ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 2, с. 208–215

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32

# ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2004 г. В. И. Корзюк

Настоящая работа является фактически продолжением [1], где доказано энергетическое неравенство

$$\|u\|_E \leq c\|Au\|_{L_2(\Omega)} \tag{1}$$

в случае граничной задачи для линейного гиперболического уравнения третьего порядка

$$Au = A_1u + A_2u = f(x), \tag{2}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad A_1u = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - a^2\Delta u\right), \quad \Delta = \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

$$A_2u = \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha(x)D^\alpha u, \quad D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\Omega$ – ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $L_2(\Omega)$ – пространство квадратично-суммируемых в $\Omega$ функций. Здесь с помощью операторов осреднения переменного шага [2] будет доказана теорема существования и единственности сильного решения граничной задачи для уравнения (2).

Сформулируем рассматриваемую задачу с помощью обозначений, использованных в [1]. Обозначим через $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_n(x))$ единичный вектор нормали к гиперповерхности $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$. Пусть $\delta$ – некоторое фиксированное достаточно малое положительное число. Считаем, что граница $\partial\Omega$ может состоять из гиперповерхностей семи видов, которые с помощью $\delta$ и $\nu(x)$ определяются следующим образом:

$$S_0 = \left\{x \in \partial\Omega \mid A_1(\nu) = \nu_1^3 - a^2\nu_1\sum_{i=2}^{n}\nu_i^2 > 0, \ \nu_1 > 0\right\},$$

$$S_1 = \{x \in \partial\Omega \mid A_1(\nu) = 0, \ \nu_1 > 0\}, \quad S_2 = \{x \in \partial\Omega \mid A_1(\nu) \leq -\delta, \ \nu_1 \geq \delta\},$$

$$S_3 = \{x \in \partial\Omega \mid A_1(\nu) = 0, \ \nu_1 = 0\}, \quad S_4 = \{x \in \partial\Omega \mid A_1(\nu) \geq \delta, \ \nu_1 \leq -\delta\},$$

$$S_5 = \{x \in \partial\Omega \mid A_1(\nu) = 0, \ \nu_1 < 0\}, \quad S_6 = \{x \in \partial\Omega \mid A_1(\nu) < 0, \ \nu_1 < 0\}.$$

Другие гиперповерхности из $\partial\Omega$ исключаются.

Простейшим примером такой области может быть деформированный ("раздутый") следующим образом шар радиуса $R$ (см. рисунок).

Область рассматриваем в декартовой системе координат $x_1, \dots, x_n$, где центр шара находится в начале координат. Здесь присутствуют все указанные выше части гиперповерхностей $S_i$ $(i = \overline{0,6})$ границы $\partial\Omega$, которые можно описать с помощью конических поверхностей $Z_m = \{x \mid x_1^2 - (\operatorname{tg}\varphi_m)^2|x'|^2 = 0\}$, где $m = 0, 1, 2$, и $0 < \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 = \pi/2$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = |a|$, $|x'|^2 = \sum_{i=2}^{n} x_i^2$.

Здесь $S_0$ – верхняя часть поверхности сферы $|x| = R$, которая находится внутри конуса $Z_0 = \{x \mid x_1^2 - a^2|x'|^2 = 0\}$, т.е. $S_0 = \{x \mid |x| = R, \ \nu_1^2 - a^2\sum_{i=2}^{n}\nu_i^2 > 0, \ \nu_1 > 0\}$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ –

единичный вектор внешней нормали. Поверхность $S_1$ находится между конусами $Z_0$ и $Z_1$. Более точно,

$$S_1 = \left\{x \mid \nu_1^2 - a^2 \sum_{i=2}^{n} \nu_i^2 = 0,\ \nu_1 > 0;\ |x| = R \text{ при } x \in Z_0,\ |x| = \frac{R}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)} \text{ при } x \in Z_1\right\},$$

$$S_2 = \{x \mid |x| = R/\cos(\varphi_1 - \varphi_0),\ |x'| \operatorname{ctg}\varphi_2 < x_1 < |x'| \operatorname{ctg}\varphi_1\},$$

$$S_3 = \{x \mid |x'| = R\cos(\varphi_3 - \varphi_2)/\cos(\varphi_1 - \varphi_0),\ -|x'| \operatorname{ctg}\varphi_2 \le x_1 \le |x'| \operatorname{ctg}\varphi_2\},$$

$$S_4 = \{x \mid |x| = R\cos(\varphi_1 - \varphi_0),\ -|x'| \operatorname{ctg}\varphi_1 < x_1 < -|x'| \operatorname{ctg}\varphi_2\},$$

$$S_5 = \left\{x \mid \nu_1^2 - a^2 \sum_{i=2}^{n} \nu_i^2 = 0,\ \nu_1 < 0,\ |x| = R \text{ при } x \in Z_0,\ |x| = \frac{R}{\cos(\varphi_1 - \varphi_0)} \text{ при } x \in Z_1\right\},$$

$$S_6 = \{x \mid |x| = R,\ -R \le x_1 < -|x'|/|a|\}.$$

Граничная задача – уравнение (2), заданное в $\Omega$, и однородные граничные условия

$$u\big|_{\bigcup_{i=2}^{6} S_i} = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\bigcup_{i=4}^{6} S_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}\bigg|_{S_6} = 0, \qquad (3)$$

где $\partial/\partial\nu$ – производная по нормали $\nu$, $\cup$ – объединение.

Рассмотрение задачи (2), (3) представляет интерес для $n > 2$, так как такого рода задачи в случае двух независимых переменных на плоскости $(n = 2)$ для гиперболического уравнения и систем изучались уже, например, в [3–5]. Как видно из доказательства в [1] энергетического неравенства (1), для граничных задач гиперболических уравнений, заданных в нецилиндрических областях, при $n > 3$ появляются новые принципиальные трудности. Поэтому методы, использованные для плоских задач [3–5], автоматически на этот случай не переносятся. При наличии энергетического неравенства (1) операторы осреднения переменного шага [2] позволяют доказать корректную постановку задачи (2), (3) и при некоторых ограничениях на ее данные установить существование сильного решения.

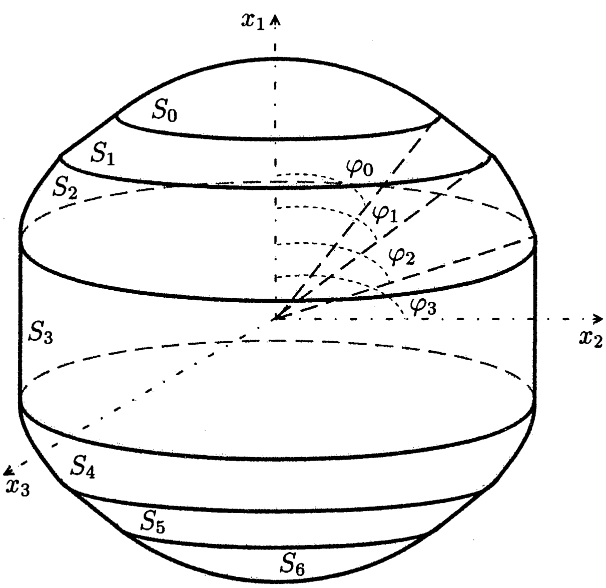

**Рисунок.**

В работе [6] представлены аналогичные результаты для достаточно общего вида гиперболического уравнения второго порядка. Постановка задач и доказательство их разрешимости, особенно в случае нецилиндрических областей задания основного уравнения, актуальны для гиперболических уравнений высокого порядка. Следует еще отметить и работу [7], в которой рассмотрены граничные задачи для гиперболического уравнения дивергентного вида при $n = 3$ и в случае достаточно сложной конфигурации областей.

Пусть $S(t) = \{x \in \overline{\Omega} \mid x_1 = t\}$ – сечение $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, перпендикулярное оси $x_1$. Для функций $u \in C^3(\overline{\Omega})$ (трижды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$) введем норму

$$\|u\|_E = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{|\alpha| \le 2} \|D^\alpha u\|_{L_2(S(t))}, \qquad (4)$$

где $\|\cdot\|_{L_2(S(t))}$ – норма пространства квадратично-суммируемых по Лебегу функций на $S(t)$. Обозначим через $\mathcal{D}(A)$ множество функций $u \in C^3(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условиям (3). В работе [1] для любой функции $u \in \mathcal{D}(A)$ и оператора $A$ при некоторых ограничениях на границу $\partial\Omega$ доказано энергетическое неравенство (1), где постоянная $c > 0$ не зависит от $u$.

Обозначим через $E$ замыкание по норме (4) множества $\mathcal{D}(A)$. Тогда оператор $A$ как оператор из $E$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$ допускает замыкание $\overline{A}$. Это доказывается путем проверки критерия замыкаемости $Au_k \to 0$ по норме пространства $L_2(\Omega)$ при $k \to \infty$, если последовательность $\|u_k\|_E \to 0$ при $k \to \infty$ [6].

**Определение 1.** Функцию $u \in \mathcal{D}(\overline{A})$, удовлетворяющую операторному уравнению $\overline{A}u = f$, если $f \in L_2(\Omega)$, будем называть сильным решением задачи (2), (3).

Путем предельного перехода в неравенстве (1) для любого элемента $u \in \mathcal{D}(\overline{A})$ получаем это же энергетическое неравенство и для оператора $\overline{A}$ с той же константой $c$.

Для доказательства существования сильного решения введем еще некоторые дополнительные ограничения на область $\Omega$. С помощью характеристического конуса $P(\xi) = \xi_1^2 - a^2\sum_{i=2}^n \xi_i^2 = 0$ для волнового оператора в $\Omega$ выберем векторное поле $\mathcal{R}$ элементов $r(x) = (1, r_2(x), \ldots, r_n(x))$ следующим образом. Пусть $b^{(i)}(x)$ $(i = 1, 2)$ – некоторые положительные функции в $\overline{\Omega}$ и $b^{(i)}(x) \geq \delta_1$ для некоторого $\delta_1 > 0$, сколь угодно малого, но не равного нулю. Предполагаем, что $r(x) = b^{(1)}(x)r^{(1)}(x) + b^{(2)}(x)r^{(2)}(x)$, где векторы $r(x)$, $r^{(i)}(x)$ $(i = 1, 2)$, $(1, 0, \ldots, 0)$ лежат в некоторой двумерной плоскости $\gamma(x)$, проходящей через вершину характеристического конуса, $r^{(i)}(x)$ перпендикулярны образующим $\xi^{(i)}(x)$, получаемым в результате пересечения $\gamma(x)$ с $P(\xi) = 0$.

Векторное поле $\mathcal{R}$, элементы которого в каждой точке $x \in \overline{\Omega}$ определяются единственным образом, порождают совокупность линий $\{\varrho\}$, к которым оно является касательным.

**Определение 2.** Подобласть $Q_j \subset \Omega$ будем называть выпуклой относительно $\mathcal{R}$, если $Q_j$ с любой линией $\varrho$, к которой $\mathcal{R}$ касательно, может пересекаться только по односвязному множеству.

**Условие 1.** Область $\Omega$ такова, что существует ее деление сечениями $S(t)$ на конечное число $j_0$ подобластей $Q_j$ $(j = \overline{1, j_0})$, удовлетворяющих следующим требованиям:

*i*) для каждого $j$ существует векторное поле $\mathcal{R}$, относительно которого $Q_j$ является выпуклой;

*ii*) $r_k(x) \in C^3(\overline{Q}_j)$, $k = \overline{2, n}$;

*iii*) для любого $x \in ((S_2 \cup S_3 \cup S_4) \cap \partial Q_j)$ скалярное произведение $(r(x), \nu(x)) = 0$.

**Условие 2.** Каждая из подобластей $Q_j$ $(j = \overline{1, j_0})$ области $\Omega$ является выпуклым множеством относительно прямых, параллельных оси $x_1$.

**Теорема.** *Пусть выполняются условия 1 и 2 и условия теоремы из [1], при которых справедливо энергетическое неравенство (1),* $S_0 \cup S_1 \neq \emptyset$, $S_5 = \emptyset$, $S_6 \neq \emptyset$ ($\emptyset$ *– пустое множество). Тогда для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$ *существует и единственно сильное решение задачи (2), (3).*

**Доказательство.** В силу линейности изучаемой задачи из энергетического неравенства для $\overline{A}$ непосредственно следует единственность сильного решения.

Из общей теории замыкаемых операторов вытекает, что для доказательства существования сильного решения задачи (2), (3) для любой $f \in L_2(\Omega)$ достаточно доказать плотность в $L_2(\Omega)$ множества значений $R(A)$ оператора $A$ [6]. А если использовать еще метод продолжения по параметру (см. доказательство теоремы в [8]), то достаточно доказать плотность в $L_2(\Omega)$ множества $R(A_1)$, где область определения $\mathcal{D}(A_1)$ оператора $A_1$ совпадает с $\mathcal{D}(A)$.

Пусть при некоторой функции $v \in L_2(\Omega)$ выполнено равенство

$$(A_1 u, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{5}$$

для всех $u \in \mathcal{D}(A_1) = \{u \in C^3(\overline{\Omega}) |\ u$ удовлетворяет условиям (3) $\}$. Оператор

$$A_1 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - a^2\Delta\right)\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Если $u \in \mathcal{D}(A_1)$, то функция $w = \partial u/\partial x_1$ принадлежит классу $C^2(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет граничным условиям

$$w|_{\bigcup_{i=3}^6 S_i} = \frac{\partial w}{\partial \nu}\bigg|_{S_6} = 0. \tag{6}$$

Равенство (5) можно рассматривать как

$$(\mathcal{L}w, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{7}$$

для всех $w \in \mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{w \in C^2(\overline{\Omega})|\ w$ удовлетворяет условиям (6)$\}$, где $\mathcal{L} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - a^2\Delta$, $v \in L_2(\Omega)$. Если воспользоваться операторами осреднения переменного шага $E_\delta$, в которых разбиение единицы таково, что сохраняются граничные условия, то $E_\delta w \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ для любой функции $w \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Здесь $E_\delta$ – оператор осреднения переменного шага [2], где параметры $\delta = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_k, \ldots)$ выбираются в зависимости от функции $w$, $\delta_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Разбиение единицы при конструировании $E_\delta$ делается таким, что сгущение подобластей происходит при приближении к границе $\partial\Omega$ с целью сохранения граничных условий функции $w$. Таким образом, $E_\delta w \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, если $w \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.

При таком выборе $E_\delta w$ равенство (7) можно переписать в виде

$$0 = (\mathcal{L}E_\delta w, v)_{L_2(\Omega)} = (w, \mathcal{L}E_\delta^* w)_{L_2(\Omega)} + (\mathcal{L}E_\delta w - E_\delta \mathcal{L}w, v)_{L_2(\Omega)} +$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}\nu_1 - a^2 \sum_{i=2}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}\nu_i\right) E_\delta^* v\, ds - \int\limits_{\partial\Omega} w\left(\frac{\partial E_\delta^* v}{\partial x_1}\nu_1 - a^2 \sum_{i=2}^n \frac{\partial E_\delta^* v}{\partial x_i}\nu_i\right) ds, \tag{8}$$

где $E_\delta^*$ – сопряженный оператор по отношению к оператору $E_\delta$ для любой функции $w \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Варьируя выбором $w$ в пределах $\mathcal{D}(\mathcal{L})$, можно показать, что равенство (8) справедливо в том случае, когда

$$E_\delta^* v|_{\bigcup_{i=0}^4 S_i} = \frac{\partial}{\partial \nu} E_\delta^* v\bigg|_{S_0} = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим коммутатор $\mathcal{L}E_\delta w - E_\delta \mathcal{L}w$, который в более подробной записи можно представить так:

$$(\mathcal{L}E_\delta w - E_\delta \mathcal{L}w)(x) = (K_0 w)(x) + \sum_{i=1}^n \left(K_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)(x), \tag{10}$$

где

$$(K_0 w)(x) = \sum_{k=1}^\infty \left[\frac{\partial^2 \psi_k(x)}{\partial x_1^2}(A_\delta w)(x) - a^2 \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 \psi_k(x)}{\partial x_i^2}(A_\delta w)(x)\right],$$

$$\left(K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1}\right)(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_1}\left(A_\delta \frac{\partial w}{\partial x_1}\right)(x), \left(K_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)(x) = -a^2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\partial \psi_k(x)}{\partial x_i}\left(A_\delta \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)(x), \quad i = \overline{2, n},$$

$\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ – система функций из разбиения единицы, $A_{\delta_k}$ – операторы осреднения Соболева. Операторы $K_i$ $(i = \overline{0, n})$ представляют собой также операторы осреднения переменного шага, сохраняющие граничные условия на $\partial\Omega$. С учетом (9) и (10) равенство (8) представимо в виде

$$0 = (w, \mathcal{L}E_\delta^* v)_{L_2(\Omega)} + \left(w, K_0^* v - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \int\limits_{\partial\Omega} w(K_i^* v)\nu_i\, ds \tag{11}$$

для любой функции $w \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$. Операторы $K_i^*$ $(i = \overline{0, n})$ – сопряженные операторы по отношению к $K_i$. Из (11) следуют условия

$$K_i^* v = 0 \tag{12}$$

на $S_0 \cup S_1$, $i = \overline{0, n}$. Таким образом,

$$(w, \mathcal{L}E_\delta^* v)_{L_2(\Omega)} + \left(w, K_0^* v - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} K_i^* v\right)_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{13}$$

Поскольку множество $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ плотно в $L_2(\Omega)$, то (13) справедливо для любой функции $w \in L_2(\Omega)$.

Пусть подобласть $Q_1 \subset \Omega$ (см. условие 1) расположена "выше" других $Q_j$ $(j = \overline{2, j_0})$, т.е. $x_1 > y_1$ для любой точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q_1$ и любых $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \bigcup_{j=2}^{j_0} Q_j$. Пусть $\tilde{Q}_1$ и $Q_1 \setminus \overline{\tilde{Q}_1}$ – подобласти $Q_1$, которые получаются из $Q_1$ сечением $S(\tilde{t})$, где $\tilde{Q}_1$ расположена "выше" по отношению к $Q_1 \setminus \overline{\tilde{Q}_1}$.

В равенстве (13) полагаем

$$w(x) = \begin{cases} Jv = \oint\limits_{\tilde{x}}^{x} E_\delta^* v\, ds, & x \in \tilde{Q}_1, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \tilde{Q}_1. \end{cases} \tag{14}$$

Здесь $\oint_{\tilde{x}}^{x}$ – криволинейный интеграл, где интегрирование ведется от точки $\tilde{x}$, принадлежащей $\tilde{S}^- = S(\tilde{t}) \cup (\partial\tilde{Q}_1 \bigcap S_6)$, до точки $x \in \partial\tilde{Q}_1 \bigcap (S_0 \bigcup S_1)$ вдоль линии $\varrho$, к которой векторное поле $\mathcal{R}$ является касательным.

Выбранную по формуле (14) функцию $w$ подставляем в (13). Полученное равенство преобразуем, используя при этом граничные условия (9), (12) и равенство $\left(\dfrac{\partial}{\partial r} Jv\right)(x) = (E_\delta^* v)(x)$ для $x \in \tilde{Q}_1$. В результате получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} Jv, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial r} Jv\right)_{L_2(\tilde{Q}_1)} - a^2 \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Jv, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial r} Jv\right)_{L_2(\tilde{Q}_1)} =$$

$$= (Jv, K_0^* v)_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Jv, K_i^* v\right)_{L_2(\tilde{Q}_1)}. \tag{15}$$

Далее

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\partial\tilde{Q}_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} Jv\right)^2 r_\nu\, ds - \frac{a^2}{2} \sum_{i=2}^{n} \int\limits_{\partial\tilde{Q}_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Jv\right)^2 r_\nu\, ds =$$

$$= (Jv, K_0^* v)_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Jv, K_i^* v\right)_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \int\limits_{\tilde{Q}_1} \mathcal{F}(Jv)\, ds, \tag{16}$$

где $r_\nu = \nu_1 + \sum_{i=2}^{n} \nu_i r_i$, $\nu = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$, $r = (1, r_2(x), \ldots, r_n(x))$, $\mathcal{F}(Jv)$ – квадратичная форма относительно производных первого порядка $\dfrac{\partial}{\partial x_i} Jv$, $i = \overline{1, n}$. Производная

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Jv = E_\delta^* v - \sum_{i=2}^{n} r_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} Jv. \tag{17}$$

Из формулы (17) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Jv(\tilde{t}, x') = E_\delta^* v(\tilde{t}, x'), \quad x' = (x_2, \ldots, x_n), \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} Jv(x) = -\sum_{i=2}^{n} r_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} Jv(x), \quad x \in \partial\tilde{Q}_1 \bigcap \left(\bigcup_{i=0}^{4} S_i\right). \tag{19}$$

На $\tilde{\tilde{S}}^- = \partial\tilde{Q}_1 \cap (S_3 \cup S_4 \cup S_6)$ $r_\nu \leq 0$ и $Jv(x) = 0$ в силу определения оператора $J$. В связи с этим

$$-\int\limits_{\tilde{\tilde{S}}^-} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} Jv\right)^2 r_\nu\, ds + \frac{a^2}{2} \sum_{i=2}^n \int\limits_{\tilde{\tilde{S}}^-} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Jv\right)^2 r_\nu\, ds \geq 0. \tag{20}$$

На основании соотношений (17)–(20) из равенства (16) следует неравенство

$$\int\limits_{S(\tilde{t})} (E_\delta^* v)^2(\tilde{t}, x')\, dx' + \sum_{i,j=2}^n \int\limits_{\tilde{S}^+} \left[a^2\delta_{ij} - r_i(x) r_j(x)\right] \frac{\partial}{\partial x_i} Jv \frac{\partial}{\partial x_j} Jv r_\nu\, ds \leq$$

$$\leq 2\left| (Jv, K_0^* v)_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} Jv, K_i^* v\right)_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \int\limits_{\tilde{Q}_1} \mathcal{F}(Jv)\, dx \right| \leq$$

$$\leq c_1 \left( \|E_\delta^* v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \|Jv\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \sum_{i=2}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} Jv \right\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \sum_{i=0}^n \|K_i^* v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} \right), \tag{21}$$

где $\tilde{S}^+ = \partial\tilde{Q}_1 \cap (S_0 \cup S_1)$, $\delta_{ij}$ – символ Кронекера, постоянная $c_1$ больше нуля.

Чтобы применить к (21) неравенство Гронуолла, наряду с функцией $Jv(x)$ введем функцию $(\tilde{J}v)(x) = \oint_x^{\bar{x}} E_\delta^* v\, ds$, где интегрирование ведется также по линиям $\rho$, к которым векторное поле $\mathcal{R}$ является касательным, $z \in \tilde{S}^+$. Из определения операторов $J$ и $\tilde{J}$ следует, что

$$(Jv)(x) + (\tilde{J}v)(x) = (\tilde{J}v)(\tilde{x}). \tag{22}$$

Отметим, что с помощью линии интегрирования $\varrho$ точки ее функционально связаны между собой. В частности, $z_i = z_i(\tilde{x})$ $(i = \overline{1,n})$, определенные таким образом, можем рассматривать как непрерывные функции с областью определения $\mathcal{D}(z_i) = \tilde{S}^-$ и множеством значений $\mathcal{R}(z_i) = \tilde{S}^+$.

В неравенстве (21), используя соотношение (22), функцию $Jv$ заменим на $\tilde{J}v$. В результате получим

$$\sum_{i,j=2}^n \int\limits_{\tilde{S}^-} (a^2\delta_{ij} - r_i r_j) z(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{J}v(\tilde{x}) \beta_i(\tilde{x}) \beta_j(\tilde{x})\right) (r_\nu)(z(\tilde{x})) \beta(\tilde{x})\, ds + \|E_\delta^* v\|^2_{L_2(S(\tilde{t}))} \leq$$

$$\leq c_1(\varepsilon_0) \left( \|E_\delta^* v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \|\tilde{J}v(\tilde{x}) - \tilde{J}v(x)\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \sum_{i=2}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v(\tilde{x}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v(x) \right\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1} \right) +$$

$$+ \varepsilon_0 \sum_{i=0}^n \|K_i^* v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)}, \tag{23}$$

где функции $\beta_i(\tilde{x}) \neq 0$ можно выбрать за счет векторного поля $\mathcal{R}$, $\beta(\tilde{x}) \geq c_2 > 0$, $c_1(\varepsilon_0)$ увеличивается обратно пропорционально с уменьшением $\varepsilon_0 > 0$.

В силу определения векторного поля $\mathcal{R}$ для любого ортогонального по отношению к $r(x)$ вектора $\xi(x) = (\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x))$ имеем $\xi_1^2 - a^2 \sum_{i=2}^n \xi_i^2 \leq -c_3|\xi|^2 = -c_3 \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ для всех $x \in \overline{\Omega}$ и некоторой постоянной $c_3 > 0$. В качестве такого вектора возьмем вектор

$$\xi(\tilde{x}) = \left( -\sum_{i=2}^n r_i(z(\tilde{x})) \beta(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v(\tilde{x}), \beta_2(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} \tilde{J}v(\tilde{x}), \ldots, \beta_n(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{J}v(\tilde{x}) \right).$$

Очевидно, что он ортогонален вектору $r(z(\tilde{x})) = (1, r_2(z(\tilde{x})), \ldots, r_n(z(\tilde{x})))$, в частности, для любого $\tilde{x} \in \tilde{S}^-$. Поэтому, поскольку $\beta_i(\tilde{x}) \neq 0 \;\; (i = \overline{2,n})$,

$$\sum_{i,j=2}^{n} \int\limits_{\tilde{S}^-} (a^2\delta_{ij} - r_i r_j) z(x) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{J}v(\tilde{x}) \beta_i(\tilde{x}) \beta_j(\tilde{x}) \right) (r_\nu)(z(\tilde{x}))\beta(\tilde{x})\, ds \geq$$

$$\geq c_4 \sum_{i=2}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v \right\|_{L_2(\tilde{S}^-)}, \quad c_4 > 0. \tag{24}$$

Далее

$$\|\tilde{J}v(\tilde{x}) - \tilde{J}v(x)\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \sum_{i=2}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v(\tilde{x}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v(x) \right\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} \leq$$

$$\leq \varepsilon_1(\tilde{Q}_1) \left( \|\tilde{J}v\|^2_{L_2(\tilde{S}^-)} + \sum_{i=2}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v(\tilde{x}) \right\|^2_{L_2(\tilde{S}^-)} \right) + c_5 \left( \|\tilde{J}v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \sum_{i=2}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v \right\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} \right), \tag{25}$$

где положительную постоянную $\varepsilon(\tilde{Q}_1)$ можно выбрать достаточно малой, уменьшив при этом область $\tilde{Q}_1$. Согласно свойствам операторов осреднения

$$\sum_{i=0}^{n} \|K_i^* v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} \leq c_6 \|v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)}. \tag{26}$$

Наряду с неравенством (23) рассмотрим неравенство

$$\|\tilde{J}v\|^2_{L_2(\tilde{S}^-)} \leq c_7 \|E_\delta^* v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} + \|\tilde{J}v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)}, \tag{27}$$

которое получается из равенства

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\tilde{S}^-} (\tilde{J}v)^2(\tilde{x}) r_\nu(z(\tilde{x}))\beta(\tilde{x})\, ds = \int\limits_{\tilde{Q}_1} E_\delta^* v(x) [\tilde{J}v(\tilde{x}) - \tilde{J}v(x)]\, dx,$$

а последнее – из соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (Jv)(x) = E_\delta^* v(x) Jv(x)$$

путем интегрирования его по области $\tilde{Q}_1$. Сложив неравенства (23) и (27), с учетом неравенств (24)–(26) и соответствующего выбора $\varepsilon_1$ получим неравенство

$$\|E_\delta^* v(x)\|^2_{L_2(S(\tilde{t}))} + \int\limits_{\tilde{S}^-} \left[ (\tilde{J}v)^2 + \sum_{i=2}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v \right) \right] (\tilde{x})\, ds \leq$$

$$\leq c_8(\varepsilon) \left( \|E_\delta^* v(x)\|^2_{L_2(S(\tilde{t}))} + \int\limits_{\tilde{Q}_1} \left[ (\tilde{J}v)^2 + \sum_{i=2}^{n} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v \right) \right] (x)\, dx \right) + \varepsilon_0 c_9 \|v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)}. \tag{28}$$

Из (28) легко следует соотношение

$$\Phi(\tilde{t}) \leq c_{10}(\varepsilon_0) \int\limits_{\tilde{t}}^{t_{\max}} \Phi(t)\, dt + \varepsilon_0 c_{11} \|v\|_{L_2(\tilde{Q}_1)}, \tag{29}$$

где

$$\Phi(\tilde{t}) = \|E_\delta^* v(x)\|^2_{L_2(S(\tilde{t}))} + \|\tilde{J}v\|_{L_2(S(\tilde{t}))} + \sum_{i=2}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v \right\|_{L_2(S(\tilde{t}))}, \quad t_{\max} = \max_{x \in \overline{\Omega}} x_1,$$

с положительной постоянной $c_{10}(\varepsilon_0)$, пропорционально увеличивающейся с уменьшением $\varepsilon_0$. Неравенство (29) можно получить таким же образом для любой подобласти $\tilde{Q}^\tau \subset \tilde{Q}_1 \subset \Omega$, где $\tilde{Q}^\tau = \{x \in \Omega | \ \tilde{t} \le \tau < x_1 < t_{\max}\}$. Таким образом,

$$\Phi(\tau) \le c_{10}(\varepsilon_0) \int\limits_{\tau}^{t_{\max}} \Phi(t)\,dt + \varepsilon_0 c_{11} \|v\|_{L_2(\tilde{Q}^\tau)}, \tag{30}$$

где

$$\Phi(t) = \|E_\delta^* v\|_{L_2(S(\tau))} + \|\tilde{J}v\|_{L_2(S(\tau))} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}v \right\|_{L_2(S(\tau))}.$$

В силу неравенства Гронуолла из (30) следует неравенство

$$\Phi(\tau) \le \varepsilon_0 c_{11} \exp\{c_{10}(\varepsilon_0)(t_{\max} - \tau)\} \|v\|_{L_2(\tilde{Q}_1)},$$

откуда $\|E_\delta^* v\|_{L_2(S(\tau))} \le \varepsilon_0 c_{11} \exp\{c_{10}(\varepsilon_0)(t_{\max} - \tilde{t})\} \|v\|_{L_2(\tilde{Q}_1)}$. В левой части последнего неравенства переходим к верхней грани по $\tau$, где $\tau$ меняется от $\tilde{t}$ до $t_{\max}$. Далее очевидно, что $\|E_\delta^* v\|^2_{L_2(\tilde{Q}_1)} \le (t_{\max} - \tilde{t}) \sup\limits_{\tilde{t} < \tau < t_{\max}} \|E_\delta^* v\|^2_{L_2(S(\tau))}$. Из последних двух неравенств имеем оценку $\|E_\delta^* v\|_{L_2(S(\tau))} \le \varepsilon_0 (t_{\max} - \tilde{t})^{1/2} c_{11} \exp\{c_{10}(\varepsilon_0)(t_{\max} - \tilde{t})\} \|v\|_{L_2(\tilde{Q}_1)}$. За счет выбора $\varepsilon_0$ и $\tilde{t}$ коэффициент оценки в правой части делаем меньшим 1, например 1/2, тогда оценку можно записать в виде $\|E_\delta^* v\|_{L_2(S(\tau))} \le (1/2) \|v\|_{L_2(\tilde{Q}_1)}$. Переходя в левой части последнего неравенства к пределу при $|\delta| = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \to 0$, получим $\|v\|_{L_2(\tilde{Q}_1)} = 0$.

Продолжая этот процесс дальше, за конечное число шагов докажем, что $v = 0$ во всей подобласти $Q_1 \in \Omega$. Двигаясь еще дальше сверху вниз, также за конечное число шагов покажем, что $v = 0$ во всей области $\Omega$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Корзюк В.И.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 6. С. 1014–1022.
2. *Burenkov V.I.* Sobolev Spaces on domains. Stuttgart; Leipzig, 1998.
3. *Thome V.* // Math. Scand. 1955. V. 3. P. 115–123.
4. *Thome V.* // Math. Scand. 1957. V. 5. P. 93–113.
5. *Thome V.* // Math. Scand. 1958. V. 6. № 1. P. 5–32.
6. *Корзюк В.И.* // Вестн. Бел. ун-та. Сер. 1. 1996. № 3. С. 55–71.
7. *Корзюк В.И.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 12. С. 1683–1690.
8. *Корзюк В.И.* // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 2. С. 343–357.
9. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. М., 1980.
10. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.


Институт математики Национальной
академии наук Беларуси, г. Минск

Поступила в редакцию
10.07.2001 г.