевидно, и достаточным для отсутствия подвижных критических особых точек у уравнения (8). Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение (8) не имело подвижных критических особых точек, необходимо и достаточно, чтобы оно было линейным.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л., 1950.
2. *Cosgrove C., Scoufis G.* // Stud. appl. math. 1993. V. 88. P. 25–87.
3. *Cosgrove C.* // Stud. appl. math. 1993. V. 90. P. 119–187.
4. *Костюкович М.Е.* // Мат. исследования: Сб. науч. работ преподавателей, аспирантов и студентов мат. фак. Гродн. гос. ун-та. Гродно, 1994. Вып. 2. С. 61–64.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
22.11.2000 г.