ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2003, том 39, № 2, с. 210–216

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.911.5

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЖИЗНЕСПОСОБНЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2003 г. А. А. Леваков

Рассматривается проблема существования решений стохастического дифференциального уравнения
$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t), \tag{1}$$
удовлетворяющих условию
$$x(t) \in K(t,x(t)), \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$
Теорема существования таких решений, называемых жизнеспособными (viability [1, 2]), в случае, когда функции f и g удовлетворяют условию Липшица по t и x и выполняется некоторое стохастическое касательное условие, получена в [1]. В [2] аналогичная теорема установлена для стохастических дифференциальных включений при условиях, обеспечивающих применение теоремы Фана о неподвижной точке. В отличие от работы [1] мы рассматриваем систему (1), (2) с измеримыми по Борелю функциями f, g и с отображением K, которое зависит от переменных состояния, и используем стохастическое касательное условие, несколько отличающееся от аналогичного условия работы [1]. В настоящей работе доказаны теоремы существования слабых и сильных решений системы (1), (2), причем под решениями уравнения (1) понимаем решения некоторого стохастического включения, соответствующего этому уравнению.

Используются следующие обозначения: $R^{d\times r}$ – пространство действительных матриц с евклидовой нормой $\|\cdot\|$; $R^{d\times 1} = R^d$; $[0,T] \subset R$; $\mathrm{cl}(R^{d\times r})$ – множество всех непустых замкнутых подмножеств из $R^{d\times r}$; $[B]_\alpha = \{x \in R^{d\times r} |\ \inf\limits_{y\in B} \|x-y\| \le \alpha\}$ – α-окрестность множества $B \subset R^{d\times r}$; $\overline{\mathrm{co}}\, Q$ – замыкание выпуклой оболочки множества Q; если $B : [0,T] \times R^d \to \mathrm{cl}(R^{d\times r})$ – многозначное отображение и $\varepsilon > 0$, то $B_\varepsilon(t,x)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все множества $B(t',x')$, $|t-t'| \le \varepsilon$, $t' \in [0,T]$, $\|x-x'\| \le \varepsilon$; μ – мера Лебега на $[0,T]$; $C([0,T],R^{d\times r})$ – пространство непрерывных функций с метрикой $\rho(a_1,a_2) = \max\limits_{t\in[0,T]} \|a_1(t) - a_2(t)\|$, $\mathcal{B}(S)$ – топологическая σ-алгебра на топологическом пространстве S; пусть $(\mathcal{A}, \Sigma, \theta)$ – полное измеримое пространство с σ-аддитивной конечной мерой θ, тогда $\mathcal{L}_1(\mathcal{A}, R^{d\times r})$ – пространство классов эквивалентности интегрируемых отображений $z:\ \mathcal{A} \to R^{d\times r}$ с нормой $\int_{\mathcal{A}} \|z(\tau)\|\, d\theta$; $\Omega = [0,1[$; $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1[)$; P – мера Лебега на $[0,1[$; $\mathcal{F}_t$ – поток σ-алгебр в $\mathcal{F}$; $W(t)$ – d-мерное $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение с $W(0) = 0$ почти наверное (п.н.); P^x – распределение вероятностей на $(S, \mathcal{B}(S))$ для случайной величины $x:\ \Omega \to S$; $E(x)$ – математическое ожидание; $\mathcal{B}_t(C([0,T],R^{d\times r}))$ – под-σ-алгебра $\mathcal{B}(C([0,T],R^{d\times r}))$, порожденная $a(s)$, $0 \le s \le t$ [3, с. 150]; $f:\ [0,T] \times R^d \to R^d$, $r:\ [0,T] \times R^d \to R^d$, $g:\ [0,T] \times R^d \to R^{d\times d}$ – измеримые по Борелю ограниченные отображения, т.е. $\|f(t,x)\| + \|r(t,x)\| + \|g(t,x)\| \le M$ $\forall (t,x) \in [0,T] \times R^d$, M – const; $K:\ [0,T] \times R^d \to \mathrm{cl}(R^d)$ – полунепрерывное сверху многозначное отображение; $Q:\ [0,T] \times R^d \to \mathrm{cl}(R^{d\times r})$ полунепрерывно сверху, если $\forall \varepsilon > 0$, $\forall (t,x) \in [0,T] \times R^d$, $\exists \delta > 0$, $\forall (t',x') \in [0,T] \times R^d$, $|t-t'| \le \delta$, $\|x-x'\| \le \delta$, выполняется $Q(t',x') \subset [Q(t,x)]_\varepsilon$; $*$ – знак транспонирования.

Для каждой точки $(t,x) \in [0,T] \times R^d$ определим множества $F(t,x)$, $G(t,x)$, которые являются наименьшими выпуклыми замкнутыми множествами, содержащими соответственно точки $f(t,x)$, $g(t,x)$ и все предельные точки $f(t',x')$, $g(t',x')$ при $(t',x') \to (t,x)$. Положим $A(t,x) = \overline{\mathrm{co}}\, \{b(t,x)b^*(t,x) |\ b(t,x) \in G(t,x)\}$.

Для любой симметрической неотрицательной матрицы $a(t,x) \in A(t,x)$ существует единственная симметрическая неотрицательная матрица $u(t,x)$ такая, что $u^2 = a$, которую обозначаем $\sqrt{a} = u$. Положим $\tilde{G}(t,x) = \{\sqrt{a(t,x)} \mid a(t,x) \in A(t,x)\}$. Ясно, что при сделанных предположениях F, G, A – полунепрерывные сверху ограниченные многозначные отображения.

1. Слабые решения.

Определение 1. Под слабым жизнеспособным решением задачи (1), (2) с начальным условием $x_0 \in R^d$ подразумеваем d-мерный непрерывный случайный процесс $x(t)$, $t \in [0,T]$, определенный на некотором вероятностном пространстве $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ с потоком σ-алгебр $\tilde{\mathcal{F}}_t$ и такой, что: 1) существует d-мерное $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-броуновское движение $\tilde{W}(t)$ с $\tilde{W}(0) = 0$ п.н.; 2) $x(t)$ согласован с $\tilde{\mathcal{F}}_t$, т.е. для каждого $t \in [0,T]$ отображение $\omega \to x(t,\omega)$ $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-измеримо; 3) существуют измеримые $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-согласованные процессы $v : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to R^d$, $u : [0,T] \times \tilde{\Omega} \to R^{d \times d}$ такие, что для $(\mu \times \tilde{P})$-почти всех $(t,\omega) \in [0,T] \times \tilde{\Omega}$ $v(t,\omega) \in F(t, x(t,\omega))$, $u(t,\omega) \in \tilde{G}(t, x(t,\omega))$; 4) с вероятностью 1 $x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)\,d\tau + \int_0^t u(\tau)\,d\tilde{W}(\tau)$, $x(t) \in K(t, x(t))$, для всех $t \in [0,T]$.

Теорема существования слабых жизнеспособных решений будет доказана при выполнении следующего основного условия.

Стохастическое касательное условие A). Для любого $\varepsilon > 0$, для любого $(\mathcal{F}_t)$-момента остановки σ, $P\{\omega|\sigma \le T\} = 1$, $P\{\omega|\sigma < T\} > 0$, для любого $(\mathcal{F}_\sigma)$-измеримого случайного вектора $y : \Omega \to R^d$, $y(\omega) \in K(\sigma, y(\omega))$ п.н., существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки $\sigma_1 \ge \sigma$, $P\{\omega|\sigma_1 > \sigma\} > 0$, $P\{\omega|\sigma_1 - \sigma \le \min\{\varepsilon, T-\sigma\}\} = 1$, существуют $(\mathcal{F}_\sigma)$-измеримые случайные элементы $v : \Omega \to R^d$, $u : \Omega \to R^{d \times d}$ такие, что $v \in [F_\varepsilon(t,y)]_\varepsilon$, $u \in [G_\varepsilon(t,y)]_\varepsilon$ п.н., $y + v(\sigma_1 - \sigma) + u(W(\sigma_1) - W(\sigma)) = z(\sigma_1) \in K(\sigma_1, z(\sigma_1))$ п.н., для почти всех ω $\|v(t-\sigma) + u(W(t) - W(\sigma))\| \le \varepsilon$ для каждого $t \in [\sigma, \sigma_1]$.

Определение 2. Под ε-приближенным решением задачи (1), (2) с начальным условием $x_0 \in R^d$ понимаем пару (x,s), удовлетворяющую условиям: а) s – $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки, $P\{\omega|s > 0\} > 0$, $P\{\omega|s \le T\} = 1$; б) $x : [0,T] \times \Omega \to R^d$ – непрерывный $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс; в) существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $\varphi : [0,T] \times \Omega \to R^d$, $\psi : [0,T] \times \Omega \to R^{d \times d}$, удовлетворяющие для почти всех ω включениям $\varphi(t,\omega) \in [F_{2\varepsilon}(t, x(t,\omega))]_\varepsilon$, $\psi(t,\omega) \in [G_{2\varepsilon}(t, x(t,\omega))]_\varepsilon$ для почти всех $t \in [0,s]$; г) с вероятностью 1 $x(s) \in K(s, x(s))$, $x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau + \int_0^t \psi(\tau)\,dW(\tau)$ п.н., для каждого $t \in [0,s]$; д) для каждого $(\mathcal{F}_t)$-момента остановки $\tau \le s$ существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки $\hat{\tau}$, $0 \le \tau - \hat{\tau} \le \varepsilon$, такой, что $x(\hat{\tau}) \in K(\hat{\tau}, x(\hat{\tau}))$ п.н.

Лемма. *Пусть ограниченные измеримые по Борелю отображения f, g и полунепрерывное сверху многозначное отображение K удовлетворяют стохастическому касательному условию A). Тогда для любого $\varepsilon \in]0,1]$, для любого x_0, такого, что $x_0 \in K(0,x_0)$, существует ε-приближенное решение (x,T) с начальным условием x_0.*

Доказательство. Возьмем $\varepsilon \in]0,1]$, $x_0 \in K(0,x_0)$. Согласно стохастическому касательному условию A), существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки $s \ge 0$, $P\{\omega|s > 0\} > 0$, $P\{\omega|s \le \min\{\varepsilon, T\}\} = 1$, существуют $(\mathcal{F}_0)$-измеримые случайные элементы v, u такие, что $v(\omega) \in [F_\varepsilon(0,x_0)]_\varepsilon$, $u(\omega) \in [G_\varepsilon(0,x_0)]_\varepsilon$ п.н., $x_0 + vs + uW(s) = z(s) \in K(s, z(s))$, $\|vs + uW(s)\| \le \varepsilon$. Если положить $\varphi(t,\omega) = v(\omega)$, $\psi(t,\omega) = u(\omega)$ для $\omega \in \{\omega|s > 0\}$, $t \in [0,s]$, $\varphi(t,\omega) = 0$, $\psi(t,\omega) = 0$ для остальных $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$, $x(t) = x_0 + \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau + \int_0^t \psi(\tau)\,dW(\tau)$, то $x(s) \in K(s, x(s))$ п.н. Из определения множеств $F_{2\varepsilon}$, $G_{2\varepsilon}$ и определения $x(t)$ следует, что с вероятностью 1 $\varphi(t,\omega) \in [F_{2\varepsilon}(t, x(t,\omega))]_\varepsilon$, $\psi(t,\omega) \in [G_{2\varepsilon}(t, x(t,\omega))]_\varepsilon$ для всех $t \in [0,s]$. Таким образом, (x,s) – ε-приближенное решение.

Множество $\mathcal{E}$ всех ε-приближенных решений можно частично упорядочить следующим образом: скажем $(x_1,s_1) \le (x_2,s_2)$, если $s_1 \le s_2$, п.н., с вероятностью 1 $\varphi_1 = \varphi_2$, $\psi_1 = \psi_2$ для почти всех $t \in [0,s_1]$, где φ_j, ψ_j – процессы, соответствующие паре (x_j,s_j), $j = 1,2$. Покажем, что любая цепь $S = \{(x_i,s_i),\ i \in I\}$ имеет в $\mathcal{E}$ верхнюю грань. Положим $\lambda = \sup\limits_{i \in I}\{s_i\}$ и выберем последовательность $s_{i_n} \to \lambda$, $n \to \infty$, $s_{i_n} \le s_{i_{n+1}}$. Возьмем $\varphi(t,\omega) =$

$=\varphi_{i_n}(t,\omega)$, $\psi(t,\omega)=\psi_{i_n}(t,\omega)$ для $t\in[0,s_{i_n}]$, $\varphi(\lambda,\omega)=0$, $\psi(\lambda,\omega)=0$, $\tilde\varphi_n=\varphi_{i_n}$, $\tilde\psi_n=\psi_{i_n}$ для $t\in[0,s_{i_n}]$, $\tilde\varphi_n=0$, $\tilde\psi_n=0$ для $t\in]s_{i_n},\lambda]$; $x(t)=x_0+\int_0^t\varphi(\tau)\,d\tau+\int_0^t\psi(\tau)\,dW(\tau)$, $t\in[0,\lambda]$. Ясно, что $x(t)=x_{i_n}(t)$ для $t\in[0,s_{i_n}]$,

$$x(s_{i_n})=x_0+\int\limits_0^{s_{i_n}}\tilde\varphi_n(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^{s_{i_n}}\tilde\psi_n(\tau)\,dW(\tau), \tag{3}$$

$\tilde\varphi_n(t,\omega)\to\varphi(t,\omega)$, $\tilde\psi_n(t,\omega)\to\psi(t,\omega)$ для каждого ω и каждого $t\in[0,\lambda]$; с вероятностью 1 $\varphi(t,\omega)\in[F_{2\varepsilon}(t,x(t,\omega))]_\varepsilon$, $\psi(t,\omega)\in[G_{2\varepsilon}(t,x(t,\omega))]_\varepsilon$ для почти всех $t\in[0,\lambda]$.

Так как $E(\int_0^\lambda\|\psi(\tau,\omega)-\tilde\psi_n(\tau,\omega)\|^2\,d\tau)\le(M+1)(\lambda-s_{i_n})\underset{n\to\infty}{\to}0$, то [3, с. 111]

$$\int\limits_0^\lambda\tilde\psi_n(\tau,\omega)\,dW(\tau)\to\int\limits_0^\lambda\psi(\tau,\omega)\,dW(\tau)\quad\text{в}\quad\mathcal{L}_2(\Omega). \tag{4}$$

Кроме того,

$$\int\limits_0^{s_{i_n}}\tilde\varphi_n(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^{s_{i_n}}\varphi(\tau)\,d\tau\to\int\limits_0^\lambda\varphi(\tau)\,d\tau\quad\text{п.н.} \tag{5}$$

Из (3)–(5) следует существование подпоследовательности $x(s_{i_{n_k}})$, сходящейся п.н. к $x(\lambda)$. А так как $x(s_{i_{n_k}})\in K(s_{i_{n_k}},x(s_{i_{n_k}}))$ п.н. и отображение K полунепрерывно сверху, то $x(\lambda)\in$ $\in K(\lambda,x(\lambda))$ п.н. Заменяя последовательность i_n на подпоследовательность i_{n_k} в равенстве (3) и переходя к пределу при $k\to\infty$, убеждаемся, что (x,λ) – верхняя грань для цепи S. По лемме Цорна $\mathcal{E}$ допускает максимальный элемент $(\hat x,\hat s)$. Покажем, что $\hat s=T$. Предположим, $P\{\omega|\hat s<T\}>0$. Применяя стохастическое касательное условие А) к $\hat x(\hat s)$, найдем $\mathcal{F}_t$-момент остановки θ, $\theta\ge\hat s$, $P\{\omega|\theta>\hat s\}>0$, $P\{\omega|\theta-\hat s\le\min\{\varepsilon,T-\hat s\}\}=1$, найдем два $(\mathcal{F}_{\hat s})$-измеримых случайных элемента $\hat v$, $\hat u$ таких, что $\hat v\in[F_\varepsilon(\hat s,\hat x(\hat s))]_\varepsilon$, $\hat u\in[G_\varepsilon(\hat s,\hat x(\hat s))]_\varepsilon$ п.н., $\hat x(\hat s)+v(\theta-\hat s)+u(W(\theta)-W(\hat s))=z(\theta)\in K(\theta,z(\theta))$ п.н.; с вероятностью 1 $\|v(t-\hat s)+$ $+u(W(t)-W(\hat s))\|\le\varepsilon$ для каждого $t\in[\hat s,\theta]$. Если положить $\hat x(t)=\hat x(\hat s)+\int_{\hat s}^t\hat v\,d\tau+\int_{\hat s}^t\hat u\,dW(\tau)$, $t\in[\hat s,\theta]$, то $\hat x(\theta)\in K(\theta,\hat x(\theta))$ п.н. Пара $(\tilde x,\theta)$, где $\tilde x(t)=x(t)$, $t\in[0,\hat s]$, $\tilde x(t)=\hat x(t\wedge\theta)$, $t\in[\hat s,T]$, принадлежит $\mathcal{E}$, что противоречит максимальности $(\hat x,\hat s)$ в $\mathcal{E}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если f и g – ограниченные измеримые по Борелю функции, отображение K полунепрерывно сверху и выполняется стохастическое касательное условие А), то для любого $x_0\in K(0,x_0)$ существует слабое жизнеспособное решение задачи (1), (2) с начальным условием x_0.*

Доказательство. Согласно лемме, для каждого $\varepsilon_l=1/l$, $l\in N$, и каждого x_0, такого, что $x_0\in K(0,x_0)$, существует ε_l-приближенное решение (x_l,T) задачи (1), (2):

$$\begin{gathered}x_l(t)=x_0+\int\limits_0^t\varphi_l(\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\psi_l(\tau)\,dW(\tau),\quad t\in[0,T];\\ \varphi_l(t,\omega)\in[F_{2/l}(t,x_l(t,\omega))]_{1/l},\quad\psi_l(t,\omega)\in[G_{2/l}(t,x_l(t,\omega))]_{1/l}\end{gathered} \tag{6}$$

для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$; $x_l(T)\in K(T,x_l(T))$ п.н. и для любого t, $0<t\le T$, существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки $\hat\tau$, $0\le t-\hat\tau\le\varepsilon_l$, такой, что $x_l(\hat\tau)\in K(\hat\tau,x_l(\hat\tau))$ п.н.

Так как $\sup\limits_l\sup\limits_{t\in[0,T]}E(\|x_l(t)\|^2)\le C$, $\sup\limits_l E(\|x_l(t)-x_l(s)\|^4)\le C|t-s|^2$, C – const, для любых $t,s\in[0,T]$, то из доказательства теоремы 4.2 [4, с. 26–27] следует, что $P^{x_l}\overset{\text{сл.}}{\to}Q$, где Q – некоторая вероятность на $(C([0,T],R^d),\mathcal{B}(C([0,T],R^d)))$, а P^{x_l} – вероятностный закон распределения $x_l: \ \Omega \to C([0,T],R^d)$ в $(C([0,T],R^d),\mathcal{B}(C([0,T],R^d)))$ (точнее, некоторая подпоследовательность $P^{x_{l_k}} \overset{\text{сл.}}{\to} Q$, но для простоты будем считать, что сама последовательность P^{x_l} является слабо сходящейся).

Построим систему множеств $S(i_1,\dots,i_k)$ следующим образом. Возьмем для каждого $k\in N$ $\sigma_m^{(k)}$, $m=1,2,\dots,$ – шары радиуса $\le 2^{-(k+1)}$, покрывающие $C([0,T],R^d)$ и удовлетворяющие условиям $P^{x_l}(\partial\sigma_m^{(k)})=0$, $Q(\partial\sigma_m^{(k)})=0$ для каждых l, k, m (∂L – граница множества L). Положим для каждого k $\mathcal{D}_1^{(k)}=\sigma_1^{(k)},\dots,$ $\mathcal{D}_j^{(k)}=\sigma_j^{(k)}\setminus(\sigma_1^{(k)}\bigcup\dots\bigcup\sigma_{j-1}^{(k)}),\dots$ и $S(i_1,\dots,i_k)=$ $=\mathcal{D}_{i_1}^{(k)}\bigcap\dots\bigcap\mathcal{D}_{i_k}^{(k)}$. Пусть $B_l(i_1,\dots,i_k)=\{\omega\in\Omega|\ \ x_l(\cdot,\omega)\in S(i_1,\dots,i_k)\}$. Для каждого множества $S(i_1,\dots,i_k)$, такого, что $\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)\ne\emptyset$ ($\overset{\circ}{S}$ – внутренность множества S), выберем точку $q(i_1,\dots,i_k)\in\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)$, если же $\overset{\circ}{S}(i_1,\dots,i_k)=\emptyset$, $S(i_1,\dots,i_k)\ne\emptyset$, то в качестве $q(i_1,\dots,i_k)$ выбираем точку из $S(i_1,\dots,i_k)$. Определим $x_l^k:\ \Omega\to C([0,T],R^d)$ следующим образом: $x_l^k(\cdot,\omega)=q(i_1,\dots,i_k)$, если $\omega\in B_l(i_1,\dots,i_k)$. Так как $\|x_l^k-x_l\|_{C([0,T],R^d)}\le 2^{-k}$ п.н., то $x_l^k\to x_l$, $k\to+\infty$, равномерно по $t\in[0,T]$ п.н. Для каждой точки $(t,x)\in[0,T]\times R^d$ определим множество $[F_{2/l,2^{-k}}(t,x)]_{1/l}$, являющееся замыканием выпуклой оболочки объединения множеств $[F_{2/l}(t,x_1)]_{1/l}$ по всем x_1, таким, что $\|x_1-x\|\le 2^{-k}$. Аналогично определяется множество $[G_{2/l,2^{-k}}(t,x)]_{1/l}$. Для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ $\varphi_l(t,\omega)\in$ $\in[F_{2/l,2^{-k}}(t,x_l^k(t,\omega))]_{1/l}$, $\psi_l(t,\omega)\in[G_{2/l,2^{-k}}(t,x_l^k(t,\omega))]_{1/l}$ п.н.

Пусть $\int_{B_l(i_1,\dots,i_k)}\varphi_l(t,\omega)\,d\omega=H_{l,i_1,\dots,i_k}(t)$, $\int_{B_l(i_1,\dots,i_k)}\psi_l(t,\omega)\,d\omega=L_{l,i_1,\dots,i_k}(t)$. Положим $\varphi_l^k(t,\omega)=H_{l,i_1,\dots,i_k}(t)/P(B_l(i_1,\dots,i_k))$, $\psi_l^k(t,\omega)=L_{l,i_1,\dots,i_k}(t)/P(B_l(i_1,\dots,i_k))$, если $\omega\in$ $\in B_l(i_1,\dots,i_k)$ и $P(B_l(i_1,\dots,i_k))>0$ и $\varphi_l^k(t,\omega)=0$, $\psi_l^k(t,\omega)=0$ для остальных $(t,\omega)\in$ $\in[0,T]\times\Omega$. Согласно лемме 12 [5, с. 51], для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ $\varphi_l^k(t,\omega)\in[F_{2/l,2^{-k}}(t,x_l^k(t,\omega))]_{1/l}$, $\psi_l^k(t,\omega)\in[G_{2/l,2^{-k}}(t,x_l^k(t,\omega))]_{1/l}$.

Для фиксированного k упорядочим все $(i_1,\dots,i_k)$ лексикографически. Определим интервалы $\Delta(i_1,\dots,i_k)$, $\Delta_l(i_1,\dots,i_k)$ в $[0,1[$ следующим образом [4, с. 19]: $|\Delta(i_1,\dots,i_k)|=$ $=Q(S(i_1,\dots,i_k))$, $|\Delta_l(i_1,\dots,i_k)|=P^{x_l}(S(i_1,\dots,i_k))$ ($|\Delta|$ – длина интервала Δ); когда $(i_1,\dots,i_k)<(j_1,\dots,j_k)$, то интервал $\Delta(i_1,\dots,i_k)$ ($\Delta_l(i_1,\dots,i_k)$) расположен левее, чем $\Delta(j_1,\dots,j_k)$ (соответственно $\Delta_l(j_1,\dots,j_k)$). Положим $\hat{x}_n^k(\cdot,\omega)=q(i_1,\dots,i_k)$, когда $\omega\in$ $\in\Delta_l(i_1,\dots,i_k)$, и $\hat{x}^k(\cdot,\omega)=q(i_1,\dots,i_k)$, когда $\omega\in\Delta(i_1,\dots,i_k)$. Из доказательства теоремы 2.7 [4, с. 18–20] следует, что существуют пределы

$$\hat{x}_l(t,\omega)=\lim_{k\to\infty}\hat{x}_l^k(t,\omega),\quad \hat{x}(t,\omega)=\lim_{k\to\infty}\hat{x}^k(t,\omega),\quad \lim_{l\to\infty}\hat{x}_l(t,\omega)=\hat{x}(t,\omega),$$

равномерные по $t\in[0,T]$, п.н, кроме того, $P^{x_l}=P^{\hat{x}_l}$, $P^{\hat{x}}=Q$. Построим отображения $(t,\omega)\to\hat{v}_l^k(t,\omega)$, $(t,\omega)\to\hat{u}_l^k(t,\omega)$, $\hat{v}_l^k(t,\omega)=M_{l,i_1,\dots,i_k}(t)/|\Delta_l(i_1,\dots,i_k)|$, $\hat{u}_l^k(t,\omega)=$ $=L_{l,i_1,\dots,i_k}(t)/|\Delta_n(i_1,\dots,i_k)|$, если $\omega\in\Delta_l(i_1,\dots,i_k)$ и $|\Delta_l(i_1,\dots,i_k)|\ne 0$; $\hat{v}_l^k(t,\omega)=0$, $\hat{u}_l^k(t,\omega)=0$ для остальных $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$. Из построения $\hat{x}_l^k$, $\hat{v}_l^k$, $\hat{u}_l^k$, $\hat{x}_l$ вытекает, что $\hat{v}_l^k(t,\omega)\in[F_{2/l,2^{-k}}(t,\hat{x}_l^k(t,\omega))]_{1/l}$, $\hat{u}_l^k(t,\omega)\in[G_{2/l,2^{-k}}(t,\hat{x}_l^k(t,\omega))]_{1/l}$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$, и для любого t, $0<t\le T$, существует отображение $\hat{\hat{\tau}}:\ \Omega\to[0,T]$, $0\le t-\hat{\hat{\tau}}\le\varepsilon_l$, такое, что

$$\hat{x}_l(\hat{\hat{\tau}})\in K(\hat{\hat{\tau}},\hat{x}_l(\hat{\hat{\tau}}))\quad \text{п.н.} \tag{7}$$

Последовательности $\hat{v}_l^k$, $\hat{u}_l^k$, $k\ge 1$, для каждого фиксированного $l\in N$, согласно теореме Данфорда–Петтиса, относительно слабо компактны соответственно в $\mathcal{L}_1([0,T]\times\Omega,R^d)$, $\mathcal{L}_1([0,T]\times\Omega,R^{d\times d})$. Пусть $\hat{v}_l^k$, $\hat{u}_l^k$ – их слабые пределы (считаем, что сами последовательности являются сходящимися). Из включений $\hat{v}_l(t,\omega)\subset\bigcap_{m=1}^\infty\overline{\text{co}}\bigcup_{i=m}^\infty\hat{v}_l^i(t,\omega)$, $\hat{u}_l(t,\omega)\subset$ $\subset\bigcap_{m=1}^\infty\overline{\text{co}}\bigcup_{i=m}^\infty\hat{u}_l^u(t,\omega)$ и полунепрерывности сверху отображений $(t,x)\to[F_{2/l}(t,x)]_{1/l}$, $(t,x)\to[G_{2/l}(t,x)]_{1/l}$ следует [6, с. 49–50], что для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ $\hat{v}_l(t,x)\to[F_{2/l}(t,\hat{x}_l(t,\omega))]_{1/l}$, $\hat{u}_l(t,x)\to[G_{2/l}(t,\hat{x}_l(t,\omega))]_{1/l}$. Аналогично последовательности

$\hat{v}_l(t,\omega)$, $\hat{u}_l(t,\omega)$ слабо сходятся соответственно в $\mathcal{L}_1([0,T]\times\Omega,R^d)$, $\mathcal{L}_1([0,T]\times\Omega,R^{d\times d})$ к $\hat{v}(t,\omega)$, $\hat{u}(t,\omega)$ и $\hat{v}(t,\omega)\in F(t,\hat{x}(t,\omega))$, $\hat{u}(t,\omega)\in G(t,\hat{x}(t,\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in$ $\in[0,T]\times\Omega$.

Пусть $\hat{\mathcal{F}}_t=\bigcap_{\varepsilon>0}\sigma(\hat{x}(s)|\ 0\le s\le t+\varepsilon)$, где $\sigma(\hat{x}(s)|\ 0\le s\le t+\varepsilon)$ – наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные векторы $\hat{x}(s)$, $0\le s\le t+\varepsilon$, и пусть $\tilde{v}=E(\hat{v}|\hat{\mathcal{F}}_t)$, $\tilde{a}=E(\hat{a}|\hat{\mathcal{F}}_t)$ – измеримые условные математические ожидания процессов $\hat{v}$, $\hat{a}$ относительно потока $\hat{\mathcal{F}}_t$, где $\hat{a}(t,\omega)=\hat{u}(t,\omega)\hat{u}^*(t,\omega)$. Для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ $\tilde{v}(t,\omega)\in F(t,\hat{x}(t,\omega))$, $\hat{a}(t,\omega)\in A(t,\hat{x}(t,\omega))$, $\tilde{a}(t,\omega)\in A(t,\hat{x}(t,\omega))$ [7, с. 215].

Для любых s,t, $0\le s<t\le T$, для любой дважды дифференцируемой функции $h:$ $R^d\to R$, ограниченной вместе с частными производными до второго порядка включительно, и для любой непрерывной ограниченной $\mathcal{B}_s(C([0,T],R^d))$-измеримой функции $z:$ $C([0,T],R^d)\to R$ из (6), применяя формулу Ито, имеем

$$E\biggl(\biggl(h(x_l(t))-h(x_l(s))-\int\limits_s^t\biggl(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\psi_l^{(i,j)}(\tau)\frac{\partial^2h(x_l(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}+\sum_{i=1}^d\varphi_l^{(i)}(\tau)\frac{\partial h(x_l(\tau))}{\partial x^{(i)}}\biggr)d\tau\biggr)z(x)\biggr)=0,\tag{8}$$

где $\psi_l^{(i,j)}$, $\varphi_l^{(i)}$, $x^{(i)}$ – компоненты матрицы ψ_l и векторов φ_l, x. Используя свойства процессов $\tilde{v}$, $\tilde{a}$, $\hat{v}$, $\hat{a}$, $\hat{v}_l$, $\hat{u}_l$, $\hat{v}_l^k$, $\hat{u}_l^k$, $\hat{x}$, $\hat{x}_l$, $\hat{x}_l^k$, φ_l^k, ψ_l^k, x_l^k, φ_l, ψ_l, x_l, из (8) получаем

$$E\biggl(\biggl(h(\hat{x}(t))-h(\hat{x}(s))-\int\limits_s^t\biggl(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\tilde{a}^{ij}(\tau)\frac{\partial^2h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}+\sum_{i=1}^d\tilde{v}^{(i)}\frac{\partial h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}}\biggr)d\tau\biggr)z(\hat{x})\biggr)=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\biggl[E\biggl(\biggl(h(\hat{x}_l(t))-h(\hat{x}_l(s))+\lim_{k\to\infty}\int\limits_s^t\biggl(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\sum_{(i_1,\ldots,i_k)}\frac{\partial^2h(q(i_1,\ldots,i_k))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}L_{l,i_1,\ldots,i_k}(\tau)+$$

$$+\sum_{i=1}^d\sum_{(i_1,\ldots,i_k)}\frac{\partial h(q(i_1,\ldots,i_k))}{\partial x^{(i)}}H_{l,i_1,\ldots,i_k}(\tau)\biggr)d\tau\biggr)z(\hat{x}_l)\biggr)\biggr]=\lim_{l\to\infty}E\biggl(\biggl(h(x_l(t))-h(x_l(s))-$$

$$-\int\limits_s^t\biggl(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\psi_l^{(i,j)}(\tau)\frac{\partial^2h(x_l(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}+\sum_{i=1}^d\varphi_l^{(i)}(\tau)\frac{\partial h(x_l(\tau))}{\partial x^{(i)}}\biggr)d\tau\biggr)z(x_l)\biggr)=0,\tag{9}$$

где $\tilde{a}^{ij}$ – компоненты матрицы $\tilde{a}$. Так как (9) выполняется для любых функций h и z указанного вида, то процесс

$$h(\hat{x}(t))-h(\hat{x}(0))-\int\limits_0^t\biggl(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\tilde{a}^{(i,j)}(\tau)\frac{\partial^2h(\hat{x}(\tau))}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}+\sum_{i=1}^d v_l^{(i)}(\tau)\frac{\partial h(\hat{x}_l(\tau))}{\partial x^{(i)}}\biggr)d\tau$$

является $\hat{\mathcal{F}}_t$-мартингалом. Отсюда вытекает [4, с. 159–160], что на расширении $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$ пространства $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком $\hat{\mathcal{F}}_t$ можно определить d-мерное $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$-броуновское движение $\tilde{W}(t)$ такое, что для каждого $t\in[0,T]$ $\hat{x}-x_0-\int_0^t\tilde{v}(\tau)\,d\tau=\int_0^t\tilde{u}(\tau)\,d\tilde{W}(\tau)$ п.н., где $\tilde{u}=\sqrt{\tilde{a}}$. Включение $\hat{x}(t)\in K(t,\hat{x}(t))$ п.н. $\forall t\in[0,T]$ вытекает из (7) и полунепрерывности сверху отображения K. Теорема доказана.

Замечание 1. Если функции f и g непрерывны, то множества $F(t,x)$, $G(t,x)$ для всех (t,x) состоят из одной точки $f(t,x)$, $\sqrt{g(t,x)g^*(t,x)}$ соответственно. Когда $g(t,x)\in R^{d\times r}$, $r<d$, то теорема 1 применима и в этом случае, надо лишь матрицу $g(t,x)$ дополнить нулевыми элементами до квадратной.

Замечание 2. При доказательстве леммы была использована схема доказательства лемм 1, 2 из работы [1].

Пример 1. Так как для системы

$$dx_1(t) = (-\operatorname{sign} x_1(t) + \sin x_2(t))\,dt, \quad dx_2(t) = f(x_1(t), x_2(t))\,dt + dW(t),$$
$$K = \{(x_1, x_2) |\ |x_1| \le 1,\ x_2 \in R\}, \tag{10}$$

где $f:\ R^2 \to R$ – измеримая по Борелю ограниченная функция, стохастическое касательное условие A), очевидно, выполняется, то для $\forall (x_{01}, x_{02}) \in K$ существует слабое жизнеспособное решение с начальным условием (x_{01}, x_{02}).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$dx(t) = f(x)\,dt + g(x)\,dW(t), \quad K = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}, \quad t \in [0, 10], \tag{11}$$

где $f:\ R^2 \to R^2$, $g:\ R^2 \to R^2$ – измеримые по Борелю ограниченные функции такие, что $g_{ij}(x_1, x_2) = 0$, $i, j = 1, 2$, $x_1 f_1(x_1, x_2) + x_2 f_2(x_1, x_2) \le 0$ для всех $(x_1, x_2) \in \partial K$ (здесь f_i, g_{ij} – компоненты вектора f и матрицы g, ∂K – граница K). Возьмем $\varepsilon \in]0, 1[$, момент остановки σ, $(\mathcal{F}_\sigma)$-измеримый вектор $y(\omega) \in K$ п.н. Пусть $\mathcal{D} = \{\omega| \inf\limits_{q \in \partial K} \|y(\omega) - q\| \le \varepsilon\}$. Для $\forall \omega \in \mathcal{D}$ множество $G_\varepsilon(y(\omega))$ содержит нулевую матрицу, а множество $[F_\varepsilon(y(\omega))]_\varepsilon$ – вектор $\bar{v}(\omega)$ такой, что $y_1(\omega)\overline{G}_1(\omega) + y_2(\omega)\overline{G}_2(\omega) < 0$. Отображения

$$v(\omega) = \begin{cases} \bar{v}(\omega), & \omega \in \mathcal{D}, \\ f(y(\omega)), & \omega \in \Omega \setminus \mathcal{D}, \end{cases} \qquad u(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in \mathcal{D}, \\ g(y(\omega)), & \omega \in \Omega \setminus \mathcal{D}, \end{cases}$$

являются $(\mathcal{F}_\sigma)$-измеримыми. Отсюда и из свойств броуновского движения, приведенных в [8, с. 239], следует существование момента остановки σ_1, удовлетворяющего стохастическому касательному условию A). По теореме 1 для любого $x_0 \in K$ система (11) имеет слабое жизнеспособное решение с начальным условием x_0.

2. Сильные решения. Пусть заданы вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком $\mathcal{F}_t$, d-мерное $\mathcal{F}_t$-броуновское движение $W(t)$ с $W(0) = 0$ п.н. и стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = (r(t, x(t)) + f(t, x(t)))\,dt + g(t, x(t))\,dW(t). \tag{12}$$

Определение 3. Под сильным жизнеспособным решением задачи (12), (2) с начальным условием x_0 подразумеваем d-мерный непрерывный случайный процесс $x(t)$, $t \in [0, T]$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ и такой, что: 1) $x(t)$ согласован с $\mathcal{F}_t$; 2) существует измеримый $(\mathcal{F}_t)$-согласованный процесс $v:\ [0, T] \times \times \Omega \to R^d$ такой, что $v(t, \omega) \in F(t, x(t, \omega))$ для $(\mu \times P)$-почти всех $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$; 3) с вероятностью 1 $x(t) = x_0 + \int_0^t (v(\tau) + r(\tau, x(\tau)))\,d\tau + \int_0^t g(\tau, x(\tau))\,dW(\tau)$, $x(t) \in K(t, x(t))$ для всех $t \in [0, T]$.

Если процесс $x(t)$ удовлетворяет всем условиям определения 1 (определения 3), кроме включения (2), то его называют слабым (сильным) решением уравнения. Говорят, что уравнение (12) удовлетворяет условиям потраекторной единственности слабых решений, если для любых двух слабых решений x, x', определенных на одном вероятностном пространстве с одним и тем же потоком и с одним и тем же броуновским движением, из равенства $x(0) = x'(0)$ п.н. следует, что $x(t) = x'(t)$ п.н. для всех $t \in [0, T]$.

Принцип Ямады–Ватанабэ [4, с. 154–157; 9–11]: если уравнение (12) удовлетворяет условиям потраекторной единственности слабых решений и для любого $x_0 \in R^d$ существует слабое решение с начальным условием x_0, то на любом вероятностном пространстве с любым броуновским движением на нем существует слабое решение и оно является сильным.

Стохастическое касательное условие A′). Для любого $\varepsilon > 0$, для любого момента остановки σ, $P\{\omega|\sigma \le T\} = 1$, $P\{\omega|\sigma < T\} > 0$, для любого $(\mathcal{F}_\sigma)$-измеримого случайного вектора $y:\ \Omega \to R^d$, $y(\omega) \in K(\sigma, y(\omega))$ п.н., существует момент остановки $\sigma_1 \ge \sigma$,

$P\{\omega|\sigma_1 > \sigma\} > 0$, $P\{\omega|\sigma_1 - \sigma \leq \min\{\varepsilon, T-\sigma\}\} = 1$, существуют $(\mathcal{F}_\sigma)$-измеримые случайные элементы $v_0 : \Omega \to R^d$, $v_1 : \Omega \to R^d$, $u : \Omega \to R^{d\times d}$ такие, что $v_0 \in [F_\varepsilon(t,y)]_\varepsilon$, $v_1 \in [r_\varepsilon(t,y)]_\varepsilon$, $u \in [g_\varepsilon(t,y)]_\varepsilon$ п.н., $y + (v_0+v_1)(\sigma_1 - \sigma) + u(W(\sigma_1) - W(\sigma)) = z(\sigma_1) \in K(\sigma_1, z(\sigma_1))$ п.н., для почти всех ω $\|(v_0+v_1)(t-\sigma) + u(W(t) - W(\sigma))\| \leq \varepsilon$ для каждого $t \in [\sigma, \sigma_1]$.

Определение 4. Отображение $F : [0,T] \times R^d \to R^d$ называется монотонным, если $(x_1 - x_2)(v_1 - v_2) \leq 0$ $\forall v_i \in F(t, x_i)$, $\forall (t, x_i) \in [0,T] \times R^d$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Если отображения r, g непрерывны, ограничены и удовлетворяют локальному условию Липшица по x, т.е. для любого $N > 0$ существует постоянная $K_N > 0$ такая, что $\|r(t,x) - r(t,y)\| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq K_N\|x - y\|$ $\forall (t,x)$, $(t,y) \in [0,T] \times B_N$, $B_N = \{x | \|x\| \leq N\}$, f – измеримая по Борелю ограниченная функция; F – монотонное отображение; K – многозначное полунепрерывное сверху отображение; выполнено стохастическое касательное условие A'), то для любого $x_0 \in K(0, x_0)$ существует сильное жизнеспособное решение $x(t)$ задачи (12), (2) с начальным условием x_0 и уравнение (12) удовлетворяет условиям потраекторной единственности слабых решений.*

Доказательство. Согласно теореме 1 [12], для любого $x_0 \in R^d$ существует слабое решение уравнения (12) с начальным условием x_0. Из доказательства теоремы 2 [13] вытекает потраекторная единственность слабых решений этого уравнения. Теперь утверждение теоремы 2 следует из принципа Ямады–Ватанабэ и теоремы 1.

Замечание 3. Если множество K совпадает с R^d, то стохастическое касательное условие A), очевидно, выполняется, и определение слабого жизнеспособного решения становится определением слабого решения уравнения (1). Из теоремы 1 следует теорема существования слабых решений: если f и g – ограниченные измеримые по Борелю функции, то для любого $x_0 \in R^d$ существует слабое решение уравнения (1) с начальным условием x_0 [12].

Замечание 4. Если в примере 1 отображение f ограничено и удовлетворяет локальному условию Липшица, то для любого $x_0 \in K$ существует сильное жизнеспособное решение задачи (11) с начальным условием x_0 и уравнение удовлетворят условиям потраекторной единственности слабых решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gautier S., Thibault L.* // Differential and Integral Equations. 1993. V. 6. № 6. P. 1395–1414.
2. *Kisielewicz M.* // Discussions Mathematical-Differential Inclusions. 1995. V. 15. P. 61–74.
3. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М., 1974.
4. *Ватанбэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
5. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
6. *Леваков А.А.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 1. С. 47–53.
7. *Леваков А.А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 2. С. 212–220.
8. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. Т. 1. М., 1971.
9. *Yamada T.,Watanabe S.* // J. Math. Kioto Univ. 1971. V. 11. P. 155–167.
10. *Звонкин А.К., Крылов Н.В.* // Тр. школы-семинара по теории случайных процессов. Ч. 2. Вильнюс, 1975.
11. *Черный А.С.* // Теория вероятностей и ее применения. 2001. Т. 46. Вып. 3. С. 483–497.
12. *Леваков А.А.* // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 36. № 8. С. 1041–1048.
13. *Леваков А.А.* // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 84–89.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
18.05.2001 г.