ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 6, с. 840–843

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.955

О ПРИНЦИПЕ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ДЛЯ МАТРИЧНЫХ СИСТЕМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТИПА ФЕДОРОВА–РИККАТИ

 С. В. Жестков, П. П. Забрейко

В работе [1] для общих линейных нормальных систем в частных производных первого порядка на основе метода мажорант построено инвариантное банахово пространство, в котором интегральный оператор L соответствующей задачи Коши удовлетворяет условию $|||L||| < 1$. Это означает, что для линейных уравнений теорема Коши–Ковалевской может быть доказана с помощью классического принципа неподвижной точки Банаха–Каччиопполи без использования шкалы банаховых пространств (см. [2, 3]). В настоящей работе этот результат распространяется на матричные системы в частных производных вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\left(C_k(t,x)\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k}D_k(t,x)\right) + U\Gamma(t,x)U, \tag{1}$$

$$U|_{t=0} = \Phi(x), \tag{2}$$

где $U(t,x)$ – неизвестная $m \times m$-матрица. При этом, так как искомое банахово пространство существенно зависит от вида используемых мажорант, рассматриваются два случая.

1. В первом случае будем предполагать, что $m \times m$-матрицы $C_k(t,x)$, $D_k(t,x)$, $\Gamma(t,x)$, $\Phi(x)$ непрерывны по t и аналитичны по x, точнее говоря, экспоненциального типа по x в области $G = \{t,x: \ t \geq 0, \ x \in R^n\}$, т.е. справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered} C_k(t,x) \ll c_k(t)\exp(R,x), \quad D_k(t,x) \ll d_k(t)\exp(R,x), \quad k = \overline{1,n}, \\ \Gamma(t,x) \ll \gamma(t)\exp(R,x), \quad \Phi(x) \ll \varphi\exp(R,x), \end{gathered} \tag{3}$$

где $(R,x) = \sum_{s=1}^{n} R_s x_s$, $c_k(t)$, $d_k(t)$, $\gamma(t)$ – непрерывные, неотрицательные на $[0,+\infty)$ функции, $\varphi > 0$, $R_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, – некоторые постоянные. Под нормой вектора (матрицы) понимаются величины $\|x\| = \max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k|$, $\|\Phi\| = \max\limits_{1\leq s\leq m}\sum_{i=1}^{m}|\varphi_{si}|$. Знак мажорирования $\ll$ означает, что нормы матричных коэффициентов разложения в степенной ряд по x матрицы, стоящей слева, не превосходят соответствующих коэффициентов разложения по x функции, стоящей справа.

Согласно методу мажорант [4], построим для задачи (1), (2) соответствующую скалярную мажорантную задачу

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}(c_k(t) + d_k(t))\exp(R,x)\frac{\partial z}{\partial x_k} + \gamma(t)\exp(R,x)z^2, \tag{4}$$

$$z|_{t=0} = \varphi\exp(R,x) \tag{5}$$

и будем решать ее в области $G_Q = \{t,x: \ t \geq 0, \ \|x\| \leq Q\}$, где $Q > 0$ – некоторая фиксированная постоянная. Интегрируя (4), (5) методом характеристик [5], получим

$$z(t,x) = \varphi\left[H_1(t,0,x) - \varphi\int_0^t \frac{\gamma(\tau)\,d\tau}{H_1(t,\tau,x)}\right]^{-1}; \tag{6}$$

здесь и всюду ниже

$$H_q(t,\tau,x) \equiv \exp\{-(R,x)\} - \frac{1}{q}\int_\tau^t \varepsilon(\theta)\,d\theta, \quad \varepsilon(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} R_k(c_k(t) + d_k(t)).$$

Это решение определено в области G_Q, если выполняются неравенства

$$\mu_1(0) > 0 \quad \left(\mu_q(\tau) \equiv \exp\{-RQ\} - \frac{1}{q}\int_\tau^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta, \quad R \equiv \sum_{i=1}^{n} R_i\right), \tag{7}$$

$$\mu_1(0) - \varphi \int\limits_0^\infty \frac{\gamma(\tau)d\tau}{\mu_1(\tau)} > 0. \tag{8}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3) и неравенства (7), (8). Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение, определенное в области G_Q, для которого справедливо соотношение $U(t,x) \ll z(t,x)$, где функция $z(t,x)$ определяется формулой (6).*

Рассмотрим вопрос о построении инвариантного банахова пространства для задачи (1), (2). Для этого введем вспомогательную мажорантную задачу с параметрами $0 < q < 1$, $\nu \geq 1$

$$q\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{k=1}^n (c_k(t) + d_k(t)) \exp(R,x) \frac{\partial z}{\partial x_k} + \nu\gamma(t)\exp(R,x)z^2, \quad z|_{t=0} = \exp(R,x).$$

Ее решение имеет вид

$$E_{q,\nu}(t,x) = \left[H_q(t,0,x) - \frac{\nu}{q}\int\limits_0^t \frac{\gamma(\tau)\,d\tau}{H_q(t,\tau,x)}\right]^{-1}.$$

Чтобы функция $E_{q,\nu}(t,x)$ была определена в области G_Q, потребуем выполнения неравенств

$$\mu_q(0) > 0, \quad \frac{1}{q}\int\limits_0^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta + \frac{\nu}{q\mu_q(0)}\int\limits_0^\infty \gamma(\tau)\,d\tau < \exp\{-RQ\}. \tag{9}$$

Так как $\nu \geq 1$, то из последнего неравенства находим, что параметр q должен удовлетворять условию

$$q \geq q_0 \equiv \int\limits_0^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta \left[\exp\{-RQ\} - \left(\int\limits_0^\infty \gamma(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}\right]^{-1} > 0. \tag{10}$$

Заметим, что из условия $\mu_q(0) > 0$ с учетом (7) следует неравенство $q > \exp\{RQ\}\int_0^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta$, менее жесткое, чем (10). В силу (10), учитывая, что $q < 1$, приходим к окончательному условию

$$\int\limits_0^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta + \left(\int\limits_0^\infty \gamma(\tau)\,d\tau\right)^{1/2} < \exp\{-RQ\}. \tag{11}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (11) и любом значении $q \in (q_0, 1)$ функция $E_{q,\nu}(t,x)$ будет определена в области G_Q. Этот факт позволяет ввести линейное нормированное пространство $B_{q,\nu}(G_Q)$ непрерывных по t и аналитических по x матричных функций, определенных в области G_Q и удовлетворяющих при некотором $\lambda = \lambda(U) > 0$ соотношению $U(t,x) \ll \lambda E_{q,\nu}(t,x)$, причем $|||U(t,x)||| = \inf\limits_{\lambda>0}\{\lambda\}$. Пространство $B_{q,\nu}(G_Q)$, очевидно, является банаховым. Это пространство и является искомым для задачи (1), (2).

Сведем задачу (1), (2) к эквивалентному интегральному уравнению

$$U = LU, \quad LU \equiv \Phi(x) + \int\limits_0^t \left\{\sum_{k=1}^n \left(C_k(\tau,x)\frac{\partial U}{\partial x_k} + \frac{\partial U}{\partial x_k}D_k(\tau,x)\right) + U\Gamma(\tau,x)U\right\}d\tau. \tag{12}$$

Покажем, что на некотором шаре $B_r(G_Q) = \{U(t,x) : \ |||U||| \leq r\}$ банахова пространства $B_{q,\nu}(G_Q)$, $q \in (q_0, 1)$, оператор L удовлетворяет условию Липшица с постоянной q. Пусть U_1, U_2 принадлежат шару $B_r(G_Q)$. Тогда, используя свойства операции мажорирования [6], получаем $(U_2 - U_1 \equiv V)$

$$LU_2 - LU_1 = \int\limits_0^t \left\{\sum_{k=1}^n \left(C_k(\tau,x)\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k}D_k(\tau,x)\right) + U_2\Gamma(\tau,x)V + V\Gamma(\tau,x)U_1\right\}d\tau \ll$$

$$\ll \int\limits_0^t \left\{\sum_{k=1}^n (c_k(\tau) + d_k(\tau))\frac{\partial E_{q,\nu}}{\partial x_k}\exp(R,x) + 2r\gamma(\tau)\exp(R,x)E_{q,\nu}^2\right\}d\tau|||V||| =$$

$$= q\int\limits_0^t \frac{\partial E_{q,\nu}}{\partial \tau}\,d\tau|||V||| \ll qE_{q,\nu}(t,x)|||V|||, \tag{13}$$

причем $\nu = 2r$. Из (13) следует, что $|||LU_2 - LU_1||| \le q|||U_2 - U_1|||$, т.е. условие Липшица. Из второго неравенства из (9) вытекает оценка сверху радиуса шара $r(q) < (1/2)q\mu_q^2(0)(\int_0^\infty \gamma(\tau)\,d\tau)^{-1} \equiv R_q$. Отметим, что $R_q \ge 1/2$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3) и неравенство (11). Тогда для любого значения* $q\in(q_0,1)$ *существует банахово пространство* $B_{q,\nu}(G_Q)$, *на любом шаре* $B_r(G_Q)$, $1/2 \le r < R_q$, *которого оператор* L *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* q.

2. Предположим, что вместо условий (3) выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered} C_k(t,x) \ll c_k(t)\frac{(1-x_k/Q)}{\omega^2(x)}, \quad D_k(t,x) \ll d_k(t)\frac{(1-x_k/Q)}{\omega^2(x)}, \quad k=\overline{1,n}, \\ \Gamma(t,x) \ll \frac{\gamma(t)}{\omega(x)}, \quad \Phi(x) \ll \frac{\varphi}{\omega(x)}, \quad \omega(x) \equiv \prod_{k=1}^n\left(1-\frac{x_k}{Q}\right), \quad \|x\| \le Q_0 < Q, \end{gathered} \tag{14}$$

где функции $c_k(t)$, $d_k(t)$, $\gamma(t)$ определены выше. Тогда соответствующая мажорантная задача примет вид

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2(x)}\sum_{k=1}^n (c_k(t)+d_k(t))\left(1-\frac{x_k}{Q}\right)\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\gamma(t)}{\omega(x)}z^2, \tag{15}$$

$$z|_{t=0} = \varphi/\omega(x). \tag{16}$$

Интегрируя систему (15), (16) в области G_{Q_0} методом характеристик, получаем

$$z(t,x) = \varphi\left[h_1(t,0,x) - \varphi\int\limits_0^t \frac{\gamma(s)}{h_1(t,s,x)}\,ds\right]^{-1}, \tag{17}$$

$$h_q(t,s,x) \equiv \left[\omega^2(x) - \frac{2}{qQ}\int\limits_s^t \varepsilon(\theta)\,d\theta\right]^{1/2}, \quad \varepsilon(\theta) \equiv \sum_{k=1}^n (c_k(\theta)+d_k(\theta)).$$

Из (17) находим, что при выполнении неравенств

$$\rho_1(0) > 0 \quad \left(\rho_q(s) \equiv \left(1-\frac{Q_0}{Q}\right)^{2n} - \frac{2}{qQ}\int\limits_s^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta\right), \tag{18}$$

$$[\rho_1(0)]^{1/2} - \varphi\int\limits_0^\infty \frac{\gamma(s)}{[\rho_1(s)]^{1/2}}\,ds > 0 \tag{19}$$

функция $z(t,x)$ будет определена в области G_{Q_0}. Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (14) и неравенства (18), (19). Тогда задача (1), (2) имеет единственное решение, определенное в области* G_{Q_0}, *для которого справедливо соотношение* $U(t,x) \ll z(t,x)$, *где функция* $z(t,x)$ *определяется формулой (17).*

Рассмотрим вопрос о построении инвариантного банахова пространства для этого случая. Введем вспомогательную мажорантную задачу с параметрами $0<q<1$, $\nu \ge 1$

$$q\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\omega^2(x)}\sum_{k=1}^n (c_k(t)+d_k(t))\left(1-\frac{x_k}{Q}\right)\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\nu\gamma(t)}{\omega(x)}z^2,$$

$$z|_{t=0} = \omega^{-1}(x).$$

Ее решение имеет вид

$$E_{q,\nu}(t,x) = \left[h_q(t,0,x) - \frac{\nu}{q}\int\limits_0^t \frac{\gamma(s)\,ds}{h_q(t,s,x)}\right]^{-1},$$

где $h_q(t,s,x)$ определена в (17). Чтобы функция $E_{q,\nu}(t,x)$ была определена в области G_{Q_0}, потребуем выполнения неравенств $\rho_q(0) > 0$

$$[\rho_q(0)]^{1/2} - \frac{\nu}{q[\rho_q(0)]^{1/2}} \int\limits_0^\infty \gamma(s)\,ds > 0.$$

Так как $\nu \geq 1$, то из последнего неравенства находим, что параметр q должен удовлетворять неравенству

$$q \geq \left[\int\limits_0^\infty \gamma(s)\,ds + \frac{2}{Q}\int\limits_0^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta\right]\left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{-2n} \equiv q_0. \tag{20}$$

Заметим, что из условия $\rho_q(0) > 0$ с учетом (18) следует неравенство

$$q > \frac{2}{Q}\int\limits_0^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{-2n},$$

менее жесткое, чем (20). В силу (20), учитывая, что $q < 1$, приходим к окончательному условию

$$\int\limits_0^\infty \gamma(s)\,ds + \frac{2}{Q}\int\limits_0^\infty \varepsilon(\theta)\,d\theta < \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2n}, \tag{21}$$

при выполнении которого и любом значении $q \in (q_0, 1)$ функция $E_{q,\nu}(t,x)$ будет определена в области G_{Q_0}.

Аналогично вводится банахово пространство $B_{q,\nu}(G_{Q_0})$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (14) и неравенство (21). Тогда для любого значения $q \in (q_0, 1)$ существует банахово пространство $B_{q,\nu}(G_{Q_0})$, на любом шаре $B_r(G_{Q_0})$, $1/2 \leq r < R_q$, которого оператор L удовлетворяет условию Липшица с постоянной q. При этом $R_q = (1/2)q\rho_q(0)/\int_0^\infty \gamma(s)\,ds$.*

Таким образом, из полученных результатов следует существование класса нормальных нелинейных уравнений в частных производных типа Федорова–Риккати, который допускает доказательство классической теоремы С.В. Ковалевской на основе принципа Банаха–Каччиопполи без использования шкалы банаховых пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жестков С.В., Забрейко П.П.* // Докл. НАН Беларуси. 2001. Т. 45. № 6. С. 12–16.
2. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
3. *Дубинский Ю.А.* Задача Коши в комплексной области. М., 1996.
4. *Жестков С.В.* // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43. № 5. С. 583–590.
5. *Гюнтер Н.М.* Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. ОНТИ; ГТТИ. 1934.
6. *Пуанкаре А.* // Избр. труды в 3 т. Т. 1. М., 1971.

Институт прикладной оптики
НАН Беларуси, г. Могилев,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
26.12.2001 г.