ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 8, с. 1017–1026

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.7

О НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

© 2006 г. В. И. Громак

1. Введение. Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения (см., например, [1–18]). Уравнения Пенлеве первоначально были получены из классификации Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка без подвижных критических точек [1] (свойство Пенлеве). В настоящее время они имеют широкие приложения в теории изомонодромной деформации линейных систем [13, 14], теории абелевых интегралов и алгебраической геометрии [19], теории случайных матриц, а также они нашли различные физические приложения (см., например, [2, 6, 8, 13–17]). Задача определения условий наличия свойства Пенлеве может рассматриваться и для ОДУ высших порядков, однако еще нет полной классификации таких уравнений. Уравнения Пенлеве и ОДУ высших порядков Пенлеве-типа естественно возникают из симметрийных редукций интегрируемых нелинейных уравнений с частными производными (УЧП), что, в частности, явилось одной из причин возобновления интереса к уравнениям Пенлеве-типа и появлению гипотезы Абловица и др. [17], согласно которой все симметрийные редукции интегрируемых УЧП есть ОДУ Пенлеве-типа.

2. Иерархии ОДУ со свойством Пенлеве. Иерархия Кортевега–де Фриза (КдФ) может быть записана [7, 8] в виде

$$u_t + \partial_x \mathcal{L}_{n+1}[u] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где последовательность $\mathcal{L}_n$ удовлетворяет рекурсивному соотношению Ленарда

$$\partial_x \mathcal{L}_{n+1} = (\partial_x^3 + 4u\,\partial_x + 2u_x)\mathcal{L}_n, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Начиная с $\mathcal{L}_1[u] = u$, последующие три члена имеют вид

$$\mathcal{L}_2[u] = u_{xx} + 3u^2, \quad \mathcal{L}_3[u] = u_{4x} + 10uu_{xx} + 5u_x^2 + 10u^3,$$

$$\mathcal{L}_4[u] = u_{6x} + 14u(5u_x^2 + u_{4x}) + 28u_x u_{3x} + 21u_{xx}^2 + 70u^2 u_{xx} + 35u^4.$$

Иерархия модифицированного уравнения КдФ ($_m$КдФ) получается из иерархии КдФ преобразованием Миуры $u = v_x - v^2$ и может быть записана следующим образом:

$$v_t + \partial_x(\partial_x + 2v)\mathcal{L}_{n+1}[v_x - v^2] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Иерархия второго уравнения Пенлеве получается из иерархии $_m$КдФ редукцией

$$v(x,t) = (\lambda t)^m w(z), \quad z = (\lambda t)^m x, \quad m = -\frac{1}{2n+1}, \quad \lambda = 2n+1,$$

которая дает

$${}_{2n}P_2 \equiv \left(\frac{d}{dz} + 2w\right) L_n[w' - w^2] - zw - \alpha = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

где оператор L_n определяется так же, как и $\mathcal{L}$, с заменой $\partial_x \to d/dz$, $L_1[u] = u$ и α – произвольный параметр.

При $n = 1, 2, 3$ соответственно имеем

$$P_2 \equiv w'' = 2w^3 + zw + \alpha,$$

$$ {}_4P_2 \equiv w^{(4)} = 10w^2w'' + 10w(w')^2 - 6w^5 - zw - \alpha, $$

$$ {}_6P_2 \equiv w^{(6)} = 14w^2w^{(4)} + w(z + 42(w'')^2 + 56w'w^{(3)}) + 70(w')^2w'' - 70w^4w'' - 140w^3(w')^2 + 20w^7 + \alpha. $$

Иерархия первого уравнения также может быть определена с помощью оператора L_n заменой

$$ y(z) = w'(z) - w(z)^2. $$

Тогда

$$ {}_{2n-2}P_1 \equiv L_n[y] - z/2 = 0, \quad n \in \mathbb{N}. $$

При этом

$$ u(x,t) = y(z)(\lambda t)^{2m}, \quad z = x(\lambda t)^m, \quad m = -\frac{1}{2n+1}, \quad \lambda = 2n+1. $$

В работах [21–23] исследованы автомодельные редукции из уравнений Кодри–Додда–Гибона и Каупа–Купершмидта, приводящие к двум иерархиям K_1 и K_2 ОДУ, определяемых соответственно уравнениями

$$ h_n(w) = z, \quad \left(\frac{d}{dz} + w\right)h_n\left(w_z - \frac{1}{2}w^2\right) - zw + \beta = 0, $$

где оператор h_n определяется рекуррентно:

$$ h_0(u) = 1, \quad h_1(u) = u_{zz} + 4u^2, \quad \Theta_2 = D^3 + 2uD + u_z, $$

$$ J_2 = D^3 + 3(uD + Du) + 2(D^2uD^{-1} + D^{-1}uD^2) + 8(u^2D^{-1} + D^{-1}u^2), $$

$$ h_{n+2}(u) = J_2\Theta_2h_n(u), \quad D = d/dz, \quad u = u(z), \quad D^{-1}(\cdot) = \int (\cdot)\, dz. $$

Первые два члена иерархии K_1 и первый член иерархии K_2 соответственно имеют вид

$$ w'' + 4w^2 = z, \tag{1} $$

$$ w^{(4)} + 12ww'' + 6(w')^2 + (32/3)w^3 = z, \tag{2} $$

$$ w^{(4)} + 5w'w'' - 5w^2w'' - 5w(w')^2 - zw + w^5 + \beta = 0. \tag{3} $$

Уравнение (1) есть первое уравнение Пенлеве. Уравнения (2) и (3) могут рассматриваться как высшие аналоги уравнений Пенлеве, так как они не имеют полиномиальных первых интегралов и удовлетворяют необходимым условиям теста Пенлеве для семейств решений с положительными индексами Фукса [21].

В настоящей работе будем изучать некоторые свойства решений уравнений

$$ w^{(4)} = 18ww'' + 9(w')^2 - 24w^3 + \alpha w^2 + \frac{1}{9}\alpha^2 w + \lambda z + \gamma, \tag{4} $$

$$ w^{(4)} = -5w'w'' + 5w^2w'' + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma. \tag{5} $$

Уравнение (2) может быть получено из (4) масштабным преобразованием $w \to -2w/3$, $\lambda = -2/3$, $\alpha = \gamma = 0$, а уравнение (3) получается из (5) при $\alpha = 0$, $\lambda = 1$, $\gamma = \beta$. Уравнения (4) и (5) содержат дополнительные члены, не разрушающие свойства Пенлеве в соответствии с [24]. Уравнение (4) (уравнение F-VI в классификации [24]) в случае $\alpha = \lambda = \gamma = 0$ интегрируется посредством пары эллиптических функций, а в более общем случае $\lambda = 0$ может быть решено через гиперэллиптические функции второго рода. Уравнение (5) (уравнение F-XVIII в классификации [24]) в случае $\lambda = 0$, $\gamma \neq 0$ интегрируется в гиперэллиптических функциях. Если же $\lambda = \gamma = 0$, то уравнение (5) интегрируется в эллиптических функциях. Далее в уравнениях (4), (5) считаем $\lambda \neq 0$.

3. Разложения решений. Если $z = z_0$ – подвижный полюс решения уравнения (4) или (5), т.е. в окрестности точки $z = z_0$

$$w(z) \sim \frac{c_0}{(z-z_0)^p}, \quad p \in N,$$

где p – порядок сингулярности, то для уравнения (4) пара (p, c_0) принимает значения $(2,1)$, $(2,5)$, а для уравнения (5) – значения $(1,-3)$, $(1,-2)$, $(1,1)$, $(1,4)$. При этом для уравнения (4) положительные индексы Фукса равны 3, 4, 8 в случае $(p,c_0) = (2,1)$ и 8, 12 в случае $(2,5)$. Для уравнения (5) положительные индексы Фукса в случае $(p,c_0) = (1,1)$ и $(1,-2)$ равны 2, 3 и 6; в случае $(p,c_0) = (1,-3)$ равны 6, 7, а в случае $(p,c_0) = (1,4)$ положительные индексы Фукса равны 6 и 12.

Таким образом, формальное решение уравнения (4) или (5) в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p}\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \tag{6}$$

причем для уравнения (4) возможны следующие случаи.

1) В случае $(p,c_0) = (2,1)$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{\alpha}{36}, \quad c_4 = \frac{7(1007\alpha^3 - 513216(\gamma + \lambda z_0 - 63c_3^3))}{19576080\alpha},$$

$$c_5 = -\frac{\alpha c_3}{6}, \quad c_7 = \frac{1}{192}(-2\lambda + c_3(\alpha^2 + 144c_4)), \quad \ldots;$$

здесь c_3, c_6, c_8 – произвольные постоянные.

2) В случае $(p,c_0) = (2,5)$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 5\alpha/252, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \alpha^2/2552,$$

$$c_5 = 0, \quad c_6 = \frac{85\alpha^3}{88016544} + \frac{1}{924}(\gamma + z_0\lambda), \quad c_7 = \frac{\lambda}{480}, \quad c_9 = -\frac{\alpha\lambda}{70560}, \quad \ldots;$$

здесь c_8, c_{12} – произвольные постоянные.

Для уравнения (5) разложение (6) имеет следующие коэффициенты:

1) $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = (-\alpha - z_0\lambda)/60$, $c_5 = (\gamma - 3\lambda)/84$, $c_8 = (-\alpha^2 - 2z_0\alpha\lambda - z_0^2\lambda^2)/4800$, $\ldots$, когда $(p,c_0) = (1,-3)$, c_6, c_7 – произвольные постоянные;

2) $c_1 = 0$, $c_4 = (\alpha + z_0\lambda - 35c_2^2)/10$, $c_5 = (-\gamma + 2\lambda - 90c_2c_3)/36$, $\ldots$, когда $(p,c_0) = (1,-2)$, c_2, c_3, c_6 – произвольные постоянные;

3) $c_1 = 0$, $c_4 = (-\alpha - z_0\lambda + 5c_2^2)/20$, $c_5 = (-\gamma - \lambda)/36$, $\ldots$, когда $(p,c_0) = (1,1)$, c_2, c_3, c_6 – произвольные постоянные;

4) $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = (\alpha + z_0\lambda)/220$, $c_5 = (\gamma + 4\lambda)/504$, $c_7 = 0$, $\ldots$, когда $(p,c_0) = (1,4)$, c_6, c_{12} – произвольные постоянные.

Докажем сходимость формального ряда (6) в области $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$. Для этого воспользуемся результатами, касающимися существования голоморфных решений систем дифференциальных уравнений с особыми начальными условиями [6].

Запишем уравнение (4) в виде эквивалентной системы

$$w_1' = w_2, \quad w_2' = w_3, \quad w_3' = w_4, \quad w_4' = 18w_1w_3 + 9w_2^2 - 24w_1^3 + \alpha w_1^2 + \frac{1}{9}\alpha^2 w_1 + \lambda z + \gamma, \tag{7}$$

где $w_1(z) = w(z)$. В (7) положим

$$y_1 = t^2 w_1 - c_0, \quad y_2 = t^3 w_2 + 2c_0, \quad y_3 = t^4 w_3 - 6c_0, \quad y_4 = t^5 w_4 + 24c_0, \quad t = z - z_0. \tag{8}$$

Тогда система (7) примет вид

$$ty' = 2y_1 + y_2, \quad ty_2' = 3y_2 + y_3, \quad ty_3' = 4y_3 + y_4,$$
$$ty_4' = L_0(c_0) + L_1(y_1, y_2, y_3, y_4) + L_2(y_1, y_2, y_3, y_4), \tag{9}$$

где

$$L_0(c_0) = -120c_0 - 144c_0^2 - 24c_0^3,$$
$$L_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1(108c_0 - 72c_0^2) - 36c_0y_2 + 18c_0y_3 + 5y_4,$$
$$L_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = 18y_1y_3 + 9y_2^2 - 24y_1^3 + c_0(-72y_1^2 + t^4\alpha^2/9 + 2t^2y_1\alpha) +$$
$$+ t^4y_1\alpha^2/9 + t^6(\gamma + z\lambda) + t^2\alpha(c_0^2 + y_1^2).$$

Так как $L_0(1) = L_0(5) = 0$ и $L_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \to 0$ при $y_j \to 0$, $t \to 0$, то в этих случаях система (9) является системой Брио–Буке с собственными числами линейной части $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = 8$ в случае $c_0 = 1$ и $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$, $\lambda_4 = 12$ при $c_0 = 5$.

В силу того что среди собственных значений имеются целые положительные и формальное решение существует по теореме А.12 из [6], система (9) имеет трехпараметрическое семейство голоморфных решений в окрестности $t = 0$ со свойством $y_j \to 0$ при $t \to 0$ в случае $c_0 = 1$ и двухпараметрическое семейство решений с таким же свойством в случае $c_0 = 5$, которые в силу замены (8) порождают полярные решения вида (6) с $(p, c_0) = (2, 1)$, $(2, 5)$ уравнения (4).

Уравнение (5) перепишем в виде эквивалентной системы

$$w_1' = w_2, \quad w_2' = w_3, \quad w_3' = w_4, \quad w_4' = -5w_2w_3 + 5w_1^2w_3 + 5w_1w_2^2 - w_1^5 + (\lambda z + \alpha)w_1 + \gamma, \tag{10}$$

где $w_1(z) = w(z)$. В (10) положим

$$y_1 = tw_1 - c_0, \quad y_2 = t^2w_2 + c_0, \quad y_3 = t^3w_3 - 2c_0, \quad y_4 = t^4w_4 + 6c_0, \quad t = z - z_0. \tag{11}$$

Тогда систему (10) перепишем в виде

$$ty' = y_1 + y_2, \quad ty_2' = 2y_2 + y_3, \quad ty_3' = 3y_3 + y_4,$$
$$ty_4' = L_0(c_0) + L_1(y_1, y_2, y_3, y_4) + L_2(y_1, y_2, y_3, y_4), \tag{12}$$

где

$$L_0(c_0) = -c_0(24 - 10c_0 - 15c_0^2 + c_0^4),$$
$$L_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = (-5c_0^4 + 25c_0^2)y_1 - 10(c_0 + c_0^2)y_2 + 5(c_0 + c_0^2)y_3 + 4y_4,$$
$$L_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = -y_1^5 + 5y_1^2y_3 - 5y_2y_3 + t^5\gamma + y_1(5y_2^2 + t^4(\alpha + (t + z_0)\lambda)) +$$
$$+ c_0(10y_1^2 - 5y_1^4 + 5y_2^2 - 10y_1(y_2 - y_3) + t^4(\alpha + (t + z_0)\lambda) - 10c_0y_1^2(c_0y_1).$$

При этом если $c_0 \in \{-3, -2, 1, 4\}$, то $L_0(c_0) = 0$ и $L_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \to 0$ при $y_j \to 0$, $t \to 0$. Таким образом, в этих случаях система (12) является системой Брио–Буке с собственными числами линейной части $\lambda \in \{-2, -1, 6, 7\}$ при $c_0 = -3$; $\lambda \in \{-1, 2, 3, 6\}$ при $c_0 = -2$; $\lambda \in \{-1, 2, 3, 6\}$ при $c_0 = 1$; $\lambda \in \{-7, -1, 6, 12\}$ при $c_0 = 4$.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть $\forall z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда уравнение (4) в случае $c_0 = 1$ имеет трехпараметрическое семейство полярных решений вида (6) и двухпараметрическое семейство решений при $c_0 = 5$. Уравнение (5) имеет трехпараметрическое семейство полярных решений (6) в случаях $c_0 = 1$ и $c_0 = -2$ и двухпараметрическое семейство полярных решений в случаях $c_0 = 4$ и $c_0 = -3$.*

Для решений уравнения (5) в отличие от уравнения (4) бесконечно удаленная точка $z = \infty$ может быть точкой голоморфности с разложением

$$w(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \sum_{j=4}^{\infty} \frac{a_j}{z^j}, \tag{13}$$

где
$$a_1 = -\gamma/\lambda, \quad a_2 = \alpha\gamma/\lambda^2, \quad a_3 = -\alpha^2\gamma/\lambda^3, \quad a_4 = \alpha^3\gamma/\lambda^4, \quad a_5 = -\alpha^4\gamma/\lambda^5,$$
$$a_6 = \gamma(\alpha^5 - \gamma^4 + 15\gamma^2\lambda^2 - 10\gamma\lambda^3 - 24\lambda^4)/\lambda^6, \quad \ldots$$

Заметим также, что уравнение (4) при $z \to \infty$ имеет три асимптотических разложения решений
$$w(z) = \frac{c_{-1}}{\tau} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tau^k, \tag{14}$$
где
$$z = \tau^{-3}, \quad c_{-1} = \sqrt[3]{\lambda/24}, \quad c_0 = \alpha/72, \quad c_1 = \alpha^2/(576c_{-1}),$$
$$c_2 = (13\alpha^3 + 7776\gamma)/(559872c_{-1}^2), \quad c_3 = 0, \quad c_4 = (13\alpha^5 + 7776\alpha^2\gamma)/(322486272c_{-1}^4), \ \ldots$$
в зависимости от выбора одной из трех ветвей c_{-1}.

Уравнение (5) при $z \to \infty$ имеет четыре асимптотических разложения решений вида (14), где $z = \tau^{-4}$, $c_{-1} = \sqrt[4]{\lambda}$, $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, $c_3 = \alpha c_{-1}/(4\lambda)$, $c_4 = \gamma/(14\lambda)$, $c_5 = 0$, $\ldots$ в зависимости от выбора ветви c_{-1}.

4. Гамильтонова структура. Запишем уравнения (4) и (5) в виде эквивалентных гамильтоновых систем. Для уравнения (4) такой является система
$$\begin{gathered} q_1' = q_2, \quad q_2' = 9q_1^2 - p_2, \\ p_1' = -18q_1p_2 + 138q_1^3 + 9q_2^2 + \alpha q_1^2 + \alpha^2 q_1/9 + \lambda z + \gamma, \quad p_2' = -p_1 + 18q_1q_2 \end{gathered} \tag{15}$$
с полиномиальным гамильтонианом
$$H = H(z, q_1, q_2, p_1, p_2) = -\frac{1}{2}p_2^2 + 9q_1^2p_2 - \frac{69}{2}q_1^4 + q_2p_1 - 9q_1q_2^2 - \frac{\alpha}{3}q_1^3 - \frac{1}{18}\alpha^2q_1^2 - (\lambda z + \gamma)q_1.$$

Заметим, что из системы (15) имеем $q_2 = q_1'$, $p_1 = q_1'''$, $p_2 = -q_1'' + 9q_1^2$ и, следовательно, уравнения относительно p_1, p_2, q_2 обладают свойством Пенлеве вместе с уравнением (4). Обозначая $q_1(z) = w(z)$ и $\varepsilon^2 = 1$, запишем уравнение (5) в виде двух эквивалентных гамильтоновых систем
$$\begin{gathered} q_1' = -\frac{3\varepsilon+1}{4}q_1^2 + q_2, \quad q_2' = p_2, \\ p_1' = \frac{3\varepsilon+1}{2}p_1q_1 - \gamma + \frac{1-3\varepsilon}{4}\lambda, \quad p_2' = \frac{9\varepsilon-7}{4}q_2^2 - p_1 + \frac{1-3\varepsilon}{4}(\lambda z + \alpha) \end{gathered} \tag{16}$$
с полиномиальным гамильтонианом
$$H_\varepsilon = H(z, q_1, q_2, p_1, p_2, \varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{7-9\varepsilon}{12}q_2^3 + p_1q_2 - \frac{1+3\varepsilon}{4}p_1q_1^2 + \frac{3\varepsilon-1}{4}q_2(\lambda z + \alpha) + \left(\gamma + \frac{3\varepsilon-1}{2}\lambda\right)q_1.$$

Заметим, что из системы (16) имеем
$$q_2 = q_1' + \frac{1+3\varepsilon}{4}q_1^2, \quad p_1 = \frac{9\varepsilon-7}{4}q_2^2 - q_2'' + \frac{1-3\varepsilon}{4}(\lambda z + \alpha), \quad p_2 = q_2'.$$

Пусть $(q_1(z), q_2(z), p_1(z), p_2(z))$ – решение системы (15) и, следовательно, $q_1(z)$ – решение уравнения (4). Вдоль этого решения определим функцию $h(z) = H(z, q_1(z), q_2(z), p_1(z), p_2(z))$, а также τ-функции
$$\tau_1(z) = \exp\left(\frac{1}{\lambda}\int^z h(t)\,dt\right), \quad \tau_2(z) = \exp\left(\int^z ds \int^s q_1(t)\,dt\right). \tag{17}$$

Аналогично для уравнения (5) определим функции

$$h_\varepsilon(z) = H(z, q_1(z), q_2(z), p_1(z), p_2(z), \varepsilon),$$

$$\tau_\varepsilon(z) = \exp\left(-\frac{2}{\lambda}\int^z h_\varepsilon(t)\,dt\right), \quad \tau(z) = \exp\left(-\int^z ds \int^s q_1^2(t)\,dt\right). \tag{18}$$

Теорема 2. *Для мероморфных решений $q_1(z)$ уравнений (4) и (5) функции $h(z)$, $h_\varepsilon(z)$ также мероморфные, а функции $\tau_j(z)$, $\tau_\varepsilon(z)$ и $\tau(z)$ целые.*

Доказательство. Так как гамильтонианы H, H_ε полиномиальны по всем своим переменным, то особыми точками функций $h(z)$, $h_\varepsilon(z)$ могут быть лишь полюсы мероморфной функции $q_1(z)$. Однако в окрестности подвижного полюса $z = z_0$ функции $q_1(z)$ имеем

$$h(z) = \frac{\lambda c_0}{z - z_0} + (z - z_0)\phi(z), \quad c_0 \in \{1, 5\}.$$

При этом в полюсах $z = z_0$ τ-функции (17) имеют нули кратности c_0^2.

Для уравнения (5) в полюсах $z = z_0$ решения $q_1(z)$ функция $h_\varepsilon(z)$ имеет разложения

$$h_\varepsilon(z) = \frac{c\lambda}{z - z_0} + \phi(z, c_0, \varepsilon), \quad c_0 = \{-3, -2, 1, 4\},$$

где $c = \{-(15 + 9\varepsilon)/4, -3(\varepsilon + 1)/2, -3(1 - \varepsilon)/4, (-9 + 3\varepsilon)\}$, если вычет c_0 принимает соответственно значения $c_0 = \{-3, -2, 1, 4\}$, $\phi(z, c_0, \varepsilon)$ – голоморфная функция в окрестности $z = z_0$. В окрестности полюса $z = z_0$ функция $\tau(z)$ из (18) имеет нуль кратности c_0^2. Из приведенных разложений следует утверждение теоремы 2.

Заметим, что аналогичный результат имеет место для высших аналогов первого и второго уравнений Пенлеве иерархии КдФ [6, 27].

5. Преобразование Беклунда уравнения (5). Перепишем систему (16) в переменных q_1 и p_1:

$$\begin{gathered} p_1 = -q_1^{(3)} - \frac{3\varepsilon + 1}{2} q_1 q_1'' + \frac{3\varepsilon - 9}{4}(q_1')^2 + \frac{5 - 3\varepsilon}{2} q_1^2 q_1' + \frac{3\varepsilon - 1}{4} q_1^4 + \frac{1 - 3\varepsilon}{4}(\lambda z + \alpha), \\ p_1' = \frac{1 + 3\varepsilon}{2} p_1 q_1 - \gamma + \frac{1 - 3\varepsilon}{4}\lambda. \end{gathered} \tag{19}$$

Из системы (19) при $p_1 = 0$ следует, что если $\gamma = \lambda(1 - 3\varepsilon)/4$, $\varepsilon^2 = 1$, то исходное уравнение (5) имеет два трехпараметрических семейства решений, определяемые уравнениями

$$D_\varepsilon(q_1) := -q_1^{(3)} - \frac{3\varepsilon + 1}{2} q_1 q_1'' + \frac{3\varepsilon - 9}{4}(q_1')^2 + \frac{5 - 3\varepsilon}{2} q_1^2 q_1' + \frac{3\varepsilon - 1}{4} q_1^4 + \frac{1 - 3\varepsilon}{4}(\lambda z + \alpha) = 0. \tag{20}$$

Уравнения (20) интегрируются через решения первого уравнения Пенлеве и уравнение Риккати, так как из системы (16) при $p_1 = 0$ находим

$$q_2'' = \frac{9\varepsilon - 7}{4} q_2^2 - \frac{3\varepsilon - 1}{4}(\lambda z + \alpha), \quad q_2 = q_1' + \frac{3\varepsilon + 1}{4} q_1^2.$$

Исключая из системы (20) при $\varepsilon = 1$ переменную q_1 и обозначая $p_1 = v(z)$, $\Theta = 2\gamma + \lambda$, получаем уравнение для определения функции $v(z)$

$$\begin{gathered} v^{(4)} = \frac{1}{256 v^3}(\theta^4 - 512 v^5 - 256 v^4(\alpha + z\lambda) + 784(v')^4 + 80 v\theta^2 v'' + \\ + 576 v^2 (v'')^2 - 8(v')^2(25\theta^2 + 232 v v'') + 768 v^2 v' v^{(3)}). \end{gathered} \tag{21}$$

При этом уравнение (21) имеет свойство Пенлеве вместе с уравнением (5) и интегрируется посредством этого уравнения заменой $v = D_1(w)$. Таким образом, система (19) при $\varepsilon = 1$, $q_1 = w(z)$ и $p_1 = v(z)$ определяет преобразования между решениями уравнений (5) и (21)

$$H: \ w \to v = D_1(w), \quad G: \ v \to w = \frac{v' + \Theta/2}{2v}, \quad v \neq 0.$$

Однако уравнение (21) также имеет тривиальную симметрию

$$S: \ v(z, \Theta) \to \widetilde{v}(z, \widetilde{\Theta}) = v(z, -\Theta),$$

которую можно использовать для построения преобразования Беклунда уравнения (5). Действительно, "новое" решение уравнения (5) $\widetilde{w}(z, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma})$ можно построить по "старому" решению $w(z, \lambda, \alpha, \gamma)$ по схеме

$$w(z, \lambda, \alpha, \gamma) \xrightarrow{H} v(z, \lambda, \alpha, \Theta) \xrightarrow{S} v(z, \lambda, \alpha, -\Theta) \xrightarrow{G} \widetilde{w}(z, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}). \tag{22}$$

При этом в явной форме имеем

$$T_1: \ w \to \widetilde{w} = \frac{\widetilde{v}' + \widetilde{\Theta}/2}{\widetilde{2v}} = \frac{v' - \Theta/2}{2v} = \frac{2vw - \Theta}{2v} = w - \frac{2\gamma + \lambda}{2D_1(w)},$$

где $\widetilde{\lambda} = \lambda$, $\widetilde{\alpha} = \alpha$, $\widetilde{\gamma} = -\gamma - \lambda$.

Рассматривая схему (22) в обратном порядке, находим обращение преобразования T_1

$$T_1^{-1}: \ \widetilde{w} \to w = \widetilde{w} - \frac{2\widetilde{\gamma} - \widetilde{\lambda}}{2D_1(\widetilde{w})},$$

где $\lambda = \widetilde{\lambda}$, $\alpha = \widetilde{\alpha}$, $\gamma = -\widetilde{\gamma} - \widetilde{\lambda}$.

Аналогично исключая из системы (19) при $\varepsilon = -1$ переменную q_1 и обозначая $p_1 = y(z)$, $\Omega = \gamma - \lambda$, находим уравнение для определения функции $y(z)$

$$y^{(4)} = \frac{1}{y^3}(y^5 + \Omega^4 - y^4(\alpha + z\lambda) + 4(y')^4 - (y')^2(5\Omega^2 + 11yy'') + yy''(5\Omega^2 + 6yy'') + 3y^2y'y^{(3)}), \tag{23}$$

которое обладает свойством Пенлеве вместе с уравнением (5) и интегрируется посредством этого уравнения заменой $y = D_{-1}(w)$. Уравнение (23) также имеет тривиальную симметрию

$$S: \ y(z, \Omega) \to \widetilde{y}(z, \widetilde{\Omega}) = y(z, -\Omega),$$

которая порождает преобразование Беклунда

$$T_2: \ w \to \widetilde{w} = w + \frac{2(\gamma - \lambda)}{D_{-1}(w)}, \quad \widetilde{\lambda} = \lambda, \quad \widetilde{\alpha} = \alpha, \quad \widetilde{\gamma} = -\gamma + 2\lambda$$

уравнения (5). Обратное T_2 преобразование имеет вид

$$T_2^{-1}: \ \widetilde{w} \to w = \widetilde{w} + \frac{2(\widetilde{\gamma} - \widetilde{\lambda})}{D_{-1}(\widetilde{w})}, \quad \lambda = \widetilde{\lambda}, \quad \alpha = \widetilde{\alpha}, \quad \gamma = -\widetilde{\gamma} + 2\widetilde{\lambda}.$$

Для возможности последовательного применения преобразований Беклунда рассмотрим композицию преобразований T_1 и T_2 [24]

$$T = T_2T_1: \ w \to \widetilde{w} = w - \frac{2\gamma + \lambda}{2D_1(w)} - \frac{4(\gamma + 2\lambda)D_1(w)}{2D_{-1}(w)D_1(w) - 3(2\gamma + \lambda)(w'' + 2ww')},$$

$$\widetilde{\lambda} = \lambda, \quad \widetilde{\alpha} = \alpha, \quad \widetilde{\gamma} = \gamma + 3\lambda.$$

При этом преобразование $T^{-1} = T_1T_2 : w \to \widetilde{w}$, $\widetilde{\lambda} = \lambda$, $\widetilde{\alpha} = \alpha$, $\widetilde{\gamma} = \gamma - 3\lambda$ и $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

Заметим, что преобразования T_1, T_2, T получены ранее [21–26]. Предложенная здесь схема (22) позволяет легко найти как сами преобразования T_1, T_2, T, так и их обращения и, следовательно, построить группу преобразований с фундаментальной областью $\mathrm{Re}[\gamma/\lambda] \in [-1, 2)$ в пространстве параметра γ/λ.

6. Специальные решения уравнения (5). В случае $\gamma = -\lambda/2$ уравнение (5) имеет общее решение [24] $w = (u' - v')/(u - v)$, где $u(z)$ и $v(z)$ – произвольные различные решения первого уравнения Пенлеве

$$u'' = 6u^2 - (\lambda z + \alpha)/24.$$

Применяя T, T^{-1}-преобразования, получаем интегрируемость уравнения (5) при

$$\gamma = (3n - 1/2)\lambda, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В случае $\gamma = \lambda$ уравнение (5) также имеет трехпараметрическое семейство решений, определяемое общим решением уравнения $D_{-1}(w) = 0$, которое редуцирует трехпараметрическое семейство решений для всех $\gamma = (3n + 1)\lambda$, $n \in \mathbb{Z}$.

Группа преобразований Беклунда также может быть применена для построения рациональных решений.

Пусть $w(z) = P(z)/Q(z)$ – рациональное решение уравнения (5), где $P(z)$ и $Q(z)$ – несократимые полиномы. Непосредственной подстановкой в (5) убеждаемся в том, что $\dim P(z) = \dim Q(z) - 1$. Следовательно, любое рациональное решение может быть представлено в виде

$$w(z) = -3\sum_{k=1}^{n_{-3}} \frac{1}{z - z_k} - 2\sum_{l=1}^{n_{-2}} \frac{1}{z - z_l} + \sum_{m=1}^{n_1} \frac{1}{z - z_m} + 4\sum_{n=1}^{n_4} \frac{1}{z - z_n},$$

где n_j – число полюсов решения $w(z)$ соответственно с вычетом $j \in \{-3, -2, 1, 4\}$. Если при этом $w(z)$ – постоянное решение, то $w(z) = 0$ и $\gamma = 0$.

Лемма 1. *Для существования рациональных решений уравнения (5) необходимо, чтобы $\gamma/\lambda \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть $w(z)$ – произвольное рациональное решение уравнения (5), имеющее n_j полюсов с вычетами $j \in \{-3, -2, 1, 4\}$, $n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Так как в случае рационального решения бесконечно удаленная точка является точкой голоморфности с разложением (13), то, рассматривая сумму вычетов функции $w(z)$ в расширенной комплексной плоскости, имеем

$$3n_{-3} + 2n_{-2} - n_1 - 4n_4 = \gamma/\lambda. \tag{24}$$

Отсюда сразу следует утверждение леммы 1.

Лемма 2. *При $\gamma = 0$ уравнение (5) имеет единственное рациональное решение $w(z) = 0$.*

Доказательство. Пусть $w(z)$ – произвольное рациональное решение уравнения (5), имеющее n_j полюсов $j \in \{-3, -2, 1, 4\}$, $n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Рассмотрим функцию $\xi(z) = \int^z w(z)^2\,dz$. Эта функция имеет такие же полюсы, что и $w(z)$. При этом в окрестности полюса $z = z_0$ имеем

$$\xi(z) \sim \frac{c}{z - z_0},$$

где $c \in \{-9, -4, -1, -16\}$, если функция $w(z)$ имеет в $z = z_0$ полюс соответственно с вычетом $\{-3, -2, 1, 4\}$. В окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ функция $\xi(z)$ имеет разложение

$$\xi(z) = -\frac{a_1^2}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots,$$

где $a_1 = \gamma/\lambda$. Следовательно, из равенства нулю суммы вычетов функции $\xi(z)$ в расширенной комплексной плоскости имеем соотношение, аналогичное (24):

$$9n_{-3} + 4n_{-2} + n_1 + 16n_4 = (\gamma/\lambda)^2. \tag{25}$$

Если $\gamma = 0$, то из (25) имеем единственную возможность $n_{-3} = n_{-2} = n_1 = n_4 = 0$, что соответствует единственному постоянному решению $w(z) = 0$ уравнения (5). Лемма 2 доказана.

Теорема 3. *Для существования рациональных решений уравнения (5) необходимо и достаточно, чтобы либо $\gamma/\lambda = 3k - 1$, либо $\gamma/\lambda = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$. При каждом таком γ/λ уравнение (5) имеет единственное рациональное решение.*

Доказательство. Достаточность следует из возможности непосредственного построения рациональных решений с помощью преобразований Беклунда с начальными решениями $w(z) = 0$ при $\gamma/\lambda = 0$ и $w(z) = \lambda/(\alpha + z\lambda)$ при $\gamma/\lambda = -1$.

Необходимость. В силу леммы 1 и фундаментальной области $\gamma/\lambda \in \mathrm{Re}[-1, 2)$ достаточно доказать, что уравнение (5) не имеет рациональных решений при $\gamma/\lambda = 1$. Допустим противное, т.е. существует рациональное решение при $\gamma/\lambda = 1$, имеющее n_j полюсов с вычетами $j \in \{-3, -2, 1, 4\}$, $n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда из (25) получаем соотношение $9n_{-3}+4n_{-2}+n_1+16n_4 = 1$, что возможно лишь при $n_{-3} = n_{-2} = n_4 = 0$, $n_1 = 1$. Но это противоречит необходимому соотношению (24). Единственность рациональных решений следует из единственности решения $w(z) = 0$ при $\gamma/\lambda = 0$ и преобразований Беклунда. Теорема доказана.

В таблице приведены некоторые рациональные решения и τ-функции для этих решений.

Простейшие рациональные решения и τ-функции уравнения (5)

γ/λ	$w(z,\alpha)$	$\xi(z)$	$\tau(z)$	$\tau_1(z)$	$\tau_{-1}(z)$
-3 $(\alpha = 0)$	$\dfrac{3(z^5\lambda - 24)}{z(36 + z^5\lambda)}$	$\dfrac{-9(16 + \lambda z^5)}{z(36 + z^5\lambda)}$	$z^4(36 + z^5\lambda)$	z^6	$(36+z^5\lambda)^3$
-1	$\dfrac{\lambda}{\alpha + \lambda z}$	$-\dfrac{\lambda}{\alpha + \lambda z}$	$\alpha + \lambda z$	1	$(\alpha + \lambda z)^3$
0	0	0	1	1	1
2	$-\dfrac{2\lambda}{\alpha + \lambda z}$	$-\dfrac{4\lambda}{\alpha + \lambda z}$	$(\alpha + \lambda z)^4$	$(\alpha + \lambda z)^6$	1
3	$-\dfrac{3\lambda}{\alpha + \lambda z}$	$-\dfrac{9\lambda}{\alpha + \lambda z}$	$(\alpha + \lambda z)^9$	$(\alpha + \lambda z)^{12}$	$(\alpha + \lambda z)^3$
5 $(\alpha=0,\ \lambda=1)$	$-\dfrac{5z^4(216 + z^5)}{(z^5-144)(36+z^5)}$	$-\dfrac{25z^9}{(z^5-144)(36+z^5)}$	$(z^5-144)^4(z^5+36)$	$(z^5 - 144)^6$	$(z^5 + 36)^6$
6 $(\alpha = 0)$	$-\dfrac{6(336 + z^5\lambda)}{\lambda z^6 - 504z}$	$\dfrac{8064 - 36z^5\lambda}{z^6\lambda - 504z}$	$z^{16}(z^5\lambda - 504)^4$	$z^{12}(z^5\lambda-504)^6$	z^{24}

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, 1939.
2. *Ablowitz M.J., Clarkson P.A.* Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering: Lect. Notes Math. V. 149. Cambridge, 1991.
3. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Минск, 1990.
4. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura S., Yoshida M.* From Gauss to Painleve. A modern theory of special functions: Aspects of Mathematics. E16. Braunschweig, 1991.
5. *Hinkkanen A., Laine I.* // J. Anal. Math. 1999. V. 79. P. 345–377.
6. *Gromak V.I., Laine I., Shimomura S.* Painlevé Differential Equations in the Complex Plane. V. 28. Berlin; New York, 2002.
7. *Clarkson P.A., Joshi N., Pickering A.* // Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 175–187.
8. *Airault H.* // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 31–53.
9. *Kimura H., Okamoto K.* // J. Math. Pures Appl. 1984. V. 63. № 9. P. 129–146.
10. *Okamoto K.* // Math. Ann. 1986. V. 275. P. 221–255.
11. *Okamoto K.* // The Painlevé Property. Ser. Math. Phys. New York, 1999. P. 735–788.
12. *Grammaticos B., Nijhoff F.W., Ramani A.* // The Painlevé Property. Ser. in math. phys. 1999. P. 413–517.
13. *Flashka H., Newell A.C.* // Commun. Math. Phys. 1980. V. 76. P. 65–116.

14. *Jimbo M., Miwa T., Ueno K.* // Physica D. 1981. V. 2. P. 306–352.
15. *Rogers C., Shadwick R.* Bäcklund Transformations and their Applications. New York, 1982.
16. *Conte R., Musette M.* // J. Phys. A34. 2001. P. 10507–10522.
17. *Ablowitz M., Ramani A., Segur H.* // Lett. Nuovo Cim. 1978 V. 23. P. 333–338.
18. *Kudryashov N.A.* // Phys. Lett. A. 1997. V. 224. P. 353–360.
19. *Manin Y.I.* // Amer. Math. Soc. Transl. 1998. V. 186. P. 131–151.
20. *Harnad J., Trace C.A., Widom H.* // NATO ASI. Ser. B. 1993. V. 314. P. 231–245.
21. *Кудряшов Н.А.* // Теор. и мат. физика. 2000. Т. 122. С. 72–87.
22. *Kudryashov N.A.* // ANZIAM J. 2002. V. 44. P. 149–160.
23. *Kudryashov N.A.* // Phys. Lett. A. 2000. V. 273. P. 194–202.
24. *Cosgrove C.M.* // Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. P. 1–65.
25. *Andrew N.W.Hone* // Physica D. 1998. V. 118. P. 1–16.
26. *Fordy A.P.* // Physica D. 1991. V. 52. P. 204–210.
27. *Громак В.И.* // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 12. С. 2042–2048.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
25.04.2005 г.