ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 4, с. 522–526

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЕАНО ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ В КОМПАКТНО ВЛОЖЕННЫХ ШКАЛАХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

© 2004 г. Е. А. Баркова, П. П. Забрейко

В предлагаемой работе рассматриваются условия разрешимости задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha > 1$ в банаховых пространствах с так называемыми ухудшающими правыми частями.

Для уравнений целых (первого и высших) порядков с ухудшающими операторами классическими являются результаты М. Нагумо и Л.В. Овсянникова (см., например, [1–6]), основанные на исследовании сходимости метода последовательных приближений в шкалах (непрерывно вложенных друг в друга) банаховых пространств. Ряд дальнейших результатов в этом направлении содержится в работах [7–9]. Аналогичные результаты для уравнений дробного порядка с ухудшающими операторами рассматривались в [10]. В работах [11, 12] разработан новый метод исследования дифференциальных уравнений первого порядка в шкалах (компактно вложенных друг в друга) банаховых пространств, основанный на использовании приближений Тонелли. В настоящей работе предлагается некоторая модификация этого метода, которая приводит к ряду утверждений о (нелокальной!) разрешимости задачи Коши для дифференциальных уравнений (целого и дробного) порядка, строго больше единицы.

1. Пусть $X(\omega)$ $(\omega \in \Omega = [0,1])$ – некоторая шкала (семейство) банаховых пространств, непрерывно вложенных в отделимое топологическое линейное пространство X. Предположим далее, что функция $f(t,x)$ определена при $t \in [0,T]$ и $x \in X_0 = \bigcup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$ и принимает значения в X. Пусть для всех пар (ω', ω''), для которых $\omega' > \omega''$, пространство $X(\omega')$ компактно вложено в пространство $X(\omega'')$, причем норма оператора вложения не превышает 1, $f(t,x)$ действует из $[0,T]\times X(\omega')$ в $X(\omega'')$ и, более того, выполняется неравенство

$$\|f(t,x)\|_{X(\omega'')} \le \frac{k}{\omega' - \omega''}(a + \|x\|_{X(\omega')}) \quad (x \in X(\omega')),$$

где постоянные k, a не зависят от ω' и ω''.

Предположим, что $\alpha > 1$ и m – целое число, удовлетворяющее условию $m-1 < \alpha \le m$. Нас будет интересовать вопрос о существовании и единственности решений задачи Коши

$$D^\alpha x(t) = f(t,x), \tag{1}$$

$$x^{(k)}(0) = \xi_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{2}$$

где D^α – дробная производная порядка α в смысле Капуто [13]:

$$D^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} x^{(m)}(s)\,ds \quad (m-1<\alpha\le m,\ m \in N,\ t>0).$$

Мы будем рассматривать ситуации, когда начальные условия ξ_k принадлежат некоторому пространству $X(\omega')$, а решения $x(t)$ – другому, более широкому пространству $X(\omega'')$.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \omega'' < \omega' \le 1$ *и* $\xi_k \in X(\omega')$ $(k = \overline{0,m})$. *Тогда задача Коши (1), (2) имеет в* $X(\omega'')$ *по крайней мере одно непрерывное решение, определенное на* $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\omega'' < \sigma' < \omega'$ и $1 < \varkappa \le \alpha$. Ниже нам понадобится последовательность ω_n $(n = 0,1,2,\ldots)$, определяемая равенствами $\omega_0 = \omega'$, $\omega_{n-1} - \omega_n = (\gamma(\varkappa)/n^\varkappa)(\omega'-\sigma')$, где $\gamma(\varkappa)(1/1^\varkappa + 1/2^\varkappa + \ldots + 1/n^\varkappa + \ldots) = 1$.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}([0,T],X(\sigma'))$ интегральное уравнение, эквивалентное задаче Коши (1), (2):

$$x(t) = x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,x(s))\,ds, \quad \xi_0,\ldots,\xi_{m-1}\in X(\omega'),$$

где $x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) = \xi_0 + \xi_1 t/1! + \ldots + \xi_{m-1}t^{m-1}/(m-1)!$. Для доказательства его разрешимости рассмотрим вместе с ним последовательность уравнений

$$x(t) = x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s, x\left(s-\frac{T}{n}\right)\right)ds \quad (n=1,2,\ldots). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что при любом $n=1,2,\ldots$ каждое из уравнений (3) имеет определенное на $[0,T]$ единственное решение $x_n(t)$, удовлетворяющее условию $x_n(t) = x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})$ $(-T/n \le t \le 0)$, и это решение принадлежит пространству $\mathbf{C}([0,T],X(\sigma'))$. Функции $x_n(t)$ $(n=1,2,\ldots)$ называются приближениями Тонелли для задачи Коши (1), (2). Покажем, что последовательность приближений Тонелли $x_n(t)$ при сделанных предположениях равномерно ограничена в пространстве $\mathbf{C}([0,T],X(\sigma'))$.

Для каждого σ, удовлетворяющего условию $\sigma' \le \sigma \le \omega'$, положим

$$h(\sigma,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) = \sup_{-T\le t\le T} \|x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\|_{X(\sigma)}.$$

Пусть n фиксировано и $0\le t\le n^{-1}T$. Тогда для всех $\sigma'\le\sigma\le\omega'$ справедливы неравенства

$$\|x_n(t)\|_{X(\sigma)} \le h(\sigma,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) +$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\frac{k}{\omega'-\sigma}\left(a + \left\|x_0\left(s-\frac{T}{n},\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}\right)\right\|_{X(\omega')}\right)ds \le$$
$$\le a\frac{k}{\omega'-\sigma}\,\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + h(\sigma,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) + h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\frac{k}{\omega'-\sigma}\,\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{4}$$

Полагая $\sigma=\sigma'$ и учитывая, что $h(\sigma',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) \le h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})$, получаем оценку приближений Тонелли в пространстве $X(\sigma')$ при $0\le t\le n^{-1}T$

$$\|x_n(t)\|_{X(\sigma')} \le a\frac{k}{\omega'-\sigma'}\,\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\left(1+\frac{k}{\omega'-\sigma'}\,\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right).$$

Далее, при $n^{-1}T\le t\le 2n^{-1}T$ для всех σ, удовлетворяющих условию $\sigma'\le\sigma\le\omega_1<\omega'$,

$$\|x_n(t)\|_{X(\sigma)} \le h(\sigma,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\frac{k}{\omega_1-\sigma}\left(a+\left\|x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right\|_{X(\omega_1)}\right)ds.$$

Полагая в неравенстве (4) $\sigma=\omega_1$, получаем

$$\|x_n(t)\|_{X(\sigma)} \le h(\sigma,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\frac{k}{\omega_1-\sigma}\left(a+\frac{ak}{\omega'-\omega_1}\,\frac{s^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} +\right.$$
$$\left. + h(\omega_1,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1}) + h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\,\frac{k}{\omega'-\omega_1}\,\frac{s^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)ds =$$

$$= a\left(\frac{k}{\omega_1-\sigma}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{k^2}{(\omega_1-\sigma)(\omega'-\omega_1)}\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)+h(\sigma,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})+$$

$$+h(\omega_1,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\frac{k}{\omega_1-\sigma}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\frac{k^2}{(\omega_1-\sigma)(\omega'-\omega_1)}\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}. \qquad (5)$$

Полагая $\sigma=\sigma'$, в силу $h(\sigma',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\le h(\omega_1,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\le h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})$ получаем оценку приближений Тонелли в пространстве $X(\sigma')$ при $n^{-1}T\le t\le 2n^{-1}T$

$$\|x_n(t)\|_{X(\sigma')}\le a\left(\frac{k}{\omega_1-\sigma'}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{k^2}{(\omega_1-\sigma')(\omega'-\omega_1)}\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right)+$$

$$+h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\left(1+\frac{k}{\omega_1-\sigma'}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{k^2}{(\omega_1-\sigma')(\omega'-\omega_1)}\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right).$$

Продолжая подобным образом, оценим приближения Тонелли $x_n(t)$ на каждом промежутке $(j-1)n^{-1}T\le t\le jn^{-1}T$ $(j=\overline{1,n})$ для всех $\sigma'\le\omega_{j-1}\le\ldots\le\omega_1<\omega'$

$$\|x_n(t)\|_{X(\sigma')}\le a\left(\frac{k}{\omega_{j-1}-\sigma'}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\ldots+\frac{k^j}{(\omega_{j-1}-\sigma')\cdots(\omega'-\omega_1)}\frac{t^{j\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha)}\right)+$$

$$+h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\left(1+\frac{k}{\omega_{j-1}-\sigma'}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\ldots+\frac{k^j}{(\omega_{j-1}-\sigma')\cdots(\omega'-\omega_1)}\frac{t^{j\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha)}\right).$$

Таким образом, при всех $0\le t\le T$ и $\sigma'\le\ldots\le\omega_{n-1}\le\ldots\le\omega_1<\omega'$

$$\|x_n(t)\|_{X(\sigma')}\le a\left(\frac{k}{\omega_{n-1}-\sigma'}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\ldots+\frac{k^n}{(\omega_{n-1}-\sigma')\cdots(\omega'-\omega_1)}\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}+\ldots\right)+$$

$$+h(\omega',\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})\left(1+\frac{k}{\omega_{n-1}-\sigma'}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\ldots+\frac{k^n}{(\omega_{n-1}-\sigma')\cdots(\omega'-\omega_1)}\frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}+\ldots\right).$$

В силу формулы Коши–Адамара полученные ряды сходятся для всех $t\le T$ при условии

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{k^n}{(\omega_{n-1}-\sigma')\cdots(\omega'-\omega_1)}\frac{T^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}\right)^{1/n}<1.$$

Последнее неравенство в силу $1<\varkappa<\alpha$ и определения чисел ω_n $(n=0,1,\ldots)$ справедливо для всех T:

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left(\frac{k^n}{(\omega_{n-1}-\sigma')\cdots(\omega'-\omega_1)}\frac{T^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}\right)^{1/n}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{kT^\alpha}{\gamma(\varkappa)(\omega'-\sigma')}\frac{(n!)^{\varkappa/n}}{(\Gamma(1+n\alpha))^{1/n}}=$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{kT^\alpha}{\gamma(\varkappa)(\omega'-\sigma')}\frac{(2\pi n)^{\varkappa/(2n)}e^\alpha}{(2\pi n\alpha)^{1/(2n)}\alpha^\alpha e^\varkappa}\frac{n^\varkappa}{n^\alpha}=0.$$

Отсюда, очевидно, и следует равномерная ограниченность приближений Тонелли в пространстве $\mathbf{C}([0,T],X(\sigma'))$.

Покажем теперь, что последовательность Тонелли $x_n(t)$ равностепенно непрерывна в пространстве $\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$. Пусть $t\in(0,T)$, $\Delta t\in[0,T-\Delta t]$. Тогда в силу $\omega''<\sigma'$

$$\|x_n(t+\Delta t)-x_n(t)\|_{X(\omega'')}\le$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_0^{t+\Delta t}(t+\Delta t-s)^{\alpha-1}f\left(s,x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right)ds-\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f\left(s,x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right)ds\right\|_{X(\omega'')}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_0^t((t+\Delta t-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1})f\left(s,x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right)ds\right\|_{X(\omega'')}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left\|\int\limits_t^{t+\Delta t}(t+\Delta t-s)^{\alpha-1}f\left(s,x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right)ds\right\|_{X(\omega'')}\le$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t((t+\Delta t-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1})\left\|f\left(s,x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right)\right\|_{X(\omega'')}ds+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_t^{t+\Delta t}(t+\Delta t-s)^{\alpha-1}\left\|f\left(s,x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right)\right\|_{X(\omega'')}ds\le$$

$$\le\frac{k}{\sigma'-\omega''}\,\frac{(t+\Delta t)^\alpha-t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\left(a+\left\|x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right\|_{X(\sigma')}\right)\le\frac{k}{\sigma'-\omega''}\,\frac{T^{\alpha-1}\Delta t}{\Gamma(\alpha)}\left(a+\left\|x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right\|_{X(\sigma')}\right).$$

Так как последовательность Тонелли $x_n(t)$ равномерно ограничена в пространстве $\mathbf{C}([0,T],X(\sigma'))$, получаем равностепенную непрерывность в $\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$.

По теореме Арцела–Асколи для всех $t\in[0,T]$, $\omega''<\sigma'$ последовательность $x_n(t)$ предкомпактна в $\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$. Поэтому из последовательности $x_n(t)$ можно выбрать подпоследовательность $x_{n_k}(t)$, сходящуюся к $x_*(t)\in\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$. При этом последовательность $x_{n_k}(t-n_k^{-1}T)$ также сходится к $x_*(t)\in\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$Ax(t)=x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x(s))\,ds\quad(\xi_k\in X(\omega'),\quad k=\overline{0,m-1})$$

и покажем его непрерывность как оператора из пространства $\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$ в пространство $\mathbf{C}([0,T],X(\sigma''))$, где $\sigma''<\omega''$. Действительно, если последовательность функций $x_n(t)\in\in\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$ сходится к функции $x(t)\in\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$, то в силу непрерывности при каждом $t\in[0,T]$ функции $f(t,x)$ по x как оператора из $X(\omega'')$ в $X(\sigma'')$ последовательность функций $f(t,x_n(t))$ при всех $t\in[0,T]$ сходится к функции $f(t,x(t))$. С другой стороны, в силу $\sigma''<\omega''$ справедливо неравенство

$$\|f(t,x_n(t))\|_{X(\sigma'')}\le(k/(\omega''-\sigma''))\|x\|_{X(\omega'')}\quad(n=1,2,\ldots),$$

откуда в силу ограниченности последовательности $x_n(t)$ в $\mathbf{C}([0,T],X(\omega''))$ следует, что

$$\|f(t,x_n(t))\|_{X(\sigma'')}\le(k/(\omega''-\sigma''))M\quad(n=1,2,\ldots),$$

где M – некоторая постоянная. Поэтому возможен предельный переход под знаком интеграла в равенствах

$$Ax_n(t)=x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_n(s))\,ds,$$

при каждом $t\in[0,T]:\ Ax(t)=\lim\limits_{n\to\infty}Ax_n(t)$.

В частности, возможен предельный переход в равенствах

$$x_n(t)=x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f\left(s,x_n\left(s-\frac{T}{n}\right)\right)ds\quad(n=1,2,\ldots),$$

откуда вытекает, что

$$x_*(t)=x_0(t,\xi_0,\ldots,\xi_{m-1})+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,x_*(s))\,ds.$$

Последнее равенство означает, что $x_*(t)$ является решением задачи Коши (1), (2). Теорема доказана.

2. Рассмотрим более общий случай описанной ситуации.

Пусть $X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ – некоторая шкала (семейство) банаховых пространств, непрерывно вложенных в отделимое топологическое линейное пространство X. Предположим далее, что функция $f(t,x)$ определена при $t \in [0,T]$ и $x \in X_0 = \bigcup_{\omega\in\Omega} X(\omega)$ и принимает значения в X. Пусть непусто множество $W \subset \Omega\times\Omega$ тех пар (ω',ω''), для которых пространство $X(\omega')$ компактно вложено в пространство $X(\omega'')$ с нормой оператора вложения, не превышающей 1, $f(t,x)$ действует из $[0,T] \times X(\omega')$ в $X(\omega'')$ и, более того, с некоторыми постоянными a и $k(\omega',\omega'')$ выполняется условие

$$\|f(t,x)\|_{X(\omega'')} \le k(\omega',\omega'')(a + \|x\|_{X(\omega')}) \quad (0 \le t \le T,\ x \in X(\omega')).$$

Введем множество W^*, состоящее из пар $(\omega',\omega'') \in W$ и обладающее следующими двумя свойствами:

а) существует такое $\sigma' \in \Omega$, что $(\omega',\sigma') \in W$ и последовательность $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots \in W$, для которых

$$\omega_0 = \omega', \quad (\omega_{n-1},\omega_n) \in W \quad (n = 1,2,\ldots), \quad (\omega_n,\sigma') \in W \quad (n = 1,2,\ldots). \tag{6}$$

Множество таких σ' ниже обозначается через $\Sigma(\omega',\omega'')$, а множество соответствующих последовательностей $\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots$, удовлетворяющих условию (6), – через $\Omega(\omega',\omega'',\sigma')$;

б) существует такое $\sigma'' \in \Omega$, что $(\omega'',\sigma'') \in W$.

Пусть $\sigma' \in \Sigma(\omega',\omega'')$ и $(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots) \in \Omega(\omega',\omega'',\sigma')$. Положим

$$T(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots,\sigma') = \varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{\Gamma(1+n\alpha)}{k(\omega_0,\omega_1)\cdots k(\omega_{n-2},\omega_{n-1})k(\omega_{n-1},\sigma')}\right)^{1/(n\alpha)},$$

и, далее,

$$T(\omega',\omega'') = \sup_{\sigma'\in\Sigma(\omega',\omega''),\ (\omega_0,\ldots,\omega_n,\ldots)\in\Omega(\omega',\omega'',\sigma')} T(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots,\sigma').$$

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть $(\omega',\omega'') \in W^*$, $T < T(\omega',\omega'')$, $x_0 \in X(\omega')$. Тогда задача Коши (1), (2) имеет в $X(\omega'')$ по крайней мере одно непрерывное решение, определенное на $[0,T]$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958.
2. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. М., 1977.
3. *Nishida T.* // J. Differ. Geom. 1977. V. 12. № 4. P. 629–633.
4. *Овсянников Л.В.* // Докл. АН СССР. 1965. Т. 163. № 4. С. 819–822.
5. *Овсянников Л.В.* // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 789–792.
6. *Yamanaka T.* // Comment. Math. Univ. St. Paul. 1961. V. 9. P. 7–10.
7. *Баркова Е.А., Забрейко П.П.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 3. С. 472–478.
8. *Забрейко П.П.* // VII всесоюз. конф. "Качественная теория дифференциальных уравнений": Тез. докл. Рига, 1989. С. 14.
9. *Забрейко П.П., Радыно Я.В.* // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 2. С. 345–348.
10. *Gorenflo R., Luchko Yu.F., Zabrejko P.P.* // Fractional Calculus & Applied Analysis. 1999. V. 2. P. 163–176.
11. *Назаров В.И.* // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 12. С. 1069–1072.
12. *Назаров В.И.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 11. С. 1973–1977.
13. *Caputo M.* // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1967. V. 13. P. 529–539.

Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники, г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск

Поступила в редакцию
25.09.2002 г.