

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968 : 517.983

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВАРИАЦИОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2006 г. Ю. В. Романовский, Л. А. Янович

1. Введение. Рассматриваемые в настоящей работе интегро-дифференциальные уравнения порождаются случайными линейными интегральными уравнениями второго рода с частными интегралами вида

$$x(t_1, t_2; \omega) + \int_{T_1} K_1(t_1, t_2, s_1; \omega)x(s_1, t_2; \omega) ds_1 + \int_{T_2} K_2(t_1, t_2, s_2; \omega)x(t_1, s_2; \omega) ds_2 + \int_{T_3} K_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2; \omega)x(s_1, s_2; \omega) ds_1 ds_2 = y(t_1, t_2; \omega), \quad (1)$$

где $t_\nu, s_\nu \in T_\nu \subseteq \mathbb{R}$ ($\nu = 1, 2$), $T_3 = T_1 \times T_2$; ω – случайный параметр (в дальнейшем он иногда будет опускаться), свойства которого определяются вероятностным пространством $\{\Omega, \Sigma, P\}$, а искомая функция $x(t_1, t_2; \omega)$ и правая часть $y(t_1, t_2; \omega)$ уравнения (1) принадлежат пространству $L_2(T_3 \times \Omega)$; ядра $K_1(t_1, t_2, s_1; \omega)$, $K_2(t_1, t_2, s_2; \omega)$ и $K_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2; \omega)$ – заданные случайные функции соответственно из пространств $L_2(T_3 \times T_1 \times \Omega)$, $L_2(T_3 \times T_2 \times \Omega)$, $L_2(T_3 \times T_3 \times \Omega)$.

В зависимости от структуры ядер $K_1(t_1, t_2, s_1)$, $K_2(t_1, t_2, s_2)$ и $K_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2)$ интегральное уравнение (1) относится к фредгольмову, вольтеррову или вольтерро-фредгольмову типу.

Разрешимость неслучайных линейных уравнений (1), а также нелинейных интегральных уравнений такого вида в пространствах непрерывных, интегрируемых на T_3 функций и в некоторых других классах функций, как и свойства соответствующих операторов, исследованы в монографиях [1–3].

В пространстве непрерывных функций для детерминированных уравнений (1) фредгольмова вида с непрерывными в целом и интегрально ограниченными ядрами условия разрешимости получены в [4], а для уравнений вольтеррова типа с частными интегралами – в [5].

Основы теории детерминированных уравнений вида (1), когда в левой части два последних интегральных слагаемых отсутствуют, а искомая функция $x(s_1, t_2; \omega)$, стоящая под знаком первого интеграла, заменена на $x(s_1, t_1; \omega)$, были разработаны ранее В.И. Романовским [6]. Такой класс уравнений принято называть интегральными уравнениями В.И. Романовского. Позже теория этих уравнений получила развитие в работах других авторов.

При решении стохастических уравнений, как правило, не ставится задача о построении точного или приближенного решения в явном виде, а требуется в силу практической необходимости находить только некоторых его характеристик, например, первого или высших моментов искомого решения.

Одним из подходов нахождения вероятностных характеристик решений случайных уравнений является построение соответствующих детерминированных уравнений с последующим точным или приближенным решением этих уравнений, из которых могут быть определены, в частности, и искомые характеристики.

Эта идея лежит в основе данной работы применительно к уравнению (1). Здесь в качестве такого вспомогательного детерминированного уравнения будет построено интегро-дифференциальное уравнение с частными вариационными производными. Аналогичный подход рассматривался в работе [7] для случайных обычного вида линейных интегральных уравнений и

интегральных уравнений со степенной нелинейностью, а также в [8, 9] в задаче о нахождении моментов решения линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами. В последнем случае такими детерминированными уравнениями являются дифференциальные уравнения с вариационными производными.

Наряду с (1) далее будет рассматриваться усредненное уравнение вида

$$\begin{aligned} \langle x(t_1, t_2) \rangle + \int_{T_1} \langle K_1(t_1, t_2, s_1)x(s_1, t_2) \rangle ds_1 + \int_{T_2} \langle K_2(t_1, t_2, s_2)x(t_1, s_2) \rangle ds_2 + \\ + \int_{T_3} \langle K_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2)x(s_1, s_2) \rangle ds_1 ds_2 = \langle y(t_1, t_2) \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где под усреднением (математическим ожиданием) случайной величины $\xi = \xi(\omega)$ на вероятностном пространстве $\{\Omega, \Sigma, P\}$ понимают, как обычно, число $\langle \xi \rangle = \int_{\Omega} \xi(\omega) dP(\omega)$.

2. Построение интегро-дифференциального уравнения. Введем обозначение

$$\begin{aligned} \Phi(u_1, u_2, u_{12}; \omega) = \exp \left(i \sum_{j=1}^2 \int_{T_3 \times T_j} K_j(\tau_1, \tau_2, \sigma_j; \omega) u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_j) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_j + \right. \\ \left. + i \int_{T_3 \times T_3} K_{12}(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2; \omega) u_{12}(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где детерминированный вектор

$$U(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) = (u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1), u_2(\tau_1, \tau_2, \sigma_2), u_{12}(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2))$$

такой, что интегралы в (3) существуют для почти всех ω относительно вероятностной меры P ($\tau_\nu, \sigma_\nu \in T_\nu, \nu = 1, 2$), $i = \sqrt{-1}$. Функция $\Phi(u_1, u_2, u_{12}) = \Phi(u_1, u_2, u_{12}; \omega)$ для каждого фиксированного вектора $U = U(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2)$ зависит только от случайной переменной $\omega \in \Omega$.

После умножения равенства (1) на функцию $\Phi(U) = \Phi(u_1, u_2, u_{12})$, усреднения по параметру ω и применения теоремы Фубини о перемене порядка интегрирования в интеграле Лебега придем к равенству

$$\begin{aligned} F(U; t_1, t_2) + \int_{T_1} \langle \Phi(U) K_1(t_1, t_2, s_1)x(s_1, t_2) \rangle ds_1 + \int_{T_2} \langle \Phi(U) K_2(t_1, t_2, s_2)x(t_1, s_2) \rangle ds_2 + \\ + \int_{T_3} \langle \Phi(U) K_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2)x(s_1, s_2) \rangle ds_1 ds_2 = F_0(U; t_1, t_2), \end{aligned} \quad (4)$$

где $F(U; t_1, t_2) = \langle \Phi(u_1, u_2, u_{12})x(t_1, t_2) \rangle$, а правая часть $F_0(U; t_1, t_2)$ этого уравнения задается формулой $F_0(U; t_1, t_2) = \langle \Phi(u_1, u_2, u_{12})y(t_1, t_2) \rangle$. Здесь $F(U; t_1, t_2)$, $F_0(U; t_1, t_2)$, а также входящие в равенство (4) интегралы являются детерминированными функциями переменных t_1 и t_2 .

Равенство (4) может быть записано в виде следующего интегро-дифференциального уравнения в частных вариационных производных:

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2) - i \int_{T_1} \frac{\delta F(u_1, u_2, u_{12}; s_1, t_2)}{\delta u_1(t_1, t_2; s_1)} ds_1 - i \int_{T_2} \frac{\delta F(u_1, u_2, u_{12}; t_1, s_2)}{\delta u_2(t_1, t_2; s_2)} ds_2 - \\ - i \int_{T_3} \frac{\delta F(u_1, u_2, u_{12}; s_1, s_2)}{\delta u_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2)} ds_1 ds_2 = F_0(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2). \end{aligned} \quad (5)$$

Заметим, что

$$\int_{T_1} \langle \Phi(U) K_1(t_1, t_2, s_1) x(s_1, t_2) \rangle ds_1 = -i \int_{T_1} \frac{\delta F(u_1, u_2, u_{12}; s_1, t_2)}{\delta u_1(t_1, t_2, s_1)} ds_1,$$

где функция, стоящая под знаком интеграла в правой части этого равенства (так же как и в равенстве (5)), является частной вариационной производной [10, 11] функционала $F(u_1, u_2, u_{12}; s_1, t_2)$ по $u_1(t_1, t_2, s_1)$ в точке (t_1, t_2, s_1) .

Действительно, справедливо равенство

$$\frac{\delta F(u_1, u_2, u_{12}; s_1, t_2)}{u_1(t_1, t_2, s_1)} = \left\langle \frac{\delta \Phi(u_1, u_2, u_{12})}{\delta u_1(t_1, t_2, s_1)} x(s_1, t_2) \right\rangle,$$

а так как по определению

$$\delta \Phi[u_1, u_2, u_{12}; h] = \int_{T_3 \times T_1} \frac{\delta \Phi(u_1, u_2, u_{12})}{\delta u_1(t_1, t_2, s_1)} h_1(t_1, t_2, s_1) dt_1 dt_2 ds_1,$$

где $\delta \Phi[u_1, u_2, u_{12}; h_1]$ – частный дифференциал Гато оператора $\Phi[u_1, u_2, u_{12}]$ по u_1 в направлении $h_1 = h_1(t_1, t_2, s_1)$, то в силу равенства

$$\delta \Phi[u_1, u_2, u_{12}; h] = i \Phi(u_1, u_2, u_{12}) \int_{T_3 \times T_1} K_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1; \omega) h_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1$$

имеем $\delta \Phi[u_1, u_2, u_{12}; h] / \delta u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) = i \Phi(u_1, u_2, u_{12}) K_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1; \omega)$. Отсюда получаем требуемое соотношение. Аналогичные соотношения имеют место соответственно и для двух других интегралов в равенствах (4) и (5).

Для частного случая интегро-дифференциального уравнения (5), когда искомым функционал зависит только от $u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1)$, данное уравнение примет вид

$$F(u_1; t_1, t_2) - i \int_{T_1} \frac{\delta F(u_1; s_1, t_2)}{\delta u_1(t_1, t_2, s_1)} ds_1 = F_0(u_1; t_1, t_2), \quad (6)$$

причем здесь $F_0(u_1; t_1, t_2) = \langle \Phi(u_1; \omega) y(t_1, t_2; \omega) \rangle$, где

$$\Phi(u_1; \omega) = \exp \left(i \int_{T_3 \times T_1} K_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1; \omega) u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 \right).$$

Оно соответствует интегральному уравнению (1), когда выполняются тождественные равенства $K_2(t_1, t_2, s_2) \equiv K_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2) \equiv 0$.

3. Решение интегро-дифференциальных уравнений. Если бы усредненные выражения, стоящие под знаком интегралов в равенстве (2), можно было представить в виде

$$\langle K_1(t_1, t_2, s_1) x(s_1, t_2) \rangle = \langle K_1(t_1, t_2, s_1) \rangle \langle x(s_1, t_2) \rangle + \alpha(t_1, t_2, s_1),$$

$$\langle K_2(t_1, t_2, s_2) x(t_1, s_2) \rangle = \langle K_2(t_1, t_2, s_2) \rangle \langle x(t_1, s_2) \rangle + \beta(t_1, t_2, s_2),$$

$$\langle K_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2) x(s_1, s_2) \rangle = \langle K_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2) \rangle \langle x(s_1, s_2) \rangle + \gamma(t_1, t_2, s_1, s_2),$$

где $\alpha(t_1, t_2, s_1)$, $\beta(t_1, t_2, s_2)$ и $\gamma(t_1, t_2, s_1, s_2)$ – некоторые детерминированные функции, то нахождение математического ожидания решения уравнения (1) свелось бы к решению детерминированного уравнения этого же вида. Однако такое расщепление произведения случайных функций эффективно осуществить удастся в немногих случаях.

Между математическим ожиданием решения $x(t_1, t_2; \omega)$ случайного интегрального уравнения (1) и решением детерминированного интегро-дифференциального уравнения (5) имеется определенная взаимосвязь, позволяющая в некоторых случаях эффективно использовать ее при нахождении средних значений решений уравнения (1).

Теорема 1. Пусть уравнение (1) разрешимо для почти всех относительно вероятностной меры P значений ω и $x_*(t_1, t_2) = x_*(t_1, t_2; \omega)$ – некоторое его решение. Тогда

$$F_*(U; t_1, t_2) = \langle \Phi(U)x_*(t_1, t_2) \rangle$$

будет решением уравнения (5), причем $\langle x_*(t_1, t_2) \rangle = F_*(0; t_1, t_2)$.

Доказательство. Подставим решение $x_*(t_1, t_2)$ в уравнение (1), затем полученное тождество умножим на $\Phi(u_1, u_2, u_{12}; \omega)$ и выполним операцию математического ожидания. После этого придем к равенству (2), которое, как уже было показано, совпадает с (5).

Таким образом, если уравнение (1) имеет решение, то уравнение (5) разрешимо, причем среди решений последнего существует такое, по которому можно восстановить математическое ожидание решения исходного уравнения (1).

Рассмотрим уравнение

$$F(u_1, u_2, u_{12}) - i \sum_{j=1}^2 \int_{T_j} \frac{\delta F(u_1, u_2, u_{12})}{\delta u_j(t_1, t_2, s_j)} ds_j - i \int_{T_3} \frac{\delta F(u_1, u_2, u_{12})}{\delta u_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2)} ds_1 ds_2 = \lambda F(u_1, u_2, u_{12}), \quad (7)$$

где λ – некоторый числовой параметр. Перепишем уравнение (7) в операторном виде

$$LF(u_1, u_2, u_{12}) = \lambda F(u_1, u_2, u_{12}). \quad (8)$$

Искомый функционал $F(u_1, u_2, u_{12})$ здесь, как и ранее, при заданных u_1, u_2 и u_{12} является функцией переменных t_1 и t_2 .

Пусть $g_1(t_1, t_2, s_1)$, $g_2(t_1, t_2, s_2)$ и $g_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2)$ – функции такие, что интегралы

$$c_\nu(t_1, t_2) = \int_{T_\nu} g_\nu(t_1, t_2, s_\nu) ds_\nu \quad (\nu = 1, 2), \quad c_{12}(t_1, t_2) = \int_{T_3} g_{12}(t_1, t_2, s_1, s_2) ds_1 ds_2$$

не обращаются в нуль на T_3 .

Через $G(u_1, u_2, u_{12}; \lambda) = G(u_1, u_2, u_{12}; \lambda; t_1, t_2)$ обозначим выражение

$$G(u_1, u_2, u_{12}; \lambda) = \sum_{j=1}^2 q_j \exp\left(\frac{i(\lambda - 1)}{c_j(t_1, t_2)} \int_{T_3 \times T_j} g_j(\tau_1, \tau_2, \sigma_j) u_j(\tau_1, \tau_2, \sigma_j) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_j\right) + q_3 \exp\left(\frac{i(\lambda - 1)}{c_{12}(t_1, t_2)} \int_{T_3 \times T_3} g_{12}(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) u_{12}(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2\right), \quad (9)$$

где q_1, q_2 и q_{12} – произвольно фиксированные числа или некоторые заданные функции.

Так как

$$\frac{\delta G(u_1, u_2, u_{12}; \lambda)}{\delta u_1(t_1, t_2, s_1)} = q_1 \frac{i(\lambda - 1)}{c_1(t_1, t_2)} \exp\left(\frac{i(\lambda - 1)}{c_1(t_1, t_2)} \int_{T_3 \times T_1} g_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1\right) g_1(t_1, t_2, s_1),$$

имеют место равенства

$$-i \int_{T_1} \frac{\delta G(u_1, u_2, u_{12}; \lambda)}{\delta u_1(t_1, t_2, s_1)} ds_1 = q_1 (\lambda - 1) \exp\left(\frac{i(\lambda - 1)}{c_1(t_1, t_2)} \int_{T_3 \times T_1} g_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1\right).$$

Аналогичные равенства справедливы и для двух других слагаемых уравнения (9). Из приведенных рассуждений вытекает, что функция $F(u_1, u_2, u_{12}) = G(u_1, u_2, u_{12}; \lambda)$ является решением уравнения (7) или, что то же самое, уравнения (8).

Итак, справедлива следующая

Теорема 2. *Всякое число λ является собственным значением оператора L . Соответствующее собственное подпространство является бесконечномерным и включает в себя функции вида (9).*

Выражение, стоящее слева в уравнении (5), задает интегро-дифференциальный оператор на рассматриваемом множестве функций $F(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2)$. Этот оператор обозначим через A и уравнение (5) перепишем соответственно в виде

$$AF(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2) = F_0(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2). \quad (10)$$

Приведем ниже теорему, касающуюся непосредственно существования решения уравнения (5). Рассмотрим множество функционалов $\mathcal{F} = \{F \equiv F(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2)\}$, задаваемых соотношением

$$\mathcal{F} = \{F : \|(I - A)^n F\|_{L_2(T_3)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\},$$

где I – тождественный оператор.

Множество \mathcal{F} , как показывают приведенные примеры, содержит нетривиальные функции.

Теорема 3. *Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n F_0$ сходится в пространстве $L_2(T_3)$. Тогда уравнение (5) имеет на множестве \mathcal{F} единственное решение*

$$F_* = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n F_0. \quad (11)$$

Доказательство проводится по общей схеме (см., например, [12]), как и в случае разрешимости линейных уравнений в общих нормированных пространствах. С учетом равенства (11) имеем

$$AF_* = (I + (A - I))F_* = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A)^n F_0 - \sum_{n=1}^{\infty} (I - A)^n F_0 = F_0,$$

а так как $\|(I - A)^n F_*\| = \|\sum_{p=n}^{\infty} (I - A)^p F_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ в силу сходимости ряда (11), то $F_* \in \mathcal{F}$.

Если F_1^* и F_2^* принадлежат \mathcal{F} и являются решениями уравнения (5), то $A(F_1^* - F_2^*) = 0$ и $\tilde{F}_* = F_1^* - F_2^* \in \mathcal{F}$. Поскольку $\tilde{F}_* = (I - A)\tilde{F}_*$, то $\tilde{F}_* = (I - A)^n \tilde{F}_*$ для любого натурального n . Отсюда получаем $\|\tilde{F}_*\| = \|(I - A)^n \tilde{F}_*\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Следовательно, $\tilde{F}_* = 0$, т.е. в классе \mathcal{F} имеет место однозначная разрешимость уравнения (5).

4. Примеры. Рассмотрим далее три имеющих иллюстративный характер примера уравнения вида (1) и приведем явные формулы для решений уравнений вида (5), соответствующих этим примерам.

Пример 1. Пусть ω – случайный параметр с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} x(t_1, t_2; \omega) + \int_0^1 (t_1 + t_2) s_1 \omega x(s_1, t_2; \omega) ds_1 + \int_0^1 (t_1 - t_2) s_2 \omega x(t_1, s_2; \omega) ds_2 - \\ - 2 \int_0^1 \int_0^1 t_1 s_1 s_2 \omega x(s_1, s_2; \omega) ds_1 ds_2 = t_1 t_2 + \left[1 + \frac{1}{3}(t_1^2 + t_2^2) - \frac{2}{9} t_1 \right] \omega + \frac{t_1}{2} \omega^2, \end{aligned}$$

решение которого $x(t_1, t_2; \omega) = t_1 t_2 + \omega$ и соответственно $\langle x(t_1, t_2; \omega) \rangle = t_1 t_2 + 1/2$.

Функционал $\Phi(u_1, u_2, u_{12}) = \Phi(u_1, u_2, u_{12}; \omega)$ в данном случае задается формулой

$$\Phi(u_1, u_2, u_{12}; \omega) = \exp\{i\omega a(u_1, u_2, u_{12})\},$$

где

$$a(u_1, u_2, u_{12}) = \int_{T^3} (\tau_1 + \tau_2) \sigma_1 u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 + \int_{T^3} (\tau_1 - \tau_2) \sigma_2 u_2(\tau_1, \tau_2, \sigma_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_2 - 2 \int_{T^4} \tau_1 \sigma_1 \sigma_2 u_{12}(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2, \quad T = [0, 1].$$

Введя обозначения

$$I_k(u_1, u_2, u_{12}) = \int_T \exp\{i\omega a(u_1, u_2, u_{12})\} \omega^k d\omega, \quad k = 0, 1, 2,$$

запишем правую часть уравнения (5) в виде

$$F_0(u_1, u_2, u_{12}, t_1, t_2) = \left\langle \exp\{i\omega a(u_1, u_2, u_{12})\} \left[t_1 t_2 + \left[1 + \frac{1}{3}(t_1^2 + t_2^2) - \frac{2}{9} t_1 \right] \omega + \frac{t_1}{2} \omega^2 \right] \right\rangle = t_1 t_2 I_0(u_1, u_2, u_{12}) + \left[1 + \frac{1}{3}(t_1^2 + t_2^2) - \frac{2}{9} t_1 \right] I_1(u_1, u_2, u_{12}) + \frac{t_1}{2} I_2(u_1, u_2, u_{12}),$$

при которой это уравнение будет иметь решение

$$F(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2) = t_1 t_2 I_0(u_1, u_2, u_{12}) + I_1(u_1, u_2, u_{12}).$$

В этом можно убедиться подстановкой функции $F(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2)$ в уравнение (5). Отсюда имеем $F(0, 0, 0; t_1, t_2) = \langle x(t_1, t_2; \omega) \rangle = t_1 t_2 + 1/2$.

Пример 2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t_1, t_2; \omega) + \int_T (t_1^2 \omega + t_2^3) x(s_1, t_2; \omega) ds_1 = t_1^2 t_2 \omega^5 + t_2(1 + t_2^3) \omega^4 + \frac{1}{2} t_1^2 \omega + \frac{1}{2} t_2^3 + t_1,$$

решением которого является функция $x(t_1, t_2; \omega) = t_1 + t_2 \omega^4$; здесь ω – случайный параметр со стандартным нормальным распределением.

Положим

$$J_k(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} + i x a_2(u_1)\right\} x^k dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

где $a_2(u_1) = \int_{T^3} \tau_1^2 u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1$.

В этом случае правая часть $F_0(u_1; t_1, t_2)$ уравнения (6) может быть записана в виде

$$F_0(u_1; t_1, t_2) = \exp\{i a_1(u_1)\} \left[t_1^2 t_2 J_5(u_1) + t_2(1 + t_2^3) J_4(u_1) + \frac{1}{2} t_1^2 J_1(u_1) + \left(\frac{1}{2} t_2^3 + t_1\right) J_0(u_1) \right],$$

где $a_1(u_1) = \int_{T^3} \tau_2^3 u_1(\tau_1, \tau_2, \sigma_1) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1$.

Решение уравнения (6) с такой правой частью задается формулой

$$F(u_1; t_1, t_2) = \exp\{i a_1(u_1)\} [t_1 J_0(u_1) + t_2 J_4(u_1)]$$

и соответственно $\langle x(t_1, t_2; \omega) \rangle = F(0; t_1, t_2) = t_1 + 3t_2$.

Пример 3. Пусть в уравнении

$$x(t_1, t_2; \omega) - \int_T x(s_1, t_2; \omega) ds_1 - \int_T x(t_1, s_2; \omega) ds_2 - \int_{T^2} x(s_1, s_2; \omega) ds_1 ds_2 = -2 \sin \omega$$

случайный параметр ω равномерно распределен на отрезке $[0, 1]$.

Решением этого уравнения являются следующие функции:

$$x_1(t_1, t_2; \omega) = \sin \omega, \quad x_2(t_1, t_2; \omega) = \begin{cases} 2 \sin \omega, & 0 \leq t_2 \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 < t_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_3(t_1, t_2; \omega) = \begin{cases} -(1/q)(\alpha - t_2)^{-1/2} \sin \omega, & 0 \leq t_2 < \alpha, \\ 0, & t_2 = \alpha, \\ (1/q)(t_2 - \alpha)^{-1/2} \sin \omega, & \alpha < t_2 \leq 1, \end{cases}$$

где $0 < \alpha < 1$, $\alpha \neq 1/2$, $q = 2(\sqrt{1 - \alpha} + \sqrt{\alpha})$.

Для данного примера функционал

$$\Phi(u_1, u_2, u_{12}) = \exp \left\{ -i \int_{T^3} \sum_{j=1}^2 u_j(\tau_1, \tau_2, \sigma_j) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_j - i \int_{T^4} u_{12}(\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \sigma_2) d\tau_1 d\tau_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \right\}$$

не зависит от ω , а правая часть уравнения (5) задается равенством $F_0(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2) = 2\Phi(u_1, u_2, u_{12})(\cos 1 - 1)$.

С этой правой частью уравнение (5) имеет, в частности, следующие три решения:

$$F_1(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2) = \Phi(u_1, u_2, u_{12})(1 - \cos 1),$$

$$F_2(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2) = \begin{cases} 2\Phi(u_1, u_2, u_{12})(1 - \cos 1), & 0 \leq t_2 \leq 1/2, \\ 0, & 1/2 < t_2 \leq 1, \end{cases}$$

$$F_3(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2) = \begin{cases} -\frac{\Phi(u_1, u_2, u_{12})}{q}(\alpha - t_2)^{-1/2}(1 - \cos 1), & 0 \leq t_2 < \alpha, \\ 0, & t_2 = \alpha, \\ \frac{\Phi(u_1, u_2, u_{12})}{q}(t_2 - \alpha)^{-1/2}(1 - \cos 1), & \alpha \leq t_2 < 1. \end{cases}$$

Непосредственной подстановкой $F_\nu(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2)$ ($\nu = 1, 2, 3$) в уравнение (5) можно убедиться в том, что эти функционалы являются решением данного уравнения с правой частью $F_0(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2) = 2\Phi(u_1, u_2, u_{12})(\cos 1 - 1)$. Математические ожидания приведенных выше решений этого интегрального уравнения соответственно будут $\langle x_\nu(t_1, t_2; \omega) \rangle = F_\nu(0, 0, 0; t_1, t_2)$ ($\nu = 1, 2, 3$).

При исследовании задачи единственности разрешимости уравнения (5) следует заранее оговаривать класс операторов $F(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2)$, в котором будет рассматриваться существование такого решения. В примере 3 при каждом фиксированном векторе (u_1, u_2, u_{12}) одно решение $F_1(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2)$ непрерывно (оно не зависит от t_1 и t_2), а два других решения $F_2(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2)$ и $F_3(u_1, u_2, u_{12}; t_1, t_2)$ являются функциями только переменной t_2 и имеют соответственно разрывы первого и второго рода.

Получение точных решений как интегральных уравнений (1), так и интегро-дифференциальных уравнений (5) возможно в незначительном числе случаев. Основными методами их решения являются приближенные, которые в данной работе не рассматриваются.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф04Р-003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж, 2000.
2. *Appel J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York, 2000.
3. *Калитвин А.С.* Нелинейные операторы с частными интегралами. Липецк, 2002.
4. *Забрейко П.П., Калитвин А.С., Фролова Е.В.* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 538–546.
5. *Калитвин А.С., Фролова Е.В.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Минск, 2001. Т. 9. С. 68–72.
6. *Романовский В.И.* Избранные труды. Т. 2. Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент, 1964.
7. *Дорошко В.В., Янович Л.А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. Минск, 2000. Т. 6. С. 83–87.
8. *Задорожний В.Г.* // Мат. физика и нелинейная механика. 1988. Вып. 9 (43). С. 9–13.
9. *Задорожний В.Г., Строева Л.Н.* // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 3. С. 377–385.
10. *Авербух В.И., Смолянов О.Г.* // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22. Вып. 6. С. 201–260.
11. *Авербух В.И., Смолянов О.Г.* // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. Вып. 4. С. 67–116.
12. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию
21.11.2005 г.