

===== ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ =====

УДК 517.925.7

## К ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© 2004 г. В. И. Громак, А. С. Зенченко

Одним из важных свойств уравнений Пенлеве является возможность их представления в виде эквивалентных гамильтоновых систем с полиномиальными гамильтонианами, первоначально полученное в работе [1] и позже использованное в ряде исследований [2–8]. Особенно важным это свойство является при изучении  $\tau$ -функций [9], непосредственном построении аналогов уравнений Пенлеве из гамильтоновых систем [10] и изомонодромной деформации линейных систем, описываемой уравнениями Пенлеве [11, 12].

В настоящей работе мы строим эквивалентные гамильтоновы системы для первых уравнений из серии уравнений Пенлеве высших порядков, полученных редукцией из уравнений Кортевега–де Фриза высших порядков [2], аналоги  $\tau$ -функций, а также исследуем полиномиальные гамильтонианы.

Известно [13–15], что решения первого уравнения Пенлеве

$$q'' = 6q^2 + t \quad (P_1)$$

являются мероморфными функциями на  $\mathbb{C}$  с локальным представлением в окрестности подвижного полюса  $t = t_0$ :

$$q(t) = \frac{1}{(t-t_0)^2} - \frac{t_0(t-t_0)^2}{10} - \frac{(t-t_0)^3}{6} + h(t-t_0)^4 + \frac{t_0^2(t-t_0)^6}{300} + \sum_{k=7}^{\infty} a_k(t-t_0)^k, \quad (1)$$

где  $h$  – произвольная постоянная.

Уравнение  $(P_1)$  может быть записано в виде эквивалентной гамильтоновой системы

$$q' = p, \quad p' = 6q^2 + t \quad (2)$$

с полиномиальным гамильтонианом  $H_1(t; q, p) = p^2/2 - 2q^3 - tq$ .

Пусть  $(q(t), p(t))$  – решение системы (2). Тогда функция  $H_1(t) := H_1(t; q(t), p(t))$  является мероморфной на  $\mathbb{C}$ , а функции  $\tau(t)$  и  $\tau_1(t)$ , определяемые соответственно соотношениями

$$H_1(t) = \frac{d}{dt} \ln \tau(t), \quad q(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(t), \quad (3)$$

целые на  $\mathbb{C}$ . Это утверждение легко проверить подстановкой разложений  $q(t)$  и  $p(t)$  из (1), (2) в (3).

Рассмотрим первое уравнение после уравнения  $(P_1)$  из серии высших уравнений  $(2n P_1)$  [15]

$$q^{(4)} = 20qq'' + 10(q')^2 - 40q^3 + t. \quad (4P_1)$$

Решения уравнения  $(4P_1)$  также являются мероморфными на  $\mathbb{C}$  функциями с подвижными полюсами второго порядка. Доказательство мероморфности решений уравнения  $(4P_1)$  методом изомонодромной деформации линейных систем содержится в [16]. Разложение решения уравнения  $(4P_1)$  в окрестности подвижного полюса  $t = t_0$  может быть двух видов [15]:

$$q(t) = \frac{1}{(t-t_0)^2} + h_0 - 3h_0^2(t-t_0)^2 + h_1(t-t_0)^3 - \frac{(560h_0^3 + t_0)(t-t_0)^4}{56} + \frac{(-1 + 120h_0h_1)(t-t_0)^5}{80} + h_2(t-t_0)^6 - \frac{h_0(t-t_0)^7}{140} + \sum_{k=8}^{\infty} a_k(t-t_0)^k, \quad \operatorname{res}_{t=t_0} (t-t_0)q(t) = 1, \quad (4)$$

или

$$q(t) = \frac{3}{(t-t_0)^2} + \frac{(t-t_0)^4 t_0}{504} + \frac{(t-t_0)^5}{240} + h_0(t-t_0)^6 + h_1(t-t_0)^8 + \sum_{k=10}^{\infty} a_k(t-t_0)^k, \tag{5}$$

$$\operatorname{res}_{t=t_0} (t-t_0)q(t) = 3,$$

где  $h_0, h_1, h_2$  – произвольные постоянные.

**Теорема 1.** Уравнение  $(4P_1)$  может быть записано в виде эквивалентной гамильтоновой системы с полиномиальным гамильтонианом.

В качестве гамильтоновой системы, эквивалентной уравнению  $(4P_1)$ , может быть рассмотрена система  $(q_1(t) := q(t))$

$$q'_1 = q_2, \quad q'_2 = 10q_1^2 + q_2^2 - p_2 - C_1, \quad p'_1 = 20q_1(8q_1^2 + q_2^2 - p_2 - C_1) + 10q_2^2 + t, \tag{6}$$

$$p'_2 = 2q_2(10q_1^2 + q_2^2 + 10q_1 - p_2 - C_1) - p_1$$

с полиномиальным гамильтонианом

$${}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2) = -C_1 p_2 - p_2^2/2 - t q_1 + 10C_1 q_1^2 + 10p_2 q_1^2 - 40q_1^4 + p_1 q_2 + C_1 q_2^2 + p_2 q_2^2 - 10q_1 q_2^2 - 10q_1^2 q_2^2 - q_2^4/2,$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная.

Пусть  $(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$  – произвольное решение системы (6). Как и для уравнения  $(P_1)$ , определим функцию  ${}_4H_1(t) := {}_4H_1(t; q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$ , а также функции  $\tau(t)$  и  $\tau_1(t)$  соответственно соотношениями

$${}_4H_1(t) = \frac{d}{dt} \ln \tau(t), \quad q_1(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(t). \tag{7}$$

**Теорема 2.** Функция  ${}_4H_1(t)$  мероморфна, а функции  $\tau(t)$  и  $\tau_1(t)$ , определяемые соотношениями (7), целые на  $\mathbb{C}$ .

**Доказательство.** В силу полиномиальности гамильтониана  ${}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2)$  и соотношений  $q_1 = q, q_2 = q', p_1 = q''', p_2 = -q'' + (q')^2 + 10q^2 - C_1$  особыми точками функции  ${}_4H_1(t)$  могут быть лишь особые точки решения  $q(t)$  уравнения  $(4P_1)$ . Отсюда следует мероморфность  ${}_4H_1(t)$ . При этом в окрестности подвижного полюса  $t = t_0$  функция  ${}_4H_1(t)$  имеет разложение

$${}_4H_1(t) = \frac{1}{t-t_0} + \frac{C_1^2}{2} - 2268h_0^4 - 324h_2 - 6h_0 t_0 - h_0(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(t-t_0)^k, \tag{8}$$

если  $\operatorname{res}_{t=t_0} (t-t_0)q(t) = 1$ , или

$${}_4H_1(t) = \frac{3}{t-t_0} + \frac{C_1^2}{2} + 1188h_0 + \sum_{k=4}^{\infty} b_k(t-t_0)^k, \tag{9}$$

если  $\operatorname{res}_{t=t_0} (t-t_0)q(t) = 3$ .

Отсутствие особых точек функций  $\tau(t)$  и  $\tau_1(t)$  на  $\mathbb{C}$  следует из определения этих функций соотношениями (7), разложений функции  ${}_4H_1(t)$  (8), (9) и функции  $q_1(t) \equiv q(t)$  (4), (5) в окрестности подвижного особого полюса  $t_0$ . Теорема доказана.

Заметим, что

$$\frac{d}{dt} {}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{dq_1}{dt} \frac{\partial}{\partial q_1} {}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2) + \frac{dq_2}{dt} \frac{\partial}{\partial q_2} {}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{dp_1}{dt} \frac{\partial}{\partial p_1} {}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2) + \frac{dp_2}{dt} \frac{\partial}{\partial p_2} {}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2) + \frac{\partial}{\partial t} {}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2) = \\
& = \frac{\partial}{\partial t} {}_4H_1(t; q_1, q_2, p_1, p_2) = -q_1,
\end{aligned}$$

следовательно,

$$q_1(t) = -\frac{d}{dt} {}_4H_1(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau(t). \quad (10)$$

Таким образом, в силу (10) для уравнения  $({}_4P_1)$  функция  $\tau(t)$  совпадает с  $\tau_1(t)$ .

Произвольное решение второго уравнения Пенлеве

$$q'' = 2q^3 + tq + \alpha \quad (P_2)$$

есть мероморфная функция с локальным разложением в окрестности подвижного полюса  $t = t_0$ :

$$q(t) = \frac{\varepsilon}{t - t_0} - \frac{\varepsilon t_0(t - t_0)}{6} - \frac{(\alpha + \varepsilon)(t - t_0)^2}{4} + h(t - t_0)^3 + \frac{(3\alpha + \varepsilon)t_0(t - t_0)^4}{72} + \dots,$$

где  $\varepsilon^2 = 1$ ,  $h$  – произвольная постоянная [15].

Уравнение  $(P_2)$  может быть записано в виде эквивалентной гамильтоновой системы

$$q' = -q^2 + p - t/2, \quad p' = 2qp + \alpha + 1/2 \quad (11)$$

с полиномиальным гамильтонианом

$$H_2(t; q, p) = p^2/2 - (q^2 + t/2)p - (\alpha + 1/2)q.$$

При этом функция  $H_2(t) = H_2(t; q(t), p(t))$  является мероморфной, а функции  $\tau(t)$  и  $\tau_1(t)$ , определяемые соответственно формулами

$$H_2(t) = \frac{d}{dt} \ln \tau(t), \quad q^2(t) = -\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(t),$$

являются целыми на  $\mathbb{C}$ .

Пусть  $T, T^{-1}$  – прямое и обратное преобразования Беклунда для второго уравнения Пенлеве [2]:

$$T : q_{\alpha-1} \rightarrow q_{\alpha} = -q_{\alpha-1} - \frac{\alpha - 1/2}{q'_{\alpha-1} + q_{\alpha-1}^2 + t/2}, \quad (12)$$

$$T^{-1} : q_{\alpha} \rightarrow q_{\alpha-1} = -q_{\alpha} + \frac{\alpha - 1/2}{q'_{\alpha} - q_{\alpha}^2 - t/2}. \quad (13)$$

Положим  $\alpha = k + 1/2$  и  $q(k) := q(t, \alpha) = q(t, k + 1/2)$ . Тогда, используя систему (11) и преобразования (12), (13), найдем  $p(k \pm 1)$ ,  $q(k \pm 1)$ . Введем дискретные функции  $H_2(k) := H(t; q(k), p(k))$  и  $\tau(k)$  соотношением  $\frac{d}{dt} \ln \tau(k) = H_2(k)$ , где  $\frac{d}{dt} \ln \tau(k) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \ln \tau(k)$ . Тогда  $\tau(k)$  удовлетворяет уравнению Тоды [6]

$$\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau(k) = \frac{\tau(k-1)\tau(k+1)}{\tau(k)^2}, \quad (14)$$

из которого следует, что функции  $\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau(k)$ ,  $\tau(k)$ ,  $\tau(k+1)$ ,  $\tau(k-1)$  алгебраически зависимы. Справедлива

**Теорема 3.** Для уравнения  $(P_2)$  функции  $\frac{d^3}{dt^3} \ln \tau_1(k)$ ,  $\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(k)$ ,  $\tau_1(k)$ ,  $\tau_1(k + 1)$ ,  $\tau_1(k - 1)$  алгебраически зависимы.

**Доказательство.** Из преобразований Беклунда (12), (13) находим

$$q(k - 1) = -q(k) + k \left( \frac{d}{dt} q(k) - q(k)^2 - \frac{t}{2} \right)^{-1}, \quad q(k + 1) = -q(k) - (k + 1) \left( \frac{d}{dt} q(k) + q(k)^2 + \frac{t}{2} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$- \int \int (q(k + 1)^2 + q(k - 1)^2 - 2q(k)^2) dt dt = \ln \left( -4 \left( \frac{d}{dt} q(k) \right)^2 + 4q(k)^4 + 4tq(k)^2 + t^2 \right). \quad (15)$$

Так как экспонента левой части равенства (15) равна  $\tau_1(k + 1)\tau_1(k - 1)\tau_1(k)^{-2}$ , то

$$\frac{\tau_1(k + 1)\tau_1(k - 1)}{\tau_1(k)^2} = -4 \left( \frac{d}{dt} q(k) \right)^2 + 4q(k)^4 + 4tq(k)^2 + t^2. \quad (16)$$

Из определения функции  $\tau_1$  находим

$$q(k)^2 = -\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(k), \quad \left( \frac{d}{dt} q(k) \right)^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{d^3}{dt^3} \ln \tau_1(k) \right) \left( -\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(k) \right)^{-1}. \quad (17)$$

Тогда из (16) в силу (17) имеем

$$\frac{\tau_1(k + 1)\tau_1(k - 1)}{\tau_1(k)^2} = \left( \frac{d^3}{dt^3} \ln \tau_1(k) \right)^2 / \left( \frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(k) \right) + 4 \left( \frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(k) \right)^2 - 4t \frac{d^2}{dt^2} \ln \tau_1(k) + t^2.$$

Теорема 3 доказана.

Рассмотрим первое уравнение после уравнения  $(P_2)$  из серии высших аналогов второго уравнения Пенлеве  $(2nP_2)$  [2]

$$q^{(4)} = 10q^2q'' + 10q(q')^2 - 6q^5 - tq - \alpha. \quad (4P_2)$$

В отличие от уравнения  $(4P_1)$  для уравнения  $(4P_2)$  вопрос о мероморфности всех решений остается открытым. В окрестности подвижного полюса  $t = t_0$  решение  $q(t)$  имеет вид [15]

$$q(t) = \frac{\varepsilon}{t - t_0} + h_0(t - t_0) + h_1(t - t_0)^2 + \frac{\varepsilon(50h_0^2 + t_0)(t - t_0)^3}{20} + \frac{(\alpha + \varepsilon + 60\varepsilon h_0 h_1)(t - t_0)^4}{36} +$$

$$+ h_2(t - t_0)^5 + \frac{((26 + 35\alpha\varepsilon)h_0 + 3360h_0^2 h_1 + 36h_1 t_0)(t - t_0)^6}{1440} + \dots \quad (18)$$

или

$$q(t) = \frac{2\varepsilon}{t - t_0} - \frac{\varepsilon t_0(t - t_0)^3}{140} - \frac{(\alpha + 2\varepsilon)(t - t_0)^4}{144} + h_0(t - t_0)^5 + h_1(t - t_0)^7 +$$

$$+ \frac{(5\alpha + 14\varepsilon)t_0(t - t_0)^8}{201600} + \dots, \quad (19)$$

где  $\varepsilon^2 = 1$ ,  $h_0$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  - произвольные постоянные.

Запишем уравнение  $(4P_2)$  в виде эквивалентной гамильтоновой системы  $(q_1(t) := q(t))$

$$q'_1 = -q_1^2 + q_2, \quad q'_2 = p_2/2, \quad p'_1 = 2q_1 p_1 + 2\alpha + 1, \quad p'_2 = 6q_2^2 - p_1 + t \quad (20)$$

с полиномиальным гамильтонианом

$$H(t; q_1, q_2, p_1, p_2) = p_2^2/4 - 2q_2^3 + p_1(q_2 - q_1^2) - tq_2 - q_1(1 + 2\alpha).$$

Введем функцию  ${}_4H_2(t) := {}_4H_2(t; q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$ , где  $(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$  – решение системы (20), а также функции

$$\tau_1(t) := \exp\left(-\int \int q^2(t) dt dt\right), \quad \tau(t) := \exp\left(\int {}_4H_2(t) dt\right). \tag{21}$$

**Теорема 4.** *Для мероморфных решений уравнения  $({}_4P_2)$  функция  ${}_4H_2(t)$  мероморфная, а  $\tau_1(t)$  и  $\tau(t)$  целые.*

**Доказательство.** Из системы (20) находим

$$q_1 = q, \quad q_2 = q' + q^2, \quad p_1 = t + 6(q^2 + q')^2 - 2(2(q')^2 + 2qq'' + q'''), \quad p_2 = 2q'' + 4qq'. \tag{22}$$

Тогда в окрестности особой точки  $t = t_0$  в силу (18), (19) имеем разложения для  ${}_4H_2(t)$ :

$${}_4H_2(t) = \frac{1 - \varepsilon}{t - t_0} - 420\varepsilon h_0^3 - 56h_1^2 + 168\varepsilon h_2 - \frac{48\varepsilon h_0 t_0}{5} + (1 + 2\varepsilon)h_0(t - t_0) + \dots, \quad \varepsilon^2 = 1, \tag{23}$$

или

$${}_4H_2(t) = \frac{2(2 - \varepsilon)}{t - t_0} - 504\varepsilon h_0 + \frac{\varepsilon(45 + 60\varepsilon)t_0(t - t_0)^3}{6300} + \dots, \quad \varepsilon^2 = 1. \tag{24}$$

Утверждение теоремы для функций  $\tau(t)$  и  $\tau_1(t)$  следует из определения (21) этих функций, а также из разложений (18), (19), (23), (24) для мероморфных решений уравнения  $({}_4P_2)$ . Теорема 4 доказана.

Рассмотрим прямое и обратное к нему преобразование Беклунда для уравнения  $({}_4P_2)$  [17]

$$T : q_{\alpha-1} \rightarrow q_{\alpha} = -q_{\alpha-1} - \frac{2\alpha - 1}{t + 6\tilde{q}^2 - 2\tilde{q}''}, \quad \tilde{q} := q_{\alpha-1}^2 + q'_{\alpha-1}, \tag{25}$$

$$T^{-1} : q_{\alpha} \rightarrow q_{\alpha-1} = -q_{\alpha} - \frac{2\alpha - 1}{t + 6r^2 - 2r''}, \quad r := q_{\alpha}^2 - q'_{\alpha}. \tag{26}$$

Положим  $\alpha = k + 1/2$  и для решения  $(q_1(t), q_2(t), p_1(t), p_2(t))$  системы (20) введем дискретные функции

$$\begin{aligned} q_i(k) &:= q_i(t, k + 1/2), \quad p_i(k) := p_i(t, k + 1/2), \quad i = 1, 2, \\ H(k) &:= {}_4H_2(t; q_1(t, k + 1/2), q_2(t, k + 1/2), p_1(t, k + 1/2), p_2(t, k + 1/2)), \\ \tau(k) &:= \exp\left(\int H(k) dt\right), \quad \tau_1(k) := \exp\left(-\int \int q_1^2(k) dt dt\right), \end{aligned} \tag{27}$$

в которых  $t$  является параметром. С учетом преобразований (25), (26) можно вычислить  $q(k \pm 1)$ , а тогда из соотношений (22) определяем значения  $q_1(k \pm 1)$ ,  $q_2(k \pm 1)$ ,  $p_1(k \pm 1)$ ,  $p_2(k \pm 1)$ . Из (27) находим  $H(k \pm 1)$ ,  $\tau(k \pm 1)$ ,  $\tau_1(k \pm 1)$ .

**Теорема 5.** *Для уравнения  $({}_4P_2)$  функции  $\frac{d^4}{dt^4} \ln \tau(k)$ ,  $\frac{d^2}{dt^2} \ln \tau(k)$ ,  $\tau(k - 1)$ ,  $\tau(k + 1)$ ,  $\tau(k)$  алгебраически зависимы.*

**Доказательство.** Вычисляя производные  $H(k)$  относительно  $t$ , находим

$$\begin{aligned} H_t &= -q_2(k), \quad H_{tt} = -p_2(k)/2, \quad H_{ttt} = (-t + p_1(k) - 6q_2^2(k))/2, \\ H_{tttt} &= 1/2 + k + p_1(k)q_1(k) - 3p_2(k)q_2(k), \end{aligned} \tag{28}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} q_1(k) &= \frac{2H_{tttt} + 12H_{tt}H_t - 1 - 2k}{4H_{ttt} + 12(H_t)^2 + 2t}, \quad q_2(k) = -H_t, \\ p_1(k) &= 2(H_{ttt} + 3(H_t)^2 + t/2), \quad p_2(k) = -2H_{tt}. \end{aligned} \tag{29}$$

Так как  $q_1(k+1) = -2(k+1)/p_1(k) - q_1(k)$ , то из (29) получаем

$$q_1(k+1) = -\frac{2H_{ttt} + 12H_{tt}H_t + 3 + 2k}{4H_{ttt} + 12(H_t)^2 + 2t}. \tag{30}$$

Тогда из (29) и (30) имеем

$$q_1(k+1) - q_1(k) = \frac{2H_{ttt} + 12H_{tt}H_t + 1}{2H_{ttt} + 6(H_t)^2 + t} = \frac{d}{dt} \ln(2H_{ttt} + 6(H_t)^2 + t). \tag{31}$$

С другой стороны,  $H(k-1) - H(k) = 2q_1(k)$ , следовательно,  $q_1(k) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln \frac{\tau(k-1)}{\tau(k)}$ . Поэтому

$$q_1(k+1) - q_1(k) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln \frac{\tau(k-1)\tau(k+1)}{\tau(k)^2}. \tag{32}$$

Сравнивая (31) и (32), получаем соотношение

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln \frac{\tau(k-1)\tau(k+1)}{\tau(k)^2} = \frac{d}{dt} \ln(2H_{ttt} + 6(H_t)^2 + t),$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \left( \ln(2H_{ttt} + 6(H_t)^2 + t)^2 \frac{\tau(k)^2}{\tau(k-1)\tau(k+1)} \right) = 0.$$

Поэтому существует такая ненулевая постоянная  $c(k)$ , что

$$(2H_{ttt} + 6(H_t)^2 + t)^2 = c(k)\tau(k-1)\tau(k+1)\tau(k)^{-2}.$$

Используя определение (27) функции  $\tau(k)$ , получаем

$$\left( 2 \frac{d^4}{dt^4} \ln \tau(k) + 6 \left( \frac{d^2}{dt^2} \ln \tau(k) \right)^2 + t \right)^2 = c(k) \frac{\tau(k-1)\tau(k+1)}{\tau(k)^2}.$$

Выбирая подходящие мультипликативные постоянные  $\tau$ -функций, полагаем  $c(k) = 1$  и, таким образом, получаем следующее уравнение, которое можно рассматривать как аналог уравнения Тоды:

$$\left( 2 \frac{d^4}{dt^4} \ln \tau(k) + 6 \left( \frac{d^2}{dt^2} \ln \tau(k) \right)^2 + t \right)^2 = \frac{\tau(k-1)\tau(k+1)}{\tau(k)^2}.$$

Теорема 5 доказана.

**Теорема 6.** Для уравнения  $(4P_2)$  функции  $\frac{d^i}{dt^i} \ln \tau_1(k)$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$ ,  $\tau_1(k-1)$ ,  $\tau_1(k+1)$ ,  $\tau_1(k)$  алгебраически зависимы.

**Доказательство.** Из преобразований Беклунда (25), (26) находим

$$q(k-1) = -q(k) - \frac{2k}{t + 6q(k)^4 - 12q(k)^2 q_t(k) + 2q_t(k)^2 - 4q(k)q_{tt}(k) + 2q_{ttt}(k)},$$

$$q(k+1) = -q(k) - \frac{2(k+1)}{t + 6q(k)^4 + 12q(k)^2 q_t(k) + 2q_t(k)^2 - 4q(k)q_{tt}(k) - 2q_{ttt}(k)}.$$

Интегрируя выражение  $-q(k+1)^2 - q(k-1)^2 + 2q(k)^2$ , имеем

$$- \int \int (q(k+1)^2 + q(k-1)^2 - 2q(k)^2) dt dt =$$

$$= \ln\{(t + 6q(k)^4 + 12q(k)^2q_t(k) + 2q_t(k)^2 - 4q(k)q_{tt}(k) - 2q_{ttt}(k)) \times \\ \times (t + 6q(k)^4 - 12q(k)^2q_t(k) + 2q_t(k)^2 - 4q(k)q_{tt}(k) + 2q_{ttt}(k))\}. \quad (33)$$

Обозначая  $l_i(k) = \frac{d^i}{dt^i} \ln \tau_1(k)$ ,  $i = 2, 3, 4, 5$  и дифференцируя  $\ln \tau_1(k)$  по  $t$ , получаем соотношения

$$q(k) = (-l_2(k))^{1/2}, \quad q_t(k) = -(-l_2(k))^{-1/2}l_3(k)/2, \\ q_{tt}(k) = -(-l_2(k))^{-1/2}(l_4(k) - l_2(k)^{-1}l_3(k)^2/2)/2, \quad (34)$$

$$q_{ttt}(k) = -(-l_2(k))^{-1/2}(l_5(k) - 6l_2(k)^{-1}l_3(k)(l_4(k) - l_2(k)^{-1}l_3(k)^2/2)/4)/2.$$

Подставляя значения производных из (34) в (33) и учитывая определение (27) функции  $\tau_1(k)$ , приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\tau_1(k+1)\tau_1(k-1)}{\tau_1(k)^2} = \frac{1}{16l_2(k)^5} (576l_2(k)^9 + 288l_2(k)^6l_3(k)^2 + 9l_3(k)^6 - 36l_2(k)l_3(k)^4l_4(k) + \\ + 192l_2(k)^7(t + 2l_4(k)) + 12l_2(k)^2l_3(k)^2(3l_4(k)^2 + 2l_3(k)l_5(k)) + 16l_2(k)^5((t + 2l_4(k))^2 + \\ + 12l_3(k)l_5(k)) + 12l_2(k)^3(15l_3(k)^4 - 4l_3(k)l_4(k)l_5(k)) - 16l_2(k)^4(3l_3(k)^2(t + 8l_4(k)) - l_5(k)^2)),$$

которое доказывает требуемое утверждение.

Исследуем алгебраическую зависимость решений уравнения  $({}_4P_2)$ , полученных последовательным применением преобразования Беклунда (25).

**Теорема 7.** *Пять последовательных ненулевых решений  $q(k-1)$ ,  $q(k)$ ,  $q(k+1)$ ,  $q(k+2)$ ,  $q(k+3)$  уравнения  $({}_4P_2)$ , полученных преобразованием Беклунда, алгебраически зависимы.*

**Доказательство.** Положим в преобразовании Беклунда (25)  $\alpha \rightarrow \alpha + 1$ , тогда с учетом того, что  $\alpha = k + 1/2$ , из (25), (26) имеем

$$-2q_{ttt}(k) - 4q(k)q_{tt}(k) + 2q_t(k)^2 + 12q(k)^2q_t(k) + 6q(k)^4 + t = -\frac{2(k+1)}{q(k+1) + q(k)}, \quad (35)$$

$$2q_{ttt}(k) - 4q(k)q_{tt}(k) + 2q_t(k)^2 - 12q(k)^2q_t(k) + 6q(k)^4 + t = -\frac{2k}{q(k-1) + q(k)}. \quad (36)$$

Здесь и далее предполагаем, что решения  $q(k-1)$ ,  $q(k)$ ,  $q(k+1)$ ,  $q(k+2)$ ,  $q(k+3)$  ненулевые. Это предположение в силу преобразований Беклунда (25), (26) гарантирует необратимость в нуль знаменателей равенств (35), (36). Тогда, исключая  $q_{ttt}(k)$  из (35) и (36), получаем

$$q_{tt}(k) = \frac{1}{8q(k)} \left( 2t + 12q(k)^4 + \frac{2k}{q(k-1) + q(k)} + \frac{2(k+1)}{q(k) + q(k+1)} + 4q_t(k)^2 \right). \quad (37)$$

Отсюда после подстановки  $k \rightarrow k+1$  имеем

$$q_{tt}(k+1) = \frac{1}{8q(k+1)} \left( 2t + 12q(k+1)^4 + \frac{2(k+1)}{q(k) + q(k+1)} + \frac{2(k+2)}{q(k+1) + q(k+2)} + 4q_t(k+1)^2 \right). \quad (38)$$

Известно [18], что

$$q_t(k+1) = -q_t(k) - q(k)^2 + q(k+1)^2. \quad (39)$$

Последовательно дифференцируя равенство (39) по  $t$ , получаем

$$q_{tt}(k+1) = -q_{tt}(k) - 2q(k)q_t(k) + 2q(k+1)q_t(k+1). \quad (40)$$

Тогда, подставляя  $q_{tt}(k+1)$  из (40) и  $q_t(k+1)$  из (39) в (38), получаем второе уравнение относительно  $q_{tt}(k)$ :

$$q_{tt}(k) = -(2t + 12q(k+1)^4 + 2(k+1)/(q(k) + q(k+1)) + 2(k+2)/(q(k+1) + q(k+2)) +$$

$$+ 4(q(k+1)^2 - q(k)^2 - q_t(k)^2)/(8q(k+1)) + 2q(k+1)(q(k+1)^2 - q(k)^2 - q_t(k)^2) - 2q(k)q_t(k). \quad (41)$$

Исключая  $q_{tt}(k)$  из (37) и (41), получаем квадратное относительно  $q_t(k)$  уравнение

$$q_t(k)^2 + 2\frac{q(k)}{r(k)}q_t(k) + J(k) = 0, \quad (42)$$

где  $r(k) = (q(k) + q(k+1))^{-1}$ ,  $J(k) = 2q(k)q(k+1)r(k)(M(k) + M(k+1) + F(k))$ ,

$$F(k) = q(k)^2q(k+1) + \frac{q(k)^4}{2q(k+1)} + \frac{3}{2}q(k)^3, \quad M(k) = \frac{1}{8q(k)}(2t + 2kr(k-1) + 2(k+1)r(k)).$$

Пусть опять  $k \rightarrow k+1$  в (42), тогда

$$q_t(k+1)^2 + 2\frac{q(k+1)}{r(k+1)}q_t(k+1) + J(k+1) = 0. \quad (43)$$

Исключая  $q_t(k+1)$  из уравнений (39) и (43), находим значение

$$q_t(k) = P/Q, \quad (44)$$

где  $P = (q(k)^2 - q(k+1)^2)(q(k)^2 - q(k+1)(3q(k+1) + 2q(k+2))) + J(k+1) - J(k)$ ,  $Q = 2q(k+1)(q(k) + 2q(k+1) + q(k+2))$ . Подставляя  $q_t(k)$  из (44) в (42), получаем алгебраическое соотношение между пятью последовательными ненулевыми решениями уравнения  $({}_4P_2) P^2 + 2(q(k)/r(k))PQ + J(k)Q^2 = 0$ . Теорема 7 доказана.

Общая схема вывода алгебраических соотношений между последовательными решениями высших аналогов уравнений Пенлеве при помощи преобразований Беклунда приведена в [18] (см. также [19]).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malmquist J.* // Arc. Mat. Astr. Fys. 1922–1923. V. 17. P. 1–89.
2. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.
3. *Okamoto K.* // Proc. Japan Acad. A. 1980. V. 56. P. 264–268.
4. *Еругин Н.П.* // Докл. АН БССР. 1958. Т. 1. № 1. С. 3–6.
5. *Яблонский А.И.* // Докл. АН БССР. 1958. Т. 2. № 11. С. 437–440.
6. *Okamoto K.* // The Painlevé property: one century later. 1999. P. 735–788.
7. *Kimura H.* // Ann. Mat. Pur. Appl. 1983. 4. V. 134. P. 363–392.
8. *Kimura H., Okamoto K.* // J. Math. Pures Appl. 9. 1984. V. 63. P. 129–146.
9. *Okamoto K.* // Physica D. 1981. V. 2. P. 525–535.
10. *Takasaki K.* // J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 1443–1473.
11. *Jimbo M., Miwa T., Ueno K.* // Physica D. 1981. V. 2. P. 306–352.
12. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé. A modern theory of special functions: Aspects of Mathematics E16. Braunschweig, 1991.
13. *Painlevé P.* // Bull. Soc. Math. France. 1900. V. 28. P. 201–261.
14. *Hinkkanen A., Laine I.* // J. Anal. Math. 1999. V. 79. P. 345–377.
15. *Gromak V., Laine I., Shimomura S.* Painlevé differential equations in the complex plane: Studies in mathematics, 2002.
16. *Shimomura S.* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 4. 2000. V. 29. P. 1–17.
17. *Громак В.И.* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2042–2048.
18. *Громак В.И.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2000. Т. 6. С. 65–74.
19. *Clarkson P., Mansfield E., Webster H.* // Theor. Math. Phys. 2000. V. 122. P. 1–16.

Белорусский государственный университет,  
г. Минск

Поступила в редакцию  
19.12.2002 г.