ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 6, с. 756–762

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925

ПОДВИЖНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2004 г. С. Л. Соболевский

Введение. Ряд работ посвящен исследованию подвижных особых точек полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$w^{(n)} = P(w^{(n-1)}, w^{(n-2)}, \ldots, w, z), \tag{1}$$

где n – натуральное число, z – независимая комплексная переменная, w – комплекснозначная функция от z, P – полином по w и его производным с коэффициентами, аналитическими по z в некоторой области U комплексной плоскости. Известна полная классификация полиномиальных дифференциальных уравнений до четвертого порядка включительно на предмет отсутствия подвижных критических особых точек. Классификация полиномиальных уравнений первого и второго порядка вытекает соответственно из классификации алгебраических уравнений первого порядка (соответствующие ссылки см. в [1]) и рациональных уравнений второго порядка [2]. Полная классификация полиномиальных уравнений третьего порядка дана в работах [3–5], а полиномиальных уравнений четвертого порядка – в работах [6–8]. Также получены отдельные результаты для уравнений высших порядков [6, 8].

В исследовании полиномиальных уравнений третьего и более высокого порядка проблемными являются так называемые барьерные уравнения, простейшее из них – барьерное уравнение Шази [3]

$$w''' = ww'' - 2w'^2. \tag{2}$$

Барьерные уравнения получаются как упрощенные уравнения (в смысле Пенлеве) для целых классов полиномиальных дифференциальных уравнений и характеризуются тем, что при поиске решений вида $w = k(z - z_0)^t$ (в частности, $t = -1$ для (2)) получается уравнение для k, не имеющее ненулевых корней (для всех остальных нелинейных полиномиальных дифференциальных уравнений упрощенные уравнения всегда допускают решения указанного выше вида с ненулевым k). В силу этого барьерные уравнения не допускают решений с подвижными полюсами или критическими полюсами, что делает невозможным применение классических методов для исследования их подвижных особенностей. Барьерные уравнения могут либо вовсе не иметь подвижных особых точек, либо допускать неалгебраические подвижные особенности. Другими примерами барьерных уравнений являются, в частности,

$$w^{(n)} = (n-2)w''w^m - (n+m-2)(w')^2w^{m-1}, \tag{3}$$

где n, m – натуральные числа, $n \geq 3$ (при $n = 3$, $m = 1$ имеем уравнение (2)),

$$w^{(IV)} = w'''w - 3w''w' + a((w')^2w - 2w''w), \tag{4}$$

где a – произвольное комплексное число,

$$w^{(IV)} = w'''w^2 - 7w''w'w + 6w'^3. \tag{5}$$

Наличие подвижных критических особенностей у уравнения (2) доказано, в частности, в работах [9, 10]. Отсутствие целых трансцендентных решений и, следовательно, наличие подвижных особых точек (вообще говоря, не обязательно критических) для целого ряда барьерных уравнений, сумма коэффициентов которых при членах максимальной степени отлична от нуля, следует из обобщения известной теоремы Г. Виттиха [11], полученного И.П. Мартыновым [12]. Это имеет место, в частности, для уравнений (2)–(4). Вместе с тем для бесконечного множества барьерных уравнений, одним из которых является (5), данная теорема неприменима.

В настоящей работе доказано наличие подвижных критических особенностей у всех барьерных уравнений и как следствие наличие подвижных особенностей у всех нелинейных полиномиальных дифференциальных уравнений. Также получены необходимые условия отсутствия подвижных критических особых точек у полиномиальных дифференциальных уравнений произвольного порядка.

1. Необходимые условия отсутствия подвижных критических особых точек у уравнения (1). Запишем уравнение (1) в виде

$$w^{(n)} = \sum_{\chi \in S} a_\chi(z)(w^{(n-1)})^{\chi_{n-1}}(w^{(n-2)})^{\chi_{n-2}} \cdots (w')^{\chi_1} w^{\chi_0}, \tag{6}$$

где S – некоторое множество кортежей $\chi = (\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1})$ целых неотрицательных чисел, a_χ – не тождественно равные нулю аналитические в области U функции. Пусть $|\chi| = \sum_{i=0}^{n-1} \chi_i$ – степень члена правой части уравнения (6) с мультииндексом χ, а $\nu(\chi) = \sum_{i=1}^{n-1} i\chi_i$ – его вес, т.е. суммарное число производных в нем. Предположим, что уравнение (6) нелинейно, т.е. $\max\limits_{\chi \in S} |\chi| > 1$.

Пусть $\Theta = \max\limits_{\chi \in S} \nu(\chi)$ – максимальный вес членов правой части уравнения (6). Рассмотрим сначала случай $\Theta < n$, т.е. случай, когда члены правой части уравнения (6) имеют веса ниже веса члена $w^{(n)}$, равного n.

Тогда, подставляя вместо w функцию $(z - z_0)^{-t}$, где z_0 – произвольная постоянная, а t – рациональное положительное число, будем иметь для $w^{(n)}$ порядок, вообще говоря, критического полюса в точке $z = z_0$, равный $t + n$, а для каждого члена правой части уравнения (6) равный $|\chi|t + \nu(\chi)$. Уравнение

$$\max_{\chi \in S}\{|\chi|t + \nu(\chi)\} = t + n \tag{7}$$

имеет единственное решение $t = t^*$, являющееся рациональным положительным числом. Число t^* представляет собой порядок возможного подвижного полюса или критического полюса решений уравнения (6). Следуя классической терминологии, назовем Pt^* символом Бюро, а t^* – числом Бюро для уравнения (6). Очевидно, что число Бюро не превосходит n.

Замена $z = z_0 + \alpha x$, $w = \alpha^{-t^*} v$, где z_0 отлично от нулей коэффициентов a_χ, сводит уравнение (6) к виду

$$v^{(n)} = \sum_{\chi \in S} \alpha^{n - \nu(\chi) - (|\chi| - 1)t^*}(a_\chi(z_0) + o(\alpha))(v^{(n-1)})^{\chi_{n-1}}(v^{(n-2)})^{\chi_{n-2}} \cdots (v')^{\chi_1} v^{\chi_0}. \tag{8}$$

Упрощенное уравнение для (8) при $\alpha = 0$ имеет вид

$$v^{(n)} = \sum_{\chi \in S_0} a_\chi(z_0)(v^{(n-1)})^{\chi_{n-1}}(v^{(n-2)})^{\chi_{n-2}} \cdots (v')^{\chi_1} v^{\chi_0}, \tag{9}$$

где $S_0 = \{\chi : |\chi|t^* + \nu(\chi) = t^* + n\} \neq \emptyset$. Уравнение (9) допускает решения вида $v = k(x + C)^{-t^*}$, где C – произвольная комплексная постоянная, а k – произвольный корень уравнения

$$-t^*(-t^* - 1) \cdots (-t^* - n + 1)k = \sum_{\chi \in S_0} a_\chi(z_0)\left[\prod_{j=0}^{n-1}((-t^*)(-t^* - 1) \cdots (-t^* - j + 1))^{\chi_j}\right] k^{|\chi|}, \tag{10}$$

которое назовем определяющим уравнением для уравнений (9), (6). Если оно имеет ненулевые корни, то решение уравнения (9) допускает подвижный полюс или в случае нецелого t^* критический полюс порядка t^*, откуда подвижные особенности, а в случае нецелого t^* подвижные критические особенности допускает и исходное уравнение (6).

Если определяющее уравнение (10) не допускает ненулевых корней, то уравнение (9) является барьерным. В п. 2 будет доказано наличие подвижных критических особенностей у всех, определенных таким образом барьерных уравнений. Следовательно, в этом случае исходное уравнение (6) допускает подвижные критические особые точки.

Рассмотрим теперь случай $\Theta = n$. Замена $z = z_0 + \alpha x$, где z_0 отлично от нулей коэффициентов a_χ, с последующим переходом к $\alpha = 0$ приводит уравнение (6) к упрощенному уравнению (9) с $S_0 = \{\chi : \nu(\chi) = n\} \neq \emptyset$. Очевидно, для всех $|\chi| \in S_0$ справедливо неравенство $|\chi| > 1$. Положим $t = \max\limits_{\chi \in S_0}\{\chi_0/(|\chi| - 1)\}$. Заменой $x = \alpha X$, $v = u/\alpha$, $v' = \alpha^{t-1}p$ полученное упрощенное уравнение приводится к системе

$$p^{(n-1)} = \sum_{\chi \in S_1} a_\chi(z_0)(p^{(n-2)})^{\chi_{n-1}}(p^{(n-3)})^{\chi_{n-2}} \cdots p^{\chi_1}u^{\chi_0} + O(\alpha^{1/M}), \quad u' = p\alpha^{t+1}, \tag{11}$$

где M – натуральное число такое, что tM целое. Система (11) при $\alpha = 0$ сводится к уравнению $p^{(n-1)} = \sum_{\chi \in S_1} a_\chi(z_0)(p^{(n-2)})^{\chi_{n-1}}(p^{(n-3)})^{\chi_{n-2}} \cdots p^{\chi_1}K^{\chi_0}$, где K – произвольная комплексная константа. Это уравнение при фиксированном значении K является уравнением типа (9) с числом Бюро 1. Согласно предшествующим выкладкам, заключаем, что уравнение либо допускает решения вида $p = k/(X + C)$, где k – ненулевой коэффициент, C – произвольная комплексная постоянная, либо является барьерным и допускает подвижные критические особые точки. Таким образом, система (11) при ненулевых α либо допускает подвижные критические особые точки, либо допускает решения вида $p = k/(X + C) + o(\alpha^{1/M})$, $u = \alpha^{t+1}(k\ln(X + C) + o(\alpha^{1/M}))$, т.е. опять-таки допускает подвижные критические особые точки. Следовательно, в случае $\Theta = n$ уравнение (6) всегда допускает подвижные критические особые точки.

Наконец, рассмотрим случай $\Theta > n$. Положим для $j = 0, 1, \ldots, n-1$ $\nu_j(\chi) = \sum_{i=1}^{n-1-j} i\chi_{i+j}$, $\Theta_j = \max\limits_{\chi \in S} \nu_j(\chi)$ и $m = \max\limits_{\Theta_j \geq n-j}\{j\}$.

Если $\Theta_m = n - m$, то замена переменных $z = z_0 + \alpha x$, $w^{(j)} = w_0^j + \alpha v^j$, $j = \overline{0, m-1}$, $w^{(m)} = v$, где w_j^0, z_0 – комплексные постоянные, с последующим переходом к $\alpha = 0$ сводит уравнение (6) к упрощенному уравнению вида (9) с $S_0 = \{\chi : \nu(\chi) = n\} \neq \emptyset$, допускающему подвижные критические особые точки.

Если же $\Theta_m > n - m$, то возьмем положительное рациональное число t такое, что $\min\limits_{\chi \in S}\{t(|\chi|_{m+1} - 1) + n - m - \nu_m(\chi)\} = 0$. Как несложно видеть, такое t существует и единственно и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Тогда замена переменных $z = z_0 + \alpha x$, $w^{(j)} = w_0^j + \alpha v^j$, $j = \overline{0, m-1}$, $w^{(m)} = w_0^m + \alpha^t v^m$, $w^{(m+1)} = \alpha^{t-1}v$, где w_j^0, z_0 – комплексные постоянные, с последующим переходом к $\alpha = 0$ сводит уравнение (6) к упрощенному уравнению вида (9) с нецелым числом Бюро $1 - t$, допускающему подвижные критические особые точки.

Таким образом, в случае $\Theta > n$ уравнение (6) всегда допускает подвижные критические особые точки.

На основании результатов настоящего пункта можно сформулировать следующие две теоремы.

Теорема 1. *Нелинейные уравнения вида (1) всегда допускают подвижные особые точки.*

Теорема 2. *Для того чтобы нелинейное уравнение (6) было свободно от подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы $\Theta < n$ и число Бюро, определяемое из уравнения (7), было целым.*

Теорема 2 для каждого заданного порядка n сводит задачу нахождения всех нелинейных полиномиальных уравнений (1) без подвижных критических особых точек к рассмотрению n уравнений (одного для каждого целого числа Бюро от 1 до n) с конечным числом неизвестных коэффициентов, представляющих собой локально аналитические функции z.

Так, например, все нелинейные полиномиальные уравнения третьего порядка, согласно теореме 2, без подвижных критических особых точек принадлежат одному из трех классов:

$$w''' = A(z)w''w + B(z)w'^2 + C(z)w'w^2 + D(z)w'w + E(z)w^4 + F(z)w^3 + G(z)w^2 + L(w'', w', w, z),$$

$$w''' = A(z)w'w + B(z)w^2 + L(w'', w', w, z), \quad w''' = A(z)w^2 + L(w'', w', w, z),$$

где A, B, C, D, E, F, G – локально аналитические функции z, L – линейная форма по w, w', w'' с локально аналитическими по z коэффициентами, причем для первого уравнения хотя бы одна из функций A, B, C, E не тождественно равна нулю, а для второго и третьего уравнений функция A не тождественно равна нулю.

2. Подвижные особенности барьерных уравнений. Для завершения доказательства теорем 1, 2 необходимо обосновать приведенное в п. 1 утверждение, что все барьерные уравнения, т.е. уравнения (9), для которых определяющее уравнение (10) не имеет ненулевых корней, допускают подвижные критические особые точки.

Рассмотрим произвольное барьерное уравнение

$$w^{(n)} = \sum_{\chi \in S} a_\chi (w^{(n-1)})^{\chi_{n-1}} (w^{(n-2)})^{\chi_{n-2}} \dots (w')^{\chi_1} w^{\chi_0} \tag{12}$$

с числом Бюро b, где a_χ – ненулевые комплексные числа, S – непустое множество кортежей $\chi = (\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ целых неотрицательных чисел таких, что $|\chi|b + \nu(\chi) = b + n$, где $|\chi|$ и $\nu(\chi)$ определены в п. 1. При этом для каждого натурального $k \geq 2$ имеет место равенство

$$\sum_{\chi \in S,\ |\chi| = k} a_\chi \left[\prod_{j=0}^{n-1} ((-b)(-b-1)\cdots(-b-j+1))^{\chi_j} \right] = 0 \tag{13}$$

(последнее условие следует из отсутствия ненулевых корней у определяющего уравнения).

Несложно видеть, что замена $z = z_0 + e^{x/\alpha}$, $w = (z - z_0)^{-b} v$, где z_0 – произвольная комплексная константа, приводит уравнение (12) к виду

$$\alpha^m v^{(n)} = F(v^{(n-1)}, v^{(n-2)}, \dots, v, \alpha), \tag{14}$$

где m – положительное целое число, F – полином по всем переменным, причем $F(v^{(n-1)}, v^{(n-2)}, \dots, v, 0) \not\equiv 0$, а

$$F(0, 0, \dots, 0, v, \alpha) \equiv (-1)^{n-1} b(b+1)(b+2)\cdots(b+n-1) v \alpha^m \tag{15}$$

(последнее условие следует из (15)). Уравнение (14) при $\alpha = 0$ имеет решение $v = 1$. Для обоснования наличия у уравнения (12) подвижных критических особых точек достаточно показать, что уравнение (14) допускает решение с асимптотическим разложением вида

$$v = \varphi(x, \alpha) \sim 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) \alpha^{j/M} \tag{16}$$

при положительных действительных $\alpha \to +0$, где M – натуральное число, φ_j – аналитические в окрестности нуля функции. Действительно, в этом случае уравнение (12) имеет решения вида

$$w = (z - z_0)^{-b} \varphi(\alpha \ln(z - z_0), \alpha) \sim (z - z_0)^{-b} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\alpha \ln(z - z_0)) \alpha^{j/M} \right) =$$

$$= (z - z_0)^{-b} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(\ln(z - z_0)) \alpha^{j/M} \right) \tag{17}$$

при положительных действительных значениях произвольного параметра $\alpha \to +0$, где ϕ_j – полиномы по $\ln(z - z_0)$. При этом функции φ_j, а значит, и полиномы ϕ_j не все постоянны, что легко следует из условия (15). В этом случае решение (17) при достаточно малых положительных действительных α допускает критическую особенность в области точки $z = z_0$, что и доказывает наличие подвижных критических особых точек у уравнения (12).

Таким образом, нам осталось обосновать наличие у уравнения (14) решения вида (16). Несложно видеть, что заменой вида $v = 1 + \sum_{j=1}^{s} \beta^j \zeta_j(x) + \beta^s u$, $\alpha = \beta^{M_1}$, где s, M_1 – натуральные числа, ζ_j – аналитические в окрестности нуля функции, уравнение (14) всегда может быть сведено либо к виду

$$\beta^{m^*} u^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta^{k_j} l_j(x, \beta) u^{(j)} + \beta^{m^*} H(u^{(n-1)}, u^{(n-2)}, \ldots, u, x, \beta), \tag{18}$$

либо к виду

$$u^{(n)} = H(u^{(n-1)}, u^{(n-2)}, \ldots, u, x, \beta), \tag{19}$$

где m^* – натуральное число, k_j – целые неотрицательные числа, меньшие m^*, l_j – аналитические в окрестности точки $(0, 0)$ функции, хотя бы для одной из которых $l_j(x, 0) \not\equiv 0$, H – полином по β, u и его производным с аналитическими по x в окрестности нуля коэффициентами. Уравнение (19) очевидно имеет решение $u = \omega(x, \beta)$, аналитическое в окрестности точки $(0, 0)$. Уравнение (18), как несложно видеть, может быть преобразовано в систему вида (42.22) работы [13] с параметром $\gamma = \beta^{1/M_2}$, где M_2 – натуральное число, и на основании результатов работы [13] имеет решение с асимптотическим разложением $u \sim \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j(x) \gamma^j$ при $\gamma \to +0$, ω_j – аналитические в окрестности нуля функции (непосредственное доказательство данного предложения см. также в [14]). Отсюда и следует наличие решения вида (16) у уравнения (12).

Имеем

Предложение 1. *Для того чтобы уравнение (9) было свободно от подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы оно не было барьерным, т.е. чтобы уравнение (10) имело ненулевые корни.*

3. Уравнение Эйлера для (6). Теорема 2 дает первую серию необходимых условий для отсутствия подвижных особых точек у уравнения (1). Предположим, что они выполнены, т.е. $\Theta < n$ и число Бюро t^* для рассматриваемого уравнения является целым.

Рассмотрим уравнение (9). Для того чтобы это уравнение было свободно от подвижных критических особых точек, необходимо, согласно предложению 1, чтобы уравнение (10) имело ненулевые корни. Для каждого такого корня k уравнение (9) имеет решения вида $v = k(x + C)^{-t^*}$, где C – произвольная комплексная константа. Положив в уравнении (9) $v = k(x + C)^{-t^*} + \alpha u$ и перейдя к $\alpha = 0$, будем иметь упрощенное уравнение вида

$$u^{(n)} = \frac{q_{n-1}}{x + C} u^{(n-1)} + \frac{q_{n-2}}{(x + C)^2} u^{(n-2)} + \ldots + \frac{q_0}{(x + C)^n} u, \tag{20}$$

представляющее собой линейное дифференциальное уравнение Эйлера. Уравнение (20) имеет решения вида $u = (x + C)^{\rho}$, где ρ – корень уравнения

$$\rho(\rho - 1) \cdots (\rho - n + 1) = q_{n-1} \rho(\rho - 1) \cdots (\rho - n + 2) + q_{n-2} \rho(\rho - 1) \cdots (\rho - n + 3) + \ldots + q_0. \tag{21}$$

Для того чтобы уравнение (9) было свободно от подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы все решения уравнения (20) были однозначны в области $x = -C$, для чего необходимо, чтобы все корни уравнения (21) были целыми числами. Более того, если уравнение (21) имеет кратные корни, то уравнение (20) имеет решения с критической особенностью логарифмического характера в точке $x = -C$. Таким образом, корни уравнения (21) должны быть попарно различными целыми числами.

Отдельного рассмотрения требует случай $q_0 = q_1 = q_2 = \ldots = q_{n-1} = 0$. При этих условиях, как несложно видеть, уравнение (9) после замены $v = k(x+C)^{-t^*} + \alpha u$ примет вид

$$u^{(n)} = \sum_{\chi \in T} c_\chi \alpha^{|\chi|-1} (u^{(n-1)})^{\chi_{n-1}} (u^{(n-2)})^{\chi_{n-2}} \cdots (u')^{\chi_1} u^{\chi_0} (x+C)^{-r_\chi},$$

где T – некоторое непустое множество мультииндексов χ таких, что $|\chi| > 1$, r_χ – целые неотрицательные числа, меньшие n, хотя бы одно из которых является положительным. Это уравнение допускает решение вида

$$u = K(x) + \alpha^{m-1} \int \cdots \int \Bigg[\sum_{\substack{\chi \in T \\ |\chi| = m}} c_\chi (K^{(n-1)}(x))^{\chi_{n-1}} (K^{(n-2)}(x))^{\chi_{n-2}} \cdots K(x)^{\chi_0} (x+C)^{-r_\chi} \Bigg] dx^n + \\ + o(\alpha^{m-1}),$$

где $m = \min\limits_{\chi \in T} |\chi| \geq 2$, K – произвольный полином не выше $(n-1)$-го порядка. Данное решение, как несложно видеть, может иметь в области точки $x = -C$ критическую особенность логарифмического характера.

Таким образом, имеет место

Предложение 2. *Для того чтобы уравнение (9) было свободно от подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы для каждого ненулевого корня k уравнения (10) коэффициенты $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ соответствующего уравнения (20) были не все равны нулю и чтобы корни соответствующего уравнения (21) были попарно различными целыми числами.*

Предложение 2 является необходимым, однако не достаточным для отсутствия подвижных критических особенностей у уравнения (9) и тем более у исходного уравнения (6). Дальнейшее исследование уравнения (6) может проводиться по следующей схеме. Уравнение (8) имеет в некотором кольце, окружающем точку $x = -C$, решения вида $v = k(x+C)^{-t^*} + \alpha u_1 + \alpha^2 u_2 + \ldots$, где $u_1, u_2, \ldots$ – аналитические (не обязательно однозначные) в этом кольце функции. Для определения функций u_k может быть получена серия неоднородных линейных дифференциальных уравнений, однородная часть которых совпадает с (20), а неоднородная полиномиально выражается через $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$. Для того чтобы уравнение (6) было свободно от подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы решения всех этих линейных дифференциальных уравнений были однозначны в точке $x = -C$.

4. Уравнения (1), не содержащие производных $w^{(n-2)}$, $w^{(n-1)}$. Хотя, как уже отмечалось выше, в общем случае исследование уравнения (1) не заканчивается анализом его уравнения Эйлера, для достаточно широких классов нелинейных полиномиальных дифференциальных уравнений, в частности, для уравнений, не содержащих производные порядка $w^{(n-2)}$, $w^{(n-1)}$, анализ уравнения Эйлера позволяет доказать наличие подвижных критических особых точек.

Действительно, рассмотрим уравнение вида

$$w^{(n)} = P(w^{(n-3)}, w^{(n-4)}, \ldots, w, z), \tag{22}$$

где $n > 2$ – натуральное число, P – нелинейный полином по w и его производным с аналитическими по z в некоторой области U комплексной плоскости коэффициентами. Предположим, что выполняется необходимое для отсутствия у этого уравнения подвижных критических особых точек условие теоремы 2 и что упрощенное уравнение (9) не является барьерным. Заметим, что коэффициенты q_{n-1} и q_{n-2} в соответствующем уравнении Эйлера (20) равны нулю.

При этих условиях из теоремы Виета для уравнения (21) несложно получить, что сумма квадратов его корней равна $\sum_{j=0}^{n-1} j^2$. Для отсутствия у уравнения (22) подвижных критических особенностей необходимо, чтобы эти корни были попарно различными целыми числами, что возможно только в том случае, если с точностью до порядка они равны $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Это в свою очередь возможно только в случае $q_{n-3} = q_{n-4} = \ldots = q_0 = 0$. Однако в этом случае уравнение (22) в силу предложения 2 также допускает подвижные критические особенности.

Таким образом, нами доказана

Теорема 3. *Уравнения вида (22), т.е. нелинейные полиномиальные дифференциальные уравнения порядка* $n \geq 3$, *не содержащие производные порядка* $n-1$, $n-2$, *всегда имеют подвижные критические особые точки.*

Частный случай утверждения теоремы 3 для уравнений вида $w^{(n)} = P(w, z)$ доказан в [15].

Теорема 3, в частности, позволяет усилить теорему 2 следующим образом.

Теорема 4. *Для того чтобы нелинейное уравнение (6) было свободно от подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы* $\Theta < n$ *и чтобы число Бюро данного уравнения было равно* 1 *или* 2.

Действительно, для нелинейных уравнений (6), удовлетворяющих условиям теоремы 2, с числом Бюро 3 и выше, упрощенное уравнение (9) имеет вид (22), а значит, допускает подвижные критические особенности.

Теорема 4 для каждого заданного порядка n сводит задачу нахождения всех нелинейных полиномиальных уравнений (1) без подвижных критических особых точек к рассмотрению двух уравнений (с числом Бюро 1 и 2 соответственно) с конечным числом неизвестных коэффициентов, представляющих собой локально аналитические функции z.

Так, например, для нелинейных полиномиальных уравнений четвертого порядка, согласно теореме 4, все уравнения без подвижных критических особых точек принадлежат одному из двух классов:

$$w^{(IV)} = A(z)w'''w + (B(z)w' + C(z)w^2 + D(z)w)w'' + (E(z)w + F(z))w'^2 +$$
$$+ (G(z)w^3 + K_1(w,z))w + H(z)w^5 + K(w,z) + L(w''', w'', w', w, z),$$
$$w^{(IV)} = A(z)w''w + B(z)(w')^2 + C(z)w'w + D(z)w^3 + E(z)w^2 + L(w''', w'', w', w, z),$$

где A, B, C, D, E, F, G, H – локально аналитические функции z, L – линейная форма по w, w', w'', w''' с локально аналитическими по z коэффициентами, K_1, K_2 – полиномы не выше соответственно второй и четвертой степени по w с локально аналитическими по z коэффициентами, причем для первого уравнения хотя бы одна из функций A, B, C, E, G, H не тождественно равна нулю, а для второго уравнения хотя бы одна из функций A, B, D не тождественно равна нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ince E.L.* Ordinary Differential Equations. New York, 1956.
2. *Painlevé P.* // Bull. Soc. Math. France. 1900. V. 28. P. 201–261.
3. *Chazy J.* // Acta Math. 1911. V. 34. P. 317–385.
4. *Bureau F.* // Ann. di Math. Sci. 1964. V. 66. P. 1–116.
5. *Cosgrove C.M.* // Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. P. 171–228.
6. *Exton H.* // Rendiconti di Matematica. 1971. V. 4. P. 385–448.
7. *Мартынов И.П.* // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9. № 10. С. 1780–1791.
8. *Cosgrove C.M.* // Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. P. 1–65.
9. *Chazy J.* // Acta Mathematica. 1918. V. 41. P. 29–69.
10. *Cosgrove C.M., Scoufis G.* // Stud. Appl. Math. 1993. V. 88. P. 25–87.
11. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М., 1960.
12. *Мартынов И.П.* // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 2. С. 388–389.
13. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1968.
14. *Sobolevsky S.* // Computer Algebra and its Application to Physics (CAAP-2001): Proc. of Inter. Workshop, Dubna, Russia, June 28–30, 2001. Dubna, 2002. P. 277–290.
15. *Костюкович М.Е.* // Мат. исследования: Сб. научных работ преподавателей, аспирантов и студентов мат. ф-та Гродн. гос. ун-та. Вып. 2. Гродно, 1994. С. 61–64.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
17.04.2001 г.