ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2005, том 41, № 9, с. 1291–1292

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.977

К ПРОБЛЕМЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2005 г. В. В. Крахотко, Г. П. Размыслович

Рассмотрим систему управления вида

$$A_0\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

с начальным условием $x(0) = x_0$, где $x \in R^n$, $u \in R^r$, A_0, A, B – постоянные матрицы соответствующих размеров, $x_0 \in R^n$, $\det A_0 = 0$.

Пусть для системы (1) выполняется условие совместности [1], тогда ее решение представимо в виде

$$x(t) = e^{A_0^d At}A_0A_0^d q + \int\limits_0^t e^{A_0^d A(t-s)}A_0^d Bu(s)\,ds + (E_n - A_0A_0^d)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(A_0A^d)^iA^dBu^{(i)}(t), \tag{2}$$

$$x(0) = x_0 = A_0A_0^d q + (E_n - A_0A_0^d)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(A_0A^d)^iA^dBu^{(i)}(0), \tag{3}$$

где A_0^d, A^d – обратные матрицы Драйзина матрицам A_0, A соответственно, k – число-индекс матрицы A_0, $q \in R^n$, $u^{(i)}(0) \in R^r$, $i = \overline{0, k-1}$. Здесь предполагаем, что управление $u(t)$, $t \geq 0$, – достаточно гладкая r-вектор-функция.

В этом случае можно показать, что решение (2) системы (1) есть выход системы

$$\dot{Y} = \hat{A}Y + \hat{B}v, \quad x = CY \tag{4}$$

с начальным условием $Y(0) = Y_0 = (q,\ u^{(i)}(0),\ i = \overline{1,k})$, где $Y = (y, u^1, \ldots, u^k)$, $v = u^{(k)}$, $\hat{A} = (\hat{A}_{pq})$, $\hat{B} = (\hat{B}_{p1})$, $p = \overline{1, k+1}$, $q = \overline{1, k+1}$, – блочные матрицы, причем $\hat{A}_{11} = A_0^dA$, $\hat{A}_{12} = A_0^dB$, $\hat{A}_{23} = \hat{A}_{34} = \ldots = \hat{A}_{k,k+1} = E_r$, $\hat{A}_{ij} = 0$ при всех остальных индексах p, q, $\hat{B}_{k+1,1} = E_r$, $\hat{B}_i = 0$, $i = \overline{1,k}$,

$$C = [A_0A_0^d, (E_n - A_0A_0^d)A^dB, \ldots, (-1)^{k-1}(E_n - A_0A_0^d)(A_0A^d)^{k-1}A^dB].$$

Обозначим $\Omega_0 = \{z \in R^n |\ z = A_0A_0^dq + (E_n - A_0A_0^d)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(A_0A^d)^iA^dBu^{(i)}(0),\ q \in R^n,\ u^{(i)}(0) \in R^r,\ i = \overline{0, k-1}\}$, и пусть H – некоторая постоянная $n \times n$-матрица.

Определение 1. Систему (1) назовем H-управляемой, если для любого $x_0 \in \Omega_0$ существуют момент времени t_1, $t_1 < +\infty$, и гладкое управление $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, такие, что $x(0) = x_0$, $Hx(t_1) = 0$.

Определение 2. Систему (1) назовем полностью H-управляемой, если для любого $x_0 \in \Omega_0$ существуют момент времени t_1, $t_1 < +\infty$, и гладкое управление $u(t)$, $t \geq 0$, такие, что решение $x(t)$, $t \geq 0$, системы (1) обладает свойствами $x(0) = x_0$, $Hx(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Для H-управляемости системы (1) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\operatorname{rank}(HA_0A_0^d, (-1)^jH(E_n - A_0A_0^d)(A_0A^d)^jA^dB,\ j = \overline{0, k-1};\ H(A_0^dA)^iA_0^dB,\ i = \overline{0, n-1}) =$$

$$= \operatorname{rank}((-1)^jH(E_n - A_0A_0^d)(A_0A^d)^jA^dB,\ j = \overline{0, k-1};\ H(A_0^dA)^iA_0^dB,\ i = \overline{0, n-1}).$$

Теорема 2. *Система (1) полностью H-управляема тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\operatorname{rank}(L, \bar{H}(A_0^dA)^iA_0^dB,\ i = \overline{0, k-1}) = \operatorname{rank}(L, \bar{H}),$$

где

$$L = \begin{bmatrix} H_1 & \ldots & H_k \\ HA_0^dB & \ldots & H_{k-1} \\ H(A_0^dA)B & \ldots & H_{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ H(A_0^dA)^{n+k-2}A_0^dB & \ldots & H(A_0^dA)^{n-1}A_0^dB \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} HA_0^dA_0 \\ HA_0^dA \\ H(A_0^dA)^2 \\ \ldots \\ H(A_0^dA)^{n+k-1} \end{bmatrix},$$

$$H_{j+1} = (-1)^j H(E_n - A_0A_0^d)(A_0A^d)^j A^dB, \quad j = \overline{0, k-1}.$$

Доказательства теорем 1, 2 непосредственно следуют из представления системы (1) в виде (4) с использованием результатов работы [2].

Рассмотрим системы (1), (4). Введем следующие соответствия:

$$x(t) \to X_t; \quad u(t) \to U_t; \quad y(t) \to Y_t; \quad u^i(t) \to U_t^i; \quad p \to \Delta, \tag{5}$$

где X_t, Y_t, U_t, U_t^i – матрицы размерностей $n \times r$; $r \times r$; $p \equiv d/dt$ – оператор дифференцирования, Δ – оператор сдвига ($\Delta^i X_t = X_{t+i}$; $\Delta^i U_t = U_{t+i}$; $\Delta^i U_t^j = U_{t+i}^j$).

Согласно уравнению (4), с помощью соответствий (5) перейдем к рекуррентным соотношениям вида

$$\begin{gathered} Y_{t+1} = A_0^dAY_t + A_0^dBU_t^1, \quad U_{t+1}^i = U_t^{i+1}, \quad i = \overline{1, k-1}, \\ U_{t+1}^k = U_{t+k}, \quad X_t = C[Y_t, U_t^1, \ldots, U_t^k], \quad t \geq 0, \end{gathered} \tag{6}$$

при условии, что $Y_t \equiv 0$, $t = \overline{0, k-1}$, $U_t \equiv 0$, $t \neq k$, $U_k = E_r$. Соотношения (6) назовем определяющими уравнениями для системы управления (1). Обозначим через X_t^* решение определяющих уравнений (6), если $Y_1 = E_n$, $U_t \equiv 0$, $t \geq 0$. Тогда теоремы 1, 2 можно сформулировать в терминах решений определяющих уравнений.

Теорема 1′. *Система (1) H-управляема тогда и только тогда, когда выполняется равенство* $\operatorname{rank}(HX_1^*,\ HX_i,\ i = \overline{1, n+k}) = \operatorname{rank}(HX_i,\ i = \overline{1, n+k})$.

Теорема 2′. *Для полной H-управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $\operatorname{rank}(L,\ \bar{H}X_i,\ i = \overline{k+1, n+k}) = \operatorname{rank}(L, \bar{H})$, *где*

$$L = \begin{bmatrix} HX_k & \ldots & HX_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ HX_{n+2k-1} & \ldots & HX_{n+k} \end{bmatrix}, \quad \bar{H} = \begin{bmatrix} HX_1^* \\ \ldots \\ HX_{n+k}^* \end{bmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Campbell S.L., Meyer C.D., Rose N.J.* // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 31. № 3. P. 411–425.
2. *Крахотко В.В., Размыслович Г.П.* // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 9. С. 1707–1709.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
17.03.2005 г.