ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 8, с. 1076–1084

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ НОРМАЛЬНОГО РАЗМЕРА КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ С НЕГРУБЫМ ФОКУСОМ

© 2004 г. Л. А. Черкас, И. Л. Шевцов

1. Введение. В настоящей работе рассматривается вещественная квадратичная система

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}x^iy^j, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} b_{ij}x^iy^j, \tag{1}$$

имеющая негрубый фокус. Известно, что предельные циклы системы (1) могут окружать лишь одну особую точку, которая является фокусом. В силу того что квадратичная система имеет не более двух фокусов, возможны следующие распределения предельных циклов при условии, что они существуют: m, (m_1, m_2), $m \in \mathbb{N}$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m_1 + m_2 > 0$, $m_1 \geq 0$, $m_2 \geq 0$. Здесь m – число предельных циклов вокруг фокуса A при условии, что он единственный, а m_1, m_2 – число предельных циклов вокруг каждого из двух фокусов при условии, что они существуют.

Л.М. Перко [1] ввел термин предельный цикл "нормального размера", т.е. предельный цикл, который можно обнаружить численными методами. В работе [2] получены квадратичные системы с предельными циклами нормального размера и всеми известными в настоящее время максимальными распределениями 3, (3, 0), (3, 1). Тогда естественно рассмотреть квадратичные системы с негрубым фокусом и распределениями предельных циклов 2, (2, 0), (2, 1). Цель работы – получить ряд квадратичных систем с негрубым фокусом и максимальным числом предельных циклов нормального размера для всех возможных конфигураций особых точек.

2. Используемые теоремы и предварительные результаты для систем Льенара. Сформулируем теоремы для квадратичных систем с негрубым фокусом, вытекающие из работ [2–4].

Теорема 1. *Пусть для вещественной системы*

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{2}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – полиномы степени n, существуют функция $\Psi(x,y) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, и число $k < 0$ такие, что в области Ω справедливо неравенство

$$\Phi \equiv k\Psi \operatorname{div}(P, Q) + \frac{\partial\Psi}{\partial x}P + \frac{\partial\Psi}{\partial y}Q \geq 0 \tag{3}$$

и кривая $\Phi = 0$ не содержит предельных циклов системы (2).

Тогда предельные циклы системы (2) не пересекают множество $W = \{(x,y):\ (x,y) \in \Omega,\ \Psi(x,y) = 0\}$ и в каждой двусвязной области Ω, лежащей в одной из областей $\Psi > 0$, $\Psi < 0$, система (2) имеет не более одного предельного цикла γ, причем если он существует, то является грубым и устойчивым (неустойчивым) при $k\Psi|_\gamma < 0$ (> 0).

Теорема 2. *Пусть в односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ система (2) имеет единственную особую точку – фокус A, $\operatorname{div}(P(A), Q(A)) = 0$. Пусть также функция $\Psi(x,y)$ удовлетворяет в области Ω условию (3), при этом уравнение $\Psi(x,y) = 0$ определяет m вложенных друг в друга овалов. Тогда в каждой из $m-1$ двусвязных областей, ограниченных соседними овалами, система (2) имеет точно один предельный цикл, а в целом она имеет в области Ω не более m предельных циклов.*

Рассмотрим первую форму системы Льенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y, \quad g(0) = 0, \quad xg(x) > 0, \quad x \neq 0. \tag{4}$$

Как и в работе [3], в которой, однако, использовалась вторая форма системы Льенара, строим функцию Дюлака Ψ в виде полинома относительно y степени $n-1$ с коэффициентами, являющимися полиномами относительно x, т.е.

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \Psi_i(x) y^{n-i}. \tag{5}$$

Для того чтобы соответствующая функция Φ зависела только от x, необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\begin{gathered}\Psi_1 = C_1, \quad \Psi_2 = (k+n-1)FC_1 + C_2, \quad \Psi_2' = (k+n-1)fC_1, \quad F(x) = \int\limits_0^x f(u)\,du, \\ \Psi_i' = (k+n-i+1)f\Psi_{i-1} + (n-i+2)g\Psi_{i-2}, \quad \Psi_i = \int \Psi_i'(x)dx + C_i, \quad i = \overline{3,n}.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь C_i, $i = \overline{1,n}$, – произвольные константы, которые появляются при интегрировании функций Ψ_i' по x. Функция Φ при этом имеет вид

$$\Phi = \Phi(x, C) = -kf\Psi_n - g\Psi_{n-1} \tag{7}$$

и является линейной комбинацией функций, зависящих только от x, т.е.

$$\Phi(x, C) = \sum_{i=1}^{n} C_i \Phi_i(x). \tag{8}$$

Пусть система (4) имеет негрубый фокус в точке $O(0,0)$ при $F'(0) = 0$, для которого первая фокусная величина не равна нулю. Тогда все функции $\Phi_i(x)$ обращаются в нуль при $x = 0$. В этом случае будем рассматривать подсемейство семейства функций (8), удовлетворяющих условию $\Phi'(0) = 0$, при этом $\Phi_n'(0) \neq 0$. Тогда функцию Φ вида (8) можно представить в виде

$$\Phi = \Phi(x, \tilde{C}) = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_i \left(\Phi_i(x) - \frac{\Phi_i'(0)}{\Phi_n'(0)} \Phi_n(x) \right), \tag{9}$$

где $C_i = \tilde{C}_i$, $i = \overline{1, n-1}$, $C_n = -\sum_{i=1}^{n-1} (\Phi_i'(0)/\Phi_n'(0)) \tilde{C}_i$. Тогда

$$\Phi(x, C) = x^2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{C}_i \tilde{\Phi}_i(x) = x^2 \tilde{\Phi}(x, \tilde{C}), \tag{10}$$

где $\tilde{\Phi}_i(x) = \left(\Phi_i(x) - \dfrac{\Phi_i'(0)}{\Phi_n'(0)} \Phi_n(x) \right) \Big/ x^2$, $\tilde{\Phi}_i(0)$ определены по непрерывности ($\tilde{\Phi}_i(0) = \lim\limits_{x \to 0} \tilde{\Phi}_i(x)$) и не все $\tilde{\Phi}_i(0)$ равны нулю. Далее можно искать условие неотрицательности функции $\Phi(x, \tilde{C})$ с помощью выбора значений постоянных $\tilde{C}_i$. Таким образом, для существования неотрицательной на $[\alpha, \beta]$ функции $\Phi(x, \tilde{C})$ в семействе (9) необходимо и достаточно, чтобы задача оптимизации

$$L \to \max, \quad \Phi(x, \tilde{C}) \geq Lx^2, \quad L > 0, \quad |\tilde{C}_i| \leq 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in [\alpha, \beta], \tag{11}$$

имела решение. Редукция к задаче (11), которая раньше не использовалась, и ее решение при оценке числа предельных циклов квадратичных систем с негрубым фокусом – это и есть основной метод, используемый в настоящей работе. Хотя для некоторых классов систем предпочтительнее остается использование другой оптимизационной задачи

$$L \to \max, \quad \tilde{\Phi}(x, \tilde{C}) \geq L, \quad L > 0, \quad |\tilde{C}_i| \leq 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in [\alpha, \beta]. \tag{12}$$

В свою очередь задачи (11) и (12) сводятся к стандартной задаче линейного программирования.

В общем случае квадратичная система (1), имеющая негрубый фокус $A(1, -1)$, с помощью аффинного преобразования фазовых переменных и растяжения шкалы времени приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{2} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{02} = a,$$
$$\sum_{i+j=0}^{2} a_{ij}(-1)^j = 0, \quad 2a - a_{01} - a_{10} - 2a_{20} > 0, \quad a_{01} = 2a + 1 - a_{11}. \tag{13}$$

Она имеет трансверсаль $x = 0$ и в полуплоскости $x > 0$ с помощью преобразования $x = 1/\xi$, $y = \tilde{y}\xi^{-a} - \xi$ и растяжения шкалы времени приводится к первой форме системы Льенара

$$\frac{d\xi}{dt} = \tilde{y}, \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = -g(\xi) - f(\xi)\tilde{y}, \tag{14}$$

где $f(\xi) = (a_{11} + a_{01}\xi - (2a+1)\xi^2)\xi^{a-2}$, $g(\xi) = (a_{20} + a_{10}\xi + (a_{00} - a_{11})\xi^2 - a_{01}\xi^3 + a\xi^4)\xi^{2a-3}$.

При $a = 2, 3, \ldots$ система (14) является полиномиальной системой Льенара. Если же $a = -2, -3, \ldots$, то тогда система (14) с помощью преобразования $\xi = 1/x$, $\tilde{y} = -y$ приводится к полиномиальной

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\tilde{g}(x) - \tilde{f}(x)y, \tag{15}$$

где $\tilde{f}(x) = -(a_{11}x^2 + a_{01}x - 2a - 1)x^{-a-2}$, $\tilde{g}(x) = -(a_{20}x^4 + a_{10}x^3 + (a_{00} - a_{11})x^2 - a_{01}x + a)x^{-2a-3}$.

Системы (14) и (15) имеют негрубый фокус $\tilde{A}(1, 0)$.

3. Примеры квадратичных систем. В таблице приводятся примеры квадратичных систем с негрубым фокусом, о которых шла речь во введении. В колонке особые точки негрубый фокус, фокус, узел, седло обозначаются символами WF, F, N, S соответственно. Число-префикс указывает на то, сколько точек данного типа имеет квадратичная система. Если особая точка располагается на бесконечности, то указывается индекс ∞.

Различные конфигурации особых точек квадратичной системы с негрубым фокусом и распределениями предельных циклов 2, (2, 0) и (2, 1)

№	a	a_{11}	a_{20}	a_{10}	Особые точки	Распределение циклов
1	5/2	−4/5	−10	1132/100	$1WF + 1N + 2S_\infty + 1N_\infty$	2
2	3/2	4/5	−15	9175/1000	$1WF + 1F + 2S_\infty + 1N_\infty$	(2, 0)
3	105/100	15/10	−100	616/10	$1WF + 1F + 2S_\infty + 1N_\infty$	(2, 1)
4	17/23	221/115	−18	−54	$1WF + 1F + 1S_\infty$	(2, 1)
5	−4	14	−4	1936/100	$1WF + 1S + 2N_\infty + 1S_\infty$	2
6	5	−56/10	3/10	−7637/1000	$1WF + 1S + 2N_\infty + 1S_\infty$	2
7	−2	10	9	−1911/100	$1WF + 3S + 3N_\infty$	2
8	5	−5	−50	782/10	$1WF + 2N + 1S + 1N_\infty + 2S_\infty$	2
9	−4	14	−1	1237/100	$1WF + 1N + 2S + 2N_\infty + 1S_\infty$	2

Далее приводится доказательство того, что квадратичная система (13) с негрубым фокусом имеет при указанных коэффициентах соответствующее распределение предельных циклов.

Пример 1. Рассмотрим систему (13) с коэффициентами $a = 5/2$, $a_{11} = -4/5$, $a_{20} = -10$, $a_{10} = 1132/100$, которая имеет в конечной части плоскости фокус $A(1, -1)$ и узел $B(x_0, -1/x_0)$, $x_0 = -0.798539$. Выше уже отмечалось, что прямая $x = 0$ – трансверсаль системы (13), поэтому предельные циклы вокруг фокуса $A(1, -1)$ могут быть только в полуплоскости $x > 0$. Параметр a_{11} поворачивает поле системы в положительной полуплоскости, поэтому существует функция предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$ такая, что предельные циклы системы (13) проходят через точку $M(u, -1)$ при $a_{11} = \varphi(u)$. На отрезке $[1.5; 3.5]$ уравнение $\varphi(u) = -4/5$ имеет два корня $u_1 = 1.62$ и $u_2 = 3.08$. Таким образом, численный прогноз дает два предельных цикла в системе (13), проходящих через точки $(u_i, -1)$, $i = 1, 2$. Докажем теперь, что система имеет в полуплоскости $x > 0$ не более двух предельных циклов.

Переходим к системе Льенара (14). Функции, определяющие ее правую часть, принимают вид

$$f(\xi) = -4\sqrt{\xi}/5 + 34\xi^{3/2}/5 - 6\xi^{5/2}, \quad g(\xi) = -10\xi^2 + 283\xi^3/25 + 149\xi^4/50 - 34\xi^5/5 + 5\xi^6/2.$$

Берем функцию Ψ вида (5) при $k = -1$, $n = 8$ с коэффициентами

$$\Psi_i = \int\limits_1^{\xi} \Psi_i'(u)du + C_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{16}$$

и решаем для функции $\hat{\Phi} = \Phi(\xi, \tilde{C})/\sqrt{\xi}$ сеточную задачу (11), которая для системы (13) имеет вид

$$L \to \max, \quad \hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}) \geq L(\xi - 1)^2, \quad L > 0, \quad |\tilde{C}_i| \leq 1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \xi \in [\alpha, \beta]. \tag{17}$$

На отрезке $[0.1; 1.5]$ выбираем равномерную сетку с числом узлов $N_0 = 151$. Приближенно находим $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (-0.00673906; -0.0495239; -0.218964; -0.844772; -0.255843; 1; 0.131334)$, $L^* \approx 1.7 \cdot 10^{-4}$.

В интервале $(0, +\infty)$ функция $\hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}^*)$ неотрицательна. Кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$, где $C_i^* = \tilde{C}_i^*$, $i = \overline{1, n-1}$, $C_n^* = -\sum_{i=1}^{n-1}(\hat{\Phi}_i'(0)/\hat{\Phi}_n'(0))\tilde{C}_i^*$, определяет в области $\xi > 0$ два вложенных друг в друга овала, т.е. система Льенара имеет не более двух предельных циклов. По теореме 1 в области между соседними овалами существует точно один предельный цикл. Существование второго можно строго доказать с помощью принципа кольца Бендиксона. Таким образом, система Льенара (14) в области $\xi > 0$, так же как и система (13) в области $x > 0$, имеет точно два предельных цикла. Рассмотренная система имеет распределение предельных циклов 2 и относится к классу $1WF + 1N + 2S_\infty + 1N_\infty$, т.е. у нее в конечной части плоскости есть негрубый фокус и узел, а в бесконечности – два седла и узел.

Приведем пример системы класса $1WF + 1F + 2S_\infty + 1N_\infty$ с распределением предельных циклов $(2, 0)$.

Пример 2. Для системы (13) определим следующие коэффициенты: $a = 3/2$, $a_{11} = 4/5$, $a_{20} = -15$, $a_{10} = 9175/1000$. Сначала сделаем численную оценку числа и локализации предельных циклов вокруг негрубого фокуса $A(1, -1)$, построив функцию предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$. На отрезке $[1.7; 3.4]$ она приближенно равна

$$\varphi(u) \approx 1.27755 - 1.39778u + 1.73929u^2 - 1.19301u^3 +$$

$$+ 0.48711u^4 - 0.118353u^5 + 0.0158395u^6 - 0.000900582u^7.$$

Таким образом, численный прогноз дает два предельных цикла в системе (13), проходящих через точки $(u_i, -1)$, $i = 1, 2$, $u_1 = 2.05$, $u_2 = 3.13$, и их локализацию для системы (14) на отрезке $[0.25; 1.7]$.

Перейдем к доказательству точной оценки числа предельных циклов. Соответствующие функции $f(\xi)$ и $g(\xi)$ равны

$$f(\xi) = 4/(5\sqrt{\xi}) + 16\sqrt{\xi}/5 - 4\xi^{3/2}, \quad g(\xi) = -15 + 367\xi/40 + 301\xi^2/40 - 16\xi^3/5 + 3\xi^4/2.$$

Возьмем функцию Ψ вида (5) при $k = -1$, $n = 9$ и найдем ее коэффициенты по формуле (16). Сеточную задачу (17) на отрезке $[0.1; 1.8]$ с равномерной сеткой и числом интервалов $N_0 = 251$ будем искать для функции $\hat{\Phi} = \Phi(\xi, \tilde{C})\sqrt{\xi}$. Приближенно найдем $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (0.0000433027; 0.000562544; 0.00292542; 0.0078499; 0.103091; 0.0793266; -1; -0.324976)$; $L^* \approx 0.3 \cdot 10^{-4}$.

Функция $\hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}^*)$ неотрицательная в интервале $(0, +\infty)$. Соответствующая кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$, где C_i^* находятся так же, как в примере 1, определяет две кольцеобразные области. Тогда по теореме 1 система (14) имеет в области $\xi > 0$ точно два предельных цикла. Данный факт подтверждает наш численный прогноз относительно числа предельных циклов вокруг особой точки $A(1, -1)$ системы (13). Она имеет еще фокус $B(x_0, -1/x_0)$, $x_0 = -0.730717$. Переведя его в точку $(1, -1)$ преобразованием $x \to x_0 x$, $y \to -y/x_0$, снова получим систему (13) с коэффициентами $\tilde{a}_{00} = a_{00}x_0^2$, $\tilde{a}_{10} = a_{10}x_0^3$, $\tilde{a}_{20} = a_{20}x_0^4$, $\tilde{a}_{01} = a_{01}x_0$, $\tilde{a}_{11} = a_{11}x_0^2$, $\tilde{a}_{02} = a_{02}$, и отсутствие предельных циклов вокруг фокуса B устанавливается таким же образом, как и существование двух предельных циклов вокруг фокуса A.

Далее снова приведем пример системы класса $1WF + 1F + 2S_\infty + 1N_\infty$, но с более сложным распределением предельных циклов $(2, 1)$.

Пример 3. Пусть для системы (13) выбраны коэффициенты $a = 105/100$, $a_{11} = 15/10$, $a_{20} = -100$, $a_{10} = -616/10$. Тогда приближенное построение функции предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$ дает в качестве оценки два предельных цикла в области $x > 0$. Для точной оценки числа предельных циклов воспользуемся редукцией к задаче отыскания неотрицательного "максимина". Как и выше, перейдем к системе Льенара (14), в которой сделаем замену $\tilde{y} \to 5\tilde{y}$ и получим, что

$$f(\xi) = 3/(10\xi^{19/20}) + 8\xi^{1/20}/25 - 31\xi^{21/20}/50,$$

$$g(\xi) = -4/\xi^{9/10} - 308\xi^{1/10}/125 + 3243\xi^{11/10}/500 - 8\xi^{21/10}/125 + 21\xi^{31/10}/500.$$

Функцию Ψ ищем в виде (5) при $k = -1$, $n = 8$ и с коэффициентами, определяемыми формулой (16). Сеточную задачу (17) решаем на отрезке с концами $\alpha = 0.1$ и $\beta = 2.3$ и равностоящими узлами, число узлов $N_0 = 151$, для функции $\hat{\Phi} = \Phi(\xi, \tilde{C})\xi^{19/20}$. В результате находим $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (-0.0000110942; -0.0000923264; 0.00298078; 0.102951; 0.0293729; -1; -0.109548)$, $L^* \approx 2.8 \cdot 10^{-5}$.

Кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$, где C_i^* находятся так же, как в примере 1, в области $\xi > 0$ определяет два овала. Теорема 1 здесь также справедлива, поэтому заключаем, что система Льенара (14) в области $\xi > 0$ имеет не более двух предельных циклов, как и система (13) в области $x > 0$. Причем существование первого вытекает из теоремы 1, а существование второго можно доказать, используя принцип кольца Бендиксона. Что касается фокуса $B(x_0, -1/x_0)$, $x_0 = -1.62337$, то, переведя его в точку $(1, -1)$, как при доказательстве отсутствия предельного цикла вокруг точки B в примере 2, получаем систему с новыми коэффициентами. Преобразовав ее в систему Льенара (14) и применив к ней функцию $\Phi(\xi, \tilde{y}, C)$, получим, что кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$ имеет один овал. По теореме 1 данный факт гарантирует существование не более одного предельного цикла системы Льенара в области $\xi > 0$ и первоначальной системы в полуплоскости $x < 0$. Существование предельного цикла вокруг фокуса B вытекает из принципа кольца Бендиксона.

Рассмотрим пример системы (13) класса $1WF + 1F + 1S_\infty$ с распределением предельных циклов $(2, 1)$.

Пример 4. Пусть коэффициенты системы (13) равны $a = 17/23$, $a_{11} = 221/115$, $a_{20} = -18$, $a_{10} = -54$. Тогда она имеет два фокуса $A(1, -1)$ и $B(x_0, -1/x_0)$, $x_0 = -4.00003$. Рассмотрим функцию предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$. На отрезке $[2.5; 9.5]$ уравнение $\varphi(u) = 221/115$ имеет два корня $u_1 = 2.99$ и $u_2 = 8.92$. Таким образом, численный прогноз дает два предельных цикла в системе (13), проходящих через точки $(u_i, -1)$, $i = 1, 2$. При переходе к системе Льенара (14) получим, что ее предельные циклы в положительной полуплоскости локализованы в интервале $[0.11; 3.34]$. Сделаем в ней замену $\tilde{y} \to 5\tilde{y}$. Тогда функции, определяющие правую часть, принимают вид

$$f(\xi) = 221/(575\xi^{29/23}) + 64/(575\xi^{6/23}) - 57\xi^{17/23}/115,$$

$$g(\xi) = -18/(25\xi^{35/23}) - 54/(25\xi^{12/23}) + 8259\xi^{11/23}/2875 - 64\xi^{34/23}/2875 + 17\xi^{57/23}/575.$$

Функцию Ψ ищем в виде (5) при $k = -7/2$ и $n = 12$. Ее коэффициенты находим по формуле (16). Задачу (17) решаем на отрезке $[0.1; 3.4]$, который разбиваем на три участка: $[0.1; 2.3)$, $[2.3; 2.7)$, $[2.7; 3.4]$ с числом узлов $N_1 = 300$, $N_2 = 300$, $N_3 = 200$ на каждом соответственно. Функцию $\hat{\Phi}$ будем искать в виде $\hat{\Phi} = \Phi(\xi, \tilde{C})\xi^{95/23}$. Несмотря на то, что число функций $\hat{\Phi}_i$ в данном примере достаточно большое для случая негрубого фокуса, сеточная задача успешно разрешается. Ее приближенное решение равно $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (0.00993608;\ -0.176371;\ -0.221616;\ 1;\ -0.283621;\ 0.816726;\ 0.448708;\ -1;\ 0.578947;\ -1;\ 0.668487)$, $L^* \approx 4.3 \cdot 10^{-4}$.

Функция $\hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}^*)$ неотрицательная в интервале $(0, +\infty)$ и кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$, где C_i^* находятся так же, как в примере 1, определяет две кольцеобразные области в положительной полуплоскости. Тогда по теореме 1 система (14) имеет в области $\xi > 0$ точно два предельных цикла. Данный факт подтверждает наш численный прогноз относительно числа предельных циклов вокруг особой точки $A(1, -1)$ системы (13).

Далее рассмотрим фокус $B(x_0, -1/x_0)$, $x_0 = -1.62337$. Переведя его в точку $(1, -1)$, как и при доказательстве отсутствия предельного цикла вокруг точки B в примере 2, получаем систему с новыми коэффициентами. Преобразовав ее в систему Льенара (14) и применив к ней функцию $\Phi(\xi, \tilde{y}, C)$, получим, что кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$ имеет один овал. По теореме 1 данный факт гарантирует существование не более одного предельного цикла системы Льенара в области $\xi > 0$. Существование предельного цикла вокруг фокуса B можно строго доказать с помощью принципа кольца Бендиксона.

Рассмотрим пример системы (13) класса $1WF + 1S + 2N_\infty + 1S_\infty$ с распределением предельных циклов 2. Помимо негрубого фокуса $A(1, -1)$ в конечной части плоскости она имеет критическую точку типа седло.

Пример 5. Пусть коэффициенты системы (13) равны $a = -4$, $a_{11} = 14$, $a_{20} = -4$, $a_{10} = 1936/100$. Седло расположено в точке $B(x_0, -1/x_0)$, $x_0 = 0.320213$. Численными методами строим функцию предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$ на отрезке $[0.63; 0.95]$, где она имеет два корня $u_1 = 0.65$ и $u_2 = 0.84$. Данный факт предполагает наличие двух предельных циклов в системе (13), проходящих через точки $(u_i, -1)$, $i = 1, 2$. Коэффициент $a < 0$, поэтому переходим к системе Льенара (15) с полиномами

$$\tilde{f}(x) = -x^2(7 - 21x + 14x^2), \quad \tilde{g}(x) = 4x^5 - 21x^6 + 809x^7/25 - 484x^8/25 + 4x^9.$$

Далее с помощью преобразования $x = \xi + 1$ переходим к другой полиномиальной системе Льенара. Для нее функцию Ψ ищем в виде (5) при $k = -1$ и $n = 9$ с коэффициентами

$$\Psi_i = \int_0^\xi \Psi_i'(u)du + C_i, \quad i = \overline{1, n}, \tag{18}$$

и решаем для функции $\hat{\Phi} = 10^5\tilde{\Phi}(\xi, \tilde{C})/(\xi + 1)^2$ сеточную задачу типа (12), которая для системы (13) имеет вид

$$L \to \max, \quad \hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}) \geq L, \quad L > 0, \quad |\tilde{C}_i| \leq 1, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \xi \in [\alpha, \beta]. \tag{19}$$

Отрезок $[-0.55; 0.3]$ разбиваем на $N_0 = 251$ равных интервалов. Получаем приближенное решение $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (-0.382517;\ -0.799914;\ -1;\ -0.733067;\ -0.402233;\ -0.0366874;\ 0.267929;\ 0.00146377)$, $L^* \approx 1.3 \cdot 10^{-2}$.

В интервале $(-1, +\infty)$ функция $\hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}^*)$ неотрицательная. Кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$, где C_i^* находятся так же, как в примере 1, определяет в области $\xi > -1$ два вложенных друг в друга овала. По теореме 1 это означает, что в области между соседними овалами существует точно один предельный цикл. Существование второго можно строго доказать с помощью принципа кольца Бендиксона. Таким образом, система Льенара (14) в области $\xi > -1$, так же как и система (13) в области $x > 0$, имеет точно два предельных цикла.

Следующий рассматриваемый пример также относится к классу $1WF + 1S + 2N_\infty + 1S_\infty$ и имеет распределение предельных циклов 2.

Пример 6. Пусть коэффициенты системы (13) равны $a = 5$, $a_{11} = -56/10$, $a_{20} = 3/10$, $a_{10} = -7637/1000$. Седло расположено в точке $B(x_0, -1/x_0)$, $x_0 = 22.7923$. Предварительный численный анализ говорит о том, что критическую точку $A(1,-1)$ окружают два предельных цикла, которые проходят через точки $(u_i, -1)$, $i = 1, 2$, $u_1 = 1.12$, $u_2 = 1.39$. Функция предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$, построенная на отрезке $[1.01; 1.49]$, приблизительно равна

$$\varphi(u) \approx 84.2003 - 501.829u + 1198.31u^2 - 1585u^3 + 1254.23u^4 - 593.806u^5 + 155.755u^6 - 17.4621u^7.$$

Далее переходим к полиномиальной системе Льенара (14) с функциями

$$f(\xi) = -28\xi^3/5 + 83\xi^4/5 - 11\xi^5, \quad g(\xi) = 3\xi^7/10 - 7637\xi^8/1000 + 18937\xi^9/1000 - 83\xi^{10}/5 + 5\xi^{11}.$$

В ней делаем преобразования $\xi = x + 1$. Функцию Ψ ищем в виде (5) при $k = -1$ и $n = 8$ с коэффициентами $\Psi_i = \int_0^x \Psi_i'(u)\,du + C_i$, $i = \overline{1,n}$. Для функции $\hat{\Phi} = 10^6\tilde{\Phi}(x, \tilde{C})/(x+1)^3$, как и в примере 5, решаем сеточную задачу (19). В качестве отрезка $[\alpha, \beta]$ выбираем $[-0.4; 0.3]$ с равномерной сеткой и числом узлов $N_0 = 490$. Получаем приближенное решение $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (-1; -0.728101; -0.244083; -0.0570944; -0.00262866; 0.000613252; 0.0000111569)$, $L^* \approx 2.6 \cdot 10^{-3}$.

В интервале $(-1, +\infty)$ функция $\hat{\Phi}(x, \tilde{C}^*)$ неотрицательная. Кривая $\Psi(x, y, C^*) = 0$, где C_i^* находятся так же, как в примере 1, определяет в области $x > -1$ два вложенных друг в друга овала. Тогда по теореме 1 система (14) имеет в области $x > -1$ точно два предельных цикла. Причем один предельный цикл расположен в области между соседними овалами. Таким образом, система Льенара (14) в области $x > -1$, так же как и система (13) в области $x > 0$, имеет точно два предельных цикла.

Теперь рассмотрим систему (13) класса $1WF + 3S + 3N_\infty$ с распределением предельных циклов 2. Помимо негрубого фокуса $A(1,-1)$ в конечной части плоскости она имеет три седла.

Пример 7. Пусть коэффициенты системы (13) равны $a = -2$, $a_{11} = 10$, $a_{20} = 9$, $a_{10} = -1911/100$. Тогда она имеет негрубый фокус $A(1,-1)$ и три седла $B_i(x_i, -1/x_i)$, $i = 1, 2, 3$, $x_1 = -0.787378$, $x_2 = 0.161332$, $x_3 = 1.74938$. Таким образом, предельные циклы вокруг точки $A(1,-1)$ естественным образом локализуются на отрезке $x_2 \le x \le x_3$. Проведем численный анализ в полосе фазовой плоскости между седлами B_2 и B_3. Построенная на отрезке $[0.34; 0.98]$ функция предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$ приблизительно равна

$$\varphi(u) \approx 9.839 + 1.13231u - 3.42394u^2 + 6.63696u^3 - 9.80638u^4 + 10.3352u^5 - 6.36298u^6 + 1.65107u^7.$$

Тогда уравнение $\varphi(u) = 10$ имеет два корня $u_1 = 0.39$ и $u_2 = 0.74$, т.е. численный прогноз дает два предельных цикла в системе (13), проходящих через точки $(u_i, -1)$, $i = 1, 2$. Как и в примере 5, переходим к системе Льенара (15) с полиномами

$$\tilde{f}(x) = -3 - 13x - 10x^2, \quad \tilde{g}(x) = 2x - 13x^2 + 89x^3/100 + 1911x^4/100 - 9x^5.$$

Далее в полиномиальной системе Льенара делаем преобразование $x = \xi + 1$. Для полученной системы функцию Ψ ищем в виде (5) при $k = -9/10$ и $n = 7$ с коэффициентами, определяемыми формулой (18). Сеточную задачу (19) для функции $\hat{\Phi} = 10\tilde{\Phi}(\xi, \tilde{C})$ решаем на отрезке $[-0.9; 0.8]$, который разбит на $N_0 = 251$ равных интервалов. Получаем приближенное решение $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (-0.0396628; -0.216672; -0.72831; -0.219044; 1; 0.138578)$, $L^* \approx 7.7 \cdot 10^{-3}$.

Функция

$$\hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}^*) \approx 0.156395 - 0.458342\xi - 11.9493\xi^2 + 23.3337\xi^3 + 340.685\xi^4 - 216.358\xi^5 -$$

$$-3945.82\xi^6 - 3098.76\xi^7 + 14712.3\xi^8 + 32434.7\xi^9 + 28857.4\xi^{10} + 27266.1\xi^{11} + 31306.7\xi^{12} -$$

$$-3988.66\xi^{13} - 65344.6\xi^{14} - 82940.1\xi^{15} - 49555.8\xi^{16} - 14970.7\xi^{17} - 1845.21\xi^{18}$$

неотрицательная при $-1 < \xi \le 0.88$. Данный полуинтервал содержит интервал $[x_2-1, x_3-1]$, где локализованы предельные циклы системы (13).

Кривая $\Psi(x, y, C^*) = 0$, где C_i^* находятся так же, как в примере 1, определяет в области $0 < x \le 1.88$ два вложенных друг в друга овала. Тогда по теореме 1 система (13) имеет в данной области точно два предельных цикла, причем один предельный цикл расположен в области между соседними овалами.

Рассмотрим пример системы класса $1WF + 2N + 1S + 1N_\infty + 2S_\infty$ с распределением предельных циклов 2.

Пример 8. Пусть коэффициенты системы (13) равны $a = 5$, $a_{11} = -5$, $a_{20} = -50$, $a_{10} = 782/10$. Тогда она имеет негрубый фокус $A(1,-1)$, два узла $B_i(x_i, -1/x_i)$, $i = 1,2$, $x_1 = -0.442813$, $x_2 = 0.337308$, и седло $B_3(x_3, -1/x_3)$, $x_3 = 0.669505$. Предельные циклы системы (13) могут окружать только фокус $A(1,-1)$. При этом достаточно рассмотреть полуплоскость $x_3 \le x$. Проведем численную оценку числа и локализации предельных циклов вокруг особой точки $A(1,-1)$. Построенная на отрезке $[1.2; 3.3]$ функция предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$ приблизительно равна

$$\varphi(u) \approx -5.62692 + 2.18951u - 3.14882u^2 + 2.43186u^3 -$$

$$-1.09652u^4 + 0.290122u^5 - 0.0418565u^6 + 0.00254652u^7.$$

Уравнение $\varphi(u) = -5$ имеет два корня $u_1 = 1.32$ и $u_2 = 2.85$ на указанном отрезке, т.е. численный прогноз дает два предельных цикла в системе (13), проходящих через точки $(u_i, -1)$, $i = 1,2$.

Переходим к системе Льенара (14). Функции, определяющие ее правую часть, принимают вид

$$f(\xi) = -5\xi^3 + 16\xi^4 - 11\xi^5, \quad g(\xi) = -50\xi^7 + 391\xi^8/5 - 86\xi^9/5 - 16\xi^{10} + 5\xi^{11}.$$

Предельные циклы полученной системы Льенара могут располагаться только в полосе $0 < \xi \le 1.5$.

Берем функцию Ψ вида (5) при $k = -1$, $n = 7$ с коэффициентами, определяемыми формулой (16), и решаем для функции $\hat{\Phi} = 10^2\Phi(\xi, \tilde{C})/\xi^3$ сеточную задачу (17). На отрезке $[0.3; 1.52]$ выбираем равномерную сетку с числом узлов $N_0 = 251$. Приближенно находим решение $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (-0.0366449;\ -0.148963;\ -1;\ -0.0936074;\ 0.774377;\ 0.0379765)$, $L^* \approx$ $\approx 7.2 \cdot 10^{-2}$.

В полуинтервале $(0; 1.55]$ функция $\hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}^*)$ неотрицательная. Ближайший к точке $(0,0)$ положительный корень расположен в точке $(1.578166; 0)$. Кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$, где C_i^* находятся так же, как в примере 1, определяет в области $0 < \xi < 1.55$ два вложенных друг в друга овала, т.е. система Льенара имеет не более двух предельных циклов. По теореме 1 в области между соседними овалами существует точно один предельный цикл. Существование второго можно строго доказать с помощью принципа кольца Бендиксона. Тогда для исходной системы (13) соответствующая функция $\Phi(x, C^*)$ положительна в области $0.65 < x$, кривая $\Psi(x, y, C^*) = 0$ определяет в данной области два вложенных друг в друга овала. Следовательно, система (13) в области $0.65 < x$ имеет точно два предельных цикла.

Завершает классификацию пример системы класса $1WF + 1N + 2S + 2N_\infty + 1S_\infty$ с распределением предельных циклов 2.

Пример 9. Пусть коэффициенты системы (13) равны $a = -4$, $a_{11} = 14$, $a_{20} = -1$, $a_{10} = 1237/100$. Тогда она имеет негрубый фокус $A(1,-1)$, узел $B_1(x_1, -1/x_1)$, $x_1 = 9.65157$, и два седла $B_i(x_i, -1/x_i)$, $i = 2,3$, $x_2 = 0.290172$, $x_3 = 1.42826$. Таким образом, предельные циклы вокруг точки $A(1,-1)$ естественным образом локализуются на отрезке $x_2 \le x \le x_3$.

Проведем численный анализ в полосе фазовой плоскости между седлами B_2 и B_3. Построенная на отрезке $[0.56; 0.98]$ функция предельных циклов $a_{11} = \varphi(u)$ приблизительно равна

$$\varphi(u) \approx 7.84402 + 61.7802u - 264.049u^2 + 620.486u^3 - 863.64u^4 + 711.256u^5 - 320.903u^6 + 61.2263u^7.$$

Тогда уравнение $\varphi(u) = 14$ имеет два корня $u_1 = 0.57$ и $u_2 = 0.82$, т.е. численный прогноз дает два предельных цикла в системе (13), проходящих через точки $(u_i, -1)$, $i = 1, 2$. Переходим к системе Льенара (15) с полиномами

$$\tilde{f}(x) = -x^2(7 - 21x + 14x^2), \quad \tilde{g}(x) = 4x^5 - 21x^6 + 2837x^7/100 - 1237x^8/100 + x^9.$$

Далее в полиномиальной системе Льенара делаем преобразование $x = \xi + 1$. Ее предельные циклы могут располагаться только в полосе $0.29 \le \xi \le 1.43$. Для полученной системы Льенара функцию Ψ ищем в виде (5) при $k = -1$ и $n = 7$ с коэффициентами, определяемыми формулой (18). Сеточную задачу (19) для функции $\hat{\Phi} = 100\tilde{\Phi}(\xi, \tilde{C})/(\xi+1)^2$ решаем на отрезке $[-0.6; 0.44]$, который разбит на $N_0 = 151$ равных интервалов. Получаем приближенное решение $\tilde{C} = \tilde{C}^* = (-0.656055; -1; -0.888354; -0.0849716; -0.100725; 0.00522516)$, $L^* \approx 1.3 \cdot 10^{-3}$.

В полуинтервале $(-1; 0.48]$ функция $\hat{\Phi}(\xi, \tilde{C}^*)$ неотрицательная. Ближайший к точке $(0,0)$ положительный корень расположен в точке $(0.49; 0)$. Кривая $\Psi(\xi, \tilde{y}, C^*) = 0$, где C_i^* находятся так же, как в примере 1, определяет в области $-1 < \xi < 0.49$ два вложенных друг в друга овала, т.е. система Льенара имеет не более двух предельных циклов. По теореме 1 точно один предельный цикл расположен в области между соседними овалами. Тогда для исходной системы (13) соответствующая функция $\Phi(x, C^*)$ положительна в области $0 < x < 1.49$, кривая $\Psi(x, y, C^*) = 0$ определяет в данной области два вложенных друг в друга овала. Таким образом, система (13) в области $0 < x < 1.49$ имеет точно два предельных цикла.

4. Заключение. Полученные квадратичные системы с негрубым фокусом и предельными циклами нормального размера со всеми известными в настоящее время максимальными распределениями 2, $(2,0)$, $(2,1)$ дополняют ряд систем, приведенных в работе [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Perko L.M.* // Rocky Mountain of Mathematics. 1984. V. 14. № 3. P. 619–644.
2. *Cherkas L.A., Artes J.C., Libre J.* // Изв. АН Республики Молдова. Математика. 2003. Т. 41. № 1. С. 31–46.
3. *Черкас Л.А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 5. С. 689–699.
4. *Гринь А.А., Черкас Л.А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 4. С. 29–38.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники, г. Минск,
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию
07.07.2003 г.