ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 5, с. 630–640

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ ЛИОНСА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ГЛАДКИМИ ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. I

© 2006 г. Ф. Е. Ломовцев

В настоящей работе обобщается известная теорема 1.1 из [1, с. 129] о существовании и единственности решений задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений первого порядка с переменными областями определения симметрических главных частей на случай несимметрических главных частей гладких операторных коэффициентов. Построен новый класс дифференциальных операторов в частных производных четных порядков с симметрическими главными частями и их переменных областей определения, которые удовлетворяют условиям обобщающей теоремы, но не всегда – предположениям Лионса. Во второй части будут построены соответствующие дифференциальные операторы нечетных порядков с несимметрическими главными частями и их переменные области определения.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ рассмотрим задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\mathcal{L}(t)u \equiv \frac{du}{dt} + A(t)u = f, \quad t \in]0,T[, \tag{1}$$

с начальным условием

$$lu \equiv u(0) = u_0 \in H, \tag{2}$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H и $A(t)$, $t \in [0,T]$, – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$.

Предполагаем, что операторы $A(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

I. Операторы $A(t)$ замкнуты в H и существуют не зависящие от u, v и t постоянные $c_0 \geq 0$ и $c_1 > 0$ такие, что при всех $t \in [0,T]$ справедливы неравенства

$$[u]^2_{(t)} \equiv \operatorname{Re}(A(t)u + c_0 u, u) \geq c_1 |u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \tag{3}$$

$$\langle v\rangle^2_{(t)} \equiv \operatorname{Re}(A^*(t)v + c_0 v, v) \geq c_1 |v|^2 \quad \forall v \in D(A^*(t)), \tag{4}$$

где $A^*(t)$ – сопряженные операторы в H к операторам $A(t)$ и $D(A^*(t))$ – их области определения.

II. Для обратных $A_0^{-1}(t)$ операторов $A_0(t) = A(t) + c_0 I$ в H при всех $t \in [0,T]$ выполняются неравенства

$$c_0 |(A_0^{-1}(t)g, h)| \leq c_2 [A_0^{-1}(t)g]_{(t)} |h| \quad \forall g, h \in H, \tag{5}$$

где постоянная $c_2 \geq 0$ не зависит от g, h и t.

III. Операторы $A_0^{-1}(t)$ сильно непрерывны по t в H и при почти всех $t \in]0,T[$ (в дальнейшем при п.в. t) имеют в H слабую производную $dA_0^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[, \mathfrak{L}(H))$ по t такую, что

$$|((dA_0^{-1}(t)/dt)g, h)| \leq c_3 [A_0^{-1}(t)g]_{(t)} |h| \quad \forall g, h \in H, \tag{6}$$

где постоянная $c_3 \geq 0$ не зависит от g, h и t.

Докажем теоремы существования и единственности слабых решений в смысле приведенного ниже определения 1 (см. задачу 2.2 в [1, с. 5]) задачи Коши (1), (2). Во второй части данной работы будут приведены примеры новых корректных смешанных задач для гладких по времени параболических и неклассических уравнений в частных производных с гладкими по времени граничными условиями.

Замечание 1. Для операторов $A(t)$, удовлетворяющих условию I, нормы $[A_0^{-1}(t)g]_{(t)} = \langle A_0^{*-1}(t)g\rangle_{(t)}$ $\forall g \in H$, где $A_0^{*-1}(t)$ – обратные операторов $A_0^*(t) = A^*(t) + c_0 I$.

Замечание 2. Приведем простой пример несамосопряженного оператора A в $H = L_2(0,l)$, порожденного дифференциальным выражением $\tilde{A}u = \partial u/\partial x$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ с граничным условием $u(0) = 0$, который удовлетворяет условиям I–III при $c_0 = 1$. Его сопряженный оператор A^* в $L_2(0,l)$ порожден дифференциальным выражением $\tilde{A}^*v = -\partial v/\partial x$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ с граничным условием $v(l) = 0$. Операторы $-A$ и $-A^*$ диссипативны в $L_2(0,l)$. Оператор A_0 имеет на $L_2(0,l)$ ограниченный обратный $A_0^{-1}g = e^{-x}\int_0^x e^s g(s)\,ds$. Выполняются неравенства вида (5)

$$|(A_0^{-1}g,h)| = \left|\int_0^l e^{-x}\left(\int_0^x e^s g(s)\,ds\right)\overline{h(x)}\,dx\right| \le [A_0^{-1}g]\left(\int_0^l |h(s)|^2\,ds\right)^{1/2},$$

так как

$$[A_0^{-1}g]^2 = \frac{1}{2}e^{-2l}\left|\int_0^l e^s g(s)\,ds\right|^2 + \int_0^l e^{-2x}\left|\int_0^x e^s g(s)\,ds\right|^2 dx.$$

2. Теорема существования. Сначала введем пространства и дадим определение слабых, сильных и гладких решений нашей задачи Коши.

Пусть H_t^- и H_t^{*-} – антидвойственные гильбертовы пространства к гильбертовым пространствам H_t^+ и H_t^{*+}, которые получаются замыканием множеств $D(A(t))$ и $D(A^*(t))$ по эрмитовым нормам $[\cdot]_{(t)}$ и $\langle\cdot\rangle_{(t)}$ из (3) и (4) соответственно. Обозначим $\mathcal{H}^- = L_2(]0,T[, H_t^-)$, $\mathcal{H} = L_2(]0,T[, H)$ и $\mathcal{H}^{*-} = L_2(]0,T[, H_t^{*-})$.

Определение 1. Функция $u \in \mathcal{H}$ называется *слабым* решением задачи Коши (1), (2) для $f \in \mathcal{H}^{*-}$ и $u_0 \in H$, если

$$\int_0^T \left\{(u(t), A^*(t)\varphi(t)) - \left(u(t), \frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\right\}dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)\rangle_{(t)}\,dt + (u_0, \varphi(0))$$

для всех $\varphi \in \mathcal{H}$, таких, что $\varphi(t) \in D(A^*(t))$ $\forall t \in [0,T]$, слабая производная $d\varphi/dt$, $A^*(t)\varphi \in \mathcal{H}$ и $\varphi(T) = 0$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{(t)}$ – полуторалинейные формы антидвойственности между H_t^{*+} и H_t^{*-}.

Определение 2. Функция $u \in \mathcal{H}$ называется *сильным* решением задачи Коши (1), (2) для $f \in \mathcal{H}^-$ и $u_0 \in H$, если существует последовательность $u_n \in \mathcal{D} = \{\tilde{u} \in \mathcal{H} : \tilde{u}(t) \in D(A(t))$ $\forall t \in [0,T]$; $d\tilde{u}/dt$, $A(t)\tilde{u} \in \mathcal{H}\}$ такая, что $u_n \to u$ в $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}(t)u_n \to f$ в $\mathcal{H}^-$ и $lu_n \to u_0$ в H сильно при $n \to \infty$.

Определение 3. Функция $u \in \mathcal{D}$ называется *гладким* решением задачи Коши (1), (2) для $f \in \mathcal{H}$ и $u_0 \in D(A(0))$, если она удовлетворяет уравнению (1) при п.в. t и начальному условию (2).

Каждое гладкое решение задачи Коши (1), (2) является ее сильным решением и каждое сильное решение задачи Коши (1), (2), принадлежащее множеству $\mathcal{D}$, является ее гладким решением. При $f \in \mathcal{H}$ каждое сильное решение задачи Коши (1), (2) является ее слабым решением и каждое слабое решение задачи Коши (1), (2), для которого существует соответствующая аппроксимирующая последовательность u_n из определения 2, является ее сильным решением.

Имеет место теорема существования слабых решений.

Теорема 1. *Если выполняется условие I, то для каждых $f \in \mathcal{H}^{*-}$ и $u_0 \in H$ существует слабое решение $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (1), (2).*

Доказательство состоит в применении следующей проекционной теоремы из [1, с. 37].

Теорема 2. *Пусть F – гильбертово пространство с эрмитовой нормой $\|\cdot\|_F$ и Φ – предгильбертово пространство с эрмитовой нормой $|||\cdot|||$, непрерывно вложенное в F, т.е. существует постоянная $c_4 > 0$ такая, что $\|\varphi\|_F \le c_4|||\varphi|||$ $\forall\varphi \in \Phi$. Задана полуторалинейная форма $E(u,\varphi)$ на $F\times\Phi$, которая при каждом $\varphi\in\Phi$ непрерывна по u на F, и существует такая постоянная $c_5 > 0$, что $|E(\varphi,\varphi)| \ge c_5|||\varphi|||^2$ $\forall\varphi\in\Phi$. Если антилинейный функционал $L(\varphi)$ непрерывен по φ на Φ, то существует элемент $u\in F$, удовлетворяющий уравнению $E(u,\varphi) = L(\varphi)$ $\forall\varphi\in\Phi$.*

На гильбертовом пространстве $F = \mathcal{H}$ и предгильбертовом пространстве

$$\Phi = \{\varphi\in\mathcal{H}:\ \varphi(t)\in D(A^*(t))\ \forall t\in[0,T];\ \text{слабая производная}\ d\varphi/dt,\ A^*(t)\varphi\in\mathcal{H};\ \varphi(T)=0\}$$

с эрмитовой нормой

$$|||\varphi||| = \left(\int\limits_0^T \langle\varphi(t)\rangle_{(t)}^2\,dt + |\varphi(0)|^2\right)^{1/2}$$

возьмем полуторалинейную форму

$$E(u,\varphi) = \int\limits_0^T e^{2c_0t}\left\{(u(t),A^*(t)\varphi(t)) - \left(u(t),\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\right\}dt$$

и антилинейный функционал

$$L(\varphi) = \int\limits_0^T \langle f(t),\varphi(t)\rangle_{(t)}\,dt + (u_0,\varphi(0)).$$

При каждом $\varphi\in\Phi$ форма $E(u,\varphi)$ очевидно непрерывна по u на $F=\mathcal{H}$ и, как показывает интегрирование по частям, она не вырождена, т.е. $\operatorname{Re}E(\varphi,\varphi) \ge (1/2)|||\varphi|||^2$ $\forall\varphi\in\Phi$. При каждых $f\in\mathcal{H}^{*-}$ и $u_0\in H$ функционал $L(\varphi)$ очевидно непрерывен по φ на Φ. А поскольку оператор умножения на $\exp(2c_0t)$ является гомеоморфизмом в $\mathcal{H}$, то теорема 1 доказана.

Замечание 3. Согласно теореме 2 из [2], в других предположениях, в том числе при условии I и существовании сильной производной $dA_0^{-1}(t)/dt$, удовлетворяющей условию $A_0(t)(dA_0^{-1}(t)/dt) \in L_\infty(]0,T[,\mathfrak{L}(H))$ (см. [3]), для каждых $f\in\mathcal{H}^-$ и $u_0\in H$ задача Коши (1), (2) имеет единственное сильное решение $u\in\mathcal{H}$, для которого

$$\sup_{0<t<T}|u(t)|^2 + \int\limits_0^T [u(t)]_{(t)}^2\,dt \le e^{2c_0T}\left(\int\limits_0^T [f(t)]_{(-t)}^2\,dt + |u_0|^2\right),$$

где $[\cdot]_{(-t)}$ – нормы гильбертовых пространств H_t^-. В теореме 3 из [2] указаны дополнительные ограничения на операторы $A(t)$, при которых для каждых $f\in\mathcal{H}$ и $u_0\in D(A(0))$ эти сильные решения будут гладкими.

3. Теорема единственности. В отличие от сильных решений дифференциально-операторных уравнений, для которых более проблематичным, как правило, бывает доказательство существования, для их слабых решений более затруднительным обычно является доказательство единственности. Справедлива

Теорема 3. *Если выполняются условия I–III, то для каждых $f\in\mathcal{H}^{*-}$ и $u_0\in H$ слабое решение $u\in\mathcal{H}$ задачи Коши (1), (2) единственно.*

Доказательство. Пусть $u\in\mathcal{H}$ – слабое решение задачи Коши (1), (2) при $f=0$ и $u_0=0$. Тогда

$$\int\limits_0^T\left\{(u(t),A^*(t)\varphi(t)) - \left(u(t),\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\right\}dt = 0\quad\forall\varphi\in\Phi.$$

Положив $\varphi = A_0^{*-1}(t)w$, где $w(t) = -\int_t^T e^{-2cs}u(s)\,ds$ или $u = e^{2ct}(dw/dt)$ и $w(T) = 0$, и взяв вещественную часть, получим

$$\operatorname{Re}\int\limits_0^T e^{2ct}\left\{\left(\frac{dw}{dt}, w\right) - \left(\frac{dw}{dt}, c_0 A_0^{*-1}(t)w + \frac{dA_0^{*-1}(t)}{dt}w + A_0^{*-1}(t)\frac{dw}{dt}\right)\right\}dt = 0.$$

Интегрируя по частям в первом скалярном произведении, имеем

$$\frac{1}{2}|w(0)|^2 + c\int\limits_0^T e^{2ct}|w|^2\,dt + \int\limits_0^T e^{2ct}\left\langle A_0^{*-1}(t)\frac{dw}{dt}\right\rangle_{(t)}^2 dt +$$

$$+ \operatorname{Re}\int\limits_0^T e^{2ct}\left(\frac{dw}{dt}, c_0 A_0^{*-1}(t)w + \frac{dA_0^{*-1}(t)}{dt}w\right)dt = 0. \qquad (7)$$

Согласно неравенствам (5) и (6), левая часть равенства (7) оценивается снизу величиной

$$c\int\limits_0^T e^{2ct}|w|^2\,dt + \int\limits_0^T e^{2ct}\left\langle A_0^{*-1}(t)\frac{dw}{dt}\right\rangle_{(t)}^2 dt - (c_2+c_3)\int\limits_0^T e^{2ct}\left\langle A_0^{*-1}(t)\frac{dw}{dt}\right\rangle_{(t)}|w|\,dt,$$

применяя в которой неравенство Коши–Буняковского, приходим к неравенству

$$\left(c - \frac{(c_2+c_3)^2}{4}\right)\int\limits_0^T e^{2ct}|w|^2\,dt \le 0.$$

Отсюда при $c > (c_2+c_3)^2/4$ заключаем, что $w = 0$ и, значит, $u = 0$ в $\mathcal{H}$. Теорема 3 доказана.

Замечание 4. В предположениях теоремы 3 для всех слабых решений $u \in \mathcal{H}$ задачи Коши (1), (2) выполняется априорная оценка

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2\,dt \le \frac{4}{c_1^2}\left(\int\limits_0^T \langle f(t)\rangle_{(-t)}^2\,dt + |u_0|^2\right),$$

где $\langle\cdot\rangle_{(-t)}$ – нормы в гильбертовых пространствах H_t^{*-}, которая выводится так же, как в [1, замечание 1.2, с. 38].

Замечание 5. Аналогичные теоремам 1 и 3 результаты Лионса, соответствующие случаю гладких операторных коэффициентов, сформулированы в теореме 1.1 и доказаны в [1, с. 129–135]. Эта теорема дает достаточные условия существования единственных лишь гладких решений задачи Коши (1), (2) и лишь тогда, когда при каждом $t \in [0,T]$ главная часть $A_1(t)$ операторного коэффициента $A(t)$ является самосопряженным оператором в H. Кроме этого, в ней дополнительно предполагается, что выполняются неравенства (3) и неравенства (6) для $A_1(t)$ (см. замечание 6) при $h = g$. Отметим, что для самосопряженных операторов $A(t)$ неравенства (5) всегда выполняются.

4. Построение операторов $A(t)$. Укажем в теореме 4 одно семейство операторов $A(t) : H \supset D(A(t)) \to H$, которые удовлетворяют условиям I–III.

Пусть некоторое гильбертово пространство V непрерывно вложено в H и множества $D(A(t))$, $t \in [0,T]$, являются замкнутыми подпространствами пространства V, в частности, $D(A(t)) \subset V \subset H$, $t \in [0,T]$. Обозначим через $P(t)$, $t \in [0,T]$, операторы ортогонального проектирования пространства V на $D(A(t))$. Будем предполагать выполненными следующие свойства.

I_1. Линейные замкнутые операторы $A(t)$ (их сопряженные операторы $A^*(t)$), $t \in [0,T]$, в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$ ($D(A^*(t))$) полуограничены снизу, т.е. выполняются неравенства (3) ((4)) соответственно.

II_1. Операторы $A(t)$ удовлетворяют неравенствам (5) без множителя c_0 в их левых частях.

III_1. Проекционные операторы $P(t) : V \to V$ обладают свойствами:

i) при каждом $u \in V$ функция $P(t)u$ сильно непрерывна по t на $[0,T]$ в V и при п.в. t последовательность

$$\tau^{-1}(P(t+\tau) - P(t))u \to P'(t)u \quad \text{слабо в } V \text{ при } \tau \to 0;$$

ii) при каждом $g \in H$ функции $u(t) = A_0^{-1}(t)g$ сильно непрерывны по t на $[0,T]$ в V и при п.в. t последовательность

$$\tau^{-1}P(t+\tau)(u(t+\tau) - u(t)) \to P(t)u'(t) \quad \text{слабо в } V \text{ при } \tau \to 0;$$

iii) слабая производная $u'(t) = P'(t)u(t) + P(t)u'(t)$ в V при п.в. t удовлетворяет неравенствам

$$|(u'(t),h)| \le c_4[u(t)]_{(t)}|h| \quad \forall u(t) \in D(A(t)), \quad \forall h \in H, \tag{8}$$

где постоянная $c_4 \ge 0$ не зависит от u, h и t.

Теорема 4. *Операторы $A(t)$, обладающие свойствами I_1 - III_1, удовлетворяют условиям I-III соответственно.*

Доказательство. Остается убедиться лишь в справедливости неравенств (6). Для каждого $g \in H$ функции $u(t) = A_0^{-1}(t)g \in D(A(t))$. Будем говорить, что $u_k \to u$ слабо в V при $k \to \infty$, если при каждом $v \in V$ скалярное произведение в V $((u_k - u, v)) \to 0$ при $k \to \infty$. Если в тождествах

$$\tau^{-1}(u(t+\tau) - u(t)) = \tau^{-1}[P(t+\tau) - P(t)]u(t) + \tau^{-1}P(t+\tau)[u(t+\tau) - u(t)]$$

перейдем к слабому пределу в V при $\tau \to 0$, то благодаря свойству III_1 при п.в. t и любых $h \in H$ будем иметь равенства

$$((dA_0^{-1}(t)/dt)g, h) = (u'(t), h) = (P'(t)u(t) + P(t)u'(t), h).$$

Согласно замечанию 1, оценки (8) эквивалентны неравенствам (6). Теорема 4 доказана.

Замечание 6. Теорема 4 обобщает теорему 5.1 из [1, с. 138] для симметрических операторов на несимметрические операторы. В теореме 5.1 операторы $P(t)$ проектируют не на $D(A(t))$, как в теореме 4, а фактически на области $D(A_1^{1/2}(t))$ квадратных корней $A_1^{1/2}(t)$ самосопряженных главных частей $A_1(t)$ операторов $A(t)$. Ограничения $\mathrm{I}_1 - \mathrm{III}_1$ представляют собой некоторое обобщение соответствующих ограничений Лионса на случай несамосопряженных главных частей $A_1(t)$ операторов $A(t)$. В отличие от его ограничений на самосопряженные главные части $A_1(t)$, которые задаются полуторалинейными эрмитовыми формами, наши ограничения $\mathrm{I}_1 - \mathrm{III}_1$ сформулированы на $A(t)$ и в чисто операторной форме.

5. Примеры областей определения $D(A(t))$. Пусть Ω - ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$ с гладкой границей $S \in C^\infty$. Приведем два примера областей $D(A(t))$, которые удовлетворяют свойству III_1 в $H = L_2(\Omega)$.

1. В теории краевых задач первый пример можно использовать в случае симметрических главных частей операторов $A(t)$. Известно [1, теорема 3.2, с. 17], что для каждой функции u из пространства Соболева $V = W_2^{2m}(\Omega)$ на S определены значения ее производных $\gamma_j u = \partial^j u/\partial\nu^j \in W_2^{2m-j-1/2}(S)$, $0 \le j \le 2m-1$, по внешней нормали ν к S. Если все коэффициенты $a_{i,j}$ принадлежат множеству $B([0,T], \mathfrak{L}(W_2^{2m-i-1/2}(S)))$ всех функций, ограниченных при каждом $t \in [0,T]$ по норме линейных непрерывных отображений в $W_2^{2m-i-1/2}(S)$, то имеют смысл граничные условия

$$\Gamma_j(t)u \equiv \gamma_j u(x') - \sum_{i \in J_{-2m}}^{i<j} a_{i,j}(t)\gamma_i u(x') = 0, \quad x' \in S, \quad j \in J_{2m}, \quad t \in [0,T], \quad m = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

где множества $J_{2m} = \{j_s \in [0,\dots,2m-1]: \; 1 \le s \le m\}$ и $J_{-2m} = [0,\dots,2m-1] \setminus J_{2m}$ – разность множеств $[0,\dots,2m-1]$ и J_{2m}, т.е. дополнение множества J_{2m} до множества $[0,\dots,2m-1]$. Обозначим $D(A(t)) = \{u(t) \in W_2^{2m}(\Omega): \; u(t) \in (9), \; \tilde{A}(t)u(t) \in L_2(\Omega)\}$, где $\tilde{A}(t) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(t,x)D_x^\alpha$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n}^{\alpha_n}$, $D_{x_i}^{\alpha_i} = \partial^{\alpha_i}/\partial x_i^{\alpha_i}$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Рассмотрим операторы $A(t): L_2(\Omega) \supset D(A(t)) \ni u \to \tilde{A}(t)u \in L_2(\Omega)$, $t \in [0,T]$.

Теорема 5. *Пусть коэффициенты $D_x^\beta a_\alpha \in C([0,T]\times\Omega)$, $|\beta| \le |\alpha|$, при п.в. t имеют производную $\partial a_\alpha/\partial t \in L_\infty(]0,T[\times\Omega)$, $|\alpha| \le 2m$, и дифференциальные выражения $\tilde{A}(t)$ с граничными условиями (9) удовлетворяют свойствам I_1 и II_1 и $\tilde{A}_0(t) = \tilde{A}(t) + c_0 I$ коэрцитивны в $W_2^{2m}(\Omega)$, т.е. при всех $t \in [0,T]$ выполняются неравенства*

$$\|u(t)\|_{2m,\Omega} \le c_5 \|\tilde{A}_0(t)u(t)\|_{0,\Omega} \quad \forall u(t) \in D(A(t)), \tag{10}$$

где $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ – нормы в $W_2^p(\Omega)$, $W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$, и постоянная $c_5 > 0$ не зависит от u и t. Пусть их сопряженными операторами в $L_2(\Omega)$ являются некоторые дифференциальные выражения $\tilde{A}^*(t) = \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha^*(t,x)D_x^\alpha$, $\tilde{A}_0^*(t) = \tilde{A}^*(t) + c_0 I$, с коэффициентами $D_x^\beta a_\alpha^* \in C([0,T]\times\Omega)$, $\partial a_\alpha^*/\partial t \in L_\infty(]0,T[\times\Omega)$, $|\beta| \le |\alpha| \le 2m$, и с некоторыми граничными условиями $\{\Gamma_j^*(t)\}_{J_{2m}^*}$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\|(\partial\tilde{A}^*(t)/\partial t)v(t)\|_{0,\Omega} \le c_6 \|\tilde{A}_0^*(t)v(t)\|_{0,\Omega} \quad \forall v(t) \in D(A^*(t)), \tag{11}$$

где постоянная $c_6 \ge 0$ не зависит от v и t. Если все коэффициенты $a_{i,j}$ сильно непрерывны по t в $W_2^{2m-i-1/2}(S)$ и при п.в. t имеют в $W_2^{2m-i-1/2}(S)$ слабую производную $a'_{i,j} \in$ $\in L_\infty(]0,T[,\mathfrak{L}(W_2^{2m-i-1/2}(S)))$ по t такую, что

$$\|a'_{i,j}(t)\gamma_i u(t)\|_{0,S} \le c_{i,j}[u(t)]_{(t)} \quad \forall u(t) \in D(A(t)), \quad i \in J_{-2m}, \quad j \in J_{2m}, \tag{12}$$

где постоянные $c_{i,j} \ge 0$ не зависят от u и t, то проекционные операторы $P(t): W_2^{2m}(\Omega) \to$ $\to D(A(t))$ удовлетворяют свойству III_1.

Доказательство. При каждом $t \in [0,T]$ области $D(A(t))$ являются замкнутыми подпространствами пространства $W_2^{2m}(\Omega)$. Пусть последовательность $u_k \in D(A(t))$ сходится к $u_0(t)$ в $W_2^{2m}(\Omega)$ при $k \to \infty$. Тогда в силу теоремы 3.2 из [1, с. 17] значения граничных операторов $\Gamma_j(t)u_k(t) = 0$ сходятся к граничным операторам $\Gamma_j(t)u_0(t) = 0$ в $W_2^{2m-j-1/2}(S)$, $j \in J_{2m}$, при $k \to \infty$, т.е. $u_0(t) \in D(A(t))$.

Разложим гильбертово пространство $W_2^{2m}(\Omega)$ в прямую сумму

$$W_2^{2m}(\Omega) = \overset{\circ}{W}{}_2^{2m}(\Omega) \oplus \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega),$$

где $\mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$ – ортогональное подпространство к пространству Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^{2m}(\Omega)$ – множеству всех функций $u \in W_2^{2m}(\Omega)$, для которых $\gamma_j u|_S = 0$, $0 \le j \le 2m-1$. По упомянутой теореме 3.2 линейное отображение сужения $\gamma = \{\gamma_0,\dots,\gamma_{2m-1}\}$ является изоморфизмом гильбертова пространства $\mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$ на произведение гильбертовых пространств $\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{2m-j-1/2}(S)$.

Определим проекционные операторы $P(t): W_2^{2m}(\Omega) \to D(A(t))$ с помощью граничных операторов $\Gamma_j(t)$, $j \in J_{2m}$, иначе, чем в [1, с. 143], но эквивалентным и более общим способом.

Определение 4. Для функции $u \in W_2^{2m}(\Omega)$ проекции $P(t)u = u(t)$ тогда, когда $u(t) \in (9)$ и $\inf\limits_{v(t)} \|u - v(t)\|_{2m,\Omega} = \|u - u(t)\|_{2m,\Omega}$ по всем $v(t) \in D(A(t))$, $t \in [0,T]$.

Покажем, что эти проекторы $P(t)$ удовлетворяют свойству III_1 при $V = W_2^{2m}(\Omega)$.

Сначала докажем лемму, которая явно описывает действие проекторов $P(t)$.

Лемма 1. *Пусть в пространстве $W_2^{2m}(\Omega)$ заданы проекционные операторы $P(t)$ на $D(A(t))$. Для каждой функции $u \in W_2^{2m}(\Omega)$ существует единственная функция $\tilde{u}(t) \in \in D(A(t))$ с граничными значениями*

$$\gamma_j \tilde{u}(t) = \sum_{i \in J_{-2m}}^{i<j} a_{i,j}(t)\gamma_i u, \quad j \in J_{2m}, \quad \gamma_j \tilde{u}(t) = \gamma_j u, \quad j \notin J_{2m}, \tag{13}$$

из $W_2^{2m-j-1/2}(S)$, $0 \le j \le 2m-1$, такая, что $P(t)u = \tilde{u}(t)$ в $W_2^{2m}(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$.

Доказательство. Благодаря отображению γ^{-1}, обратному отображению γ, при каждом $t \in [0,T]$ для граничных значений (13) существует единственная функция $\tilde{u}(t) \in \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$. По построению $\tilde{u}(t) \in D(A(t))$. Для всех $t \in [0,T]$ и $v(t) \in D(A(t))$ квадрат расстояния $\|u - v(t)\|^2_{2m,\Omega}$ эквивалентен

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \|\gamma_j(u - v(t))\|^2_{2m-j-1/2,S} =$$

$$= \sum_{j \in J_{2m}} \left\| \gamma_j u - \sum_{i \in J_{-2m}}^{i<j} a_{i,j}(t)\gamma_i u + \sum_{i \in J_{-2m}}^{i<j} a_{i,j}(t)\gamma_i(u - v(t)) \right\|^2_{2m-j-1/2,S} +$$

$$+ \sum_{j \notin J_{2m}} \|\gamma_j(u - v(t))\|^2_{2m-j-1/2,S},$$

минимум которого, очевидно, достигается при $v(t) = \tilde{u}(t)$. Это означает, что $P(t)u = \tilde{u}(t)$ в $W_2^{2m}(\Omega)$ при всех $t \in [0,T]$. Лемма 1 доказана.

1). При каждом $u \in W_2^{2m}(\Omega)$ функция $P(t)u = \tilde{u}(t)$ сильно непрерывна по t на $[0,T]$ в $W_2^{2m}(\Omega)$, так как в (13) коэффициенты $a_{i,j}$ сильно непрерывны по t в $\mathfrak{L}(W_2^{2m-i-1/2}(S))$, $i \in J_{-2m}$, $j \in J_{2m}$, и непрерывно отображение поднятия γ^{-1}, где γ^{-1} – обратный указанному выше изоморфизму γ пространства $\mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$ на произведение $\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{2m-j-1/2}(S)$. Найдем слабую производную $P'(t)$ в $W_2^{2m}(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполняются предположения теоремы 5 (без неравенств (10)–(12)). Тогда для любой $u \in W_2^{2m}(\Omega)$ при п.в. t существует функция $\tilde{w}(t) \in \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$ с граничными значениями*

$$\gamma_j \tilde{u}'(t) = \sum_{i \in J_{-2m}}^{i<j} a'_{i,j}(t)\gamma_i u, \quad j \in J_{2m}, \quad \gamma_j \tilde{u}'(t) = 0, \quad j \notin J_{2m}, \tag{14}$$

из $W_2^{2m-j-1/2}(S)$, $0 \le j \le 2m-1$, где функция $\tilde{u}(t)$ из леммы 1, такая, что $P'(t)u = \tilde{w}(t)$ в $W_2^{2m}(\Omega)$ при п.в. t.

Доказательство. В граничных данных (13) при п.в. t перейдем к слабым пределам в $\tau^{-1}(\tilde{u}(t+\tau) - \tilde{u}(t))$ в пространствах $W_2^{2m-j-1/2}(S)$, $0 \le j \le 2m-1$, при $\tau \to 0$ и благодаря слабой дифференцируемости коэффициентов $a_{i,j}$ по t в $\mathfrak{L}(W_2^{2m-i-1/2}(S))$, $i \in J_{-2m}$, $j \in J_{2m}$, получим граничные значения (14), которым отображение продолжения γ^{-1} ставит в соответствие единственную функцию $\tilde{w}(t) \in \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$. А поскольку изоморфизм γ^{-1} переводит слабо сходящиеся последовательности из $\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{2m-j-1/2}(S)$ в слабо сходящиеся последовательности из $\mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$ и наоборот, то $P'(t)u = \tilde{w}(t)$ в $W_2^{2m}(\Omega)$ при п.в. t. Лемма 2 и тем самым свойство i) проекторов $P(t)$ доказаны.

2). Если дифференциальные операторы $A(t)$ удовлетворяют условию I_1, то на $L_2(\Omega)$ существуют ограниченные обратные операторы $A_0^{-1}(t)$ и $u(t) = A_0^{-1}(t)g \in D(A(t))$ для любых $g \in L_2(\Omega)$. Пусть для произвольного фиксированного значения $t_0 \in [0,T]$ некоторая последовательность $t_p \to t_0$ при $p \to \infty$. В силу неравенства $\|u(t)\|_{2m,\Omega} \le c_5\|g\|_{0,\Omega}$, которое вытекает из (10), можно извлечь ее подпоследовательность $t_k \to t_0$ такую, что $u(t_k) \to w_0$ слабо в $W_2^{2m}(\Omega)$ при $k \to \infty$. Переходя к слабым пределам в граничных операторах $\Gamma_j(t_k)u(t_k) = 0$ в $W_2^{2m-j-1/2}(S)$, $j \in J_{2m}$, при $k \to \infty$ благодаря сильной непрерывности их коэффициентов $a_{i,j}$ по t в $\mathfrak{L}(W_2^{2m-i-1/2}(S))$, $i \in J_{-2m}$, $j \in J_{2m}$, получаем $\Gamma_j(t_0)w_0 = 0$, $j \in J_{2m}$, т.е. $w_0 \in D(A(t_0))$. Значит, существует функция $g_0 \in L_2(\Omega)$ такая, что $A_0(t_0)w_0 = g_0$. В силу непрерывности коэффициентов a_α^* сопряженных операторов по t при каждом $v \in W_2^{2m}(\Omega)$ норма $\|\tilde{A}_0^*(t_k)v - \tilde{A}_0^*(t_0)v\|_{0,\Omega} \to 0$ при $k \to \infty$ и, следовательно, для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2m}(\Omega)$ стремятся к нулю при $k \to \infty$ правые части равенств

$$(v, g - g_0)_{0,\Omega} = ([\tilde{A}_0^*(t_k) - \tilde{A}_0^*(t_0)]v, u(t_k))_{0,\Omega} + (\tilde{A}_0^*(t_0)v, u(t_k) - w_0)_{0,\Omega}.$$

Символами $(\cdot,\cdot)_{p,\Omega}$ обозначаем скалярные произведения в $W_2^p(\Omega)$. А поскольку множество $\overset{\circ}{W}{}_2^{2m}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $g_0 = g$ в $L_2(\Omega)$ и, значит, $w_0 = A_0^{-1}(t)g = u(t_0)$, т.е. $u(t_k) \to u(t_0)$ слабо в $W_2^{2m}(\Omega)$ при $k \to \infty$. Ввиду произвольности последовательности t_p отсюда следует слабая непрерывность функций $u(t) = A_0^{-1}(t)g$ по t на $[0,T]$ в $W_2^{2m}(\Omega)$.

Покажем, что функции $u(t)$ сильно непрерывны по t в $W_2^{2m}(\Omega)$. В силу неравенств $\|u(t) - u(t_0)\|_{2m,\Omega} \le c_5\|\tilde{A}_0(t)[u(t) - u(t_0)]\|_{0,\Omega}$ для этого достаточно показать, что их правые части стремятся к нулю при $t \to t_0$. Очевидно, что при каждом $u \in W_2^{2m}(\Omega)$ норма $\|\tilde{A}_0(t)u - \tilde{A}_0(t_0)u\|_{0,\Omega} \to 0$ при $t \to t_0$, так как коэффициенты a_α исходных дифференциальных операторов непрерывны по t и, значит, норма $\|\tilde{A}_0(t)u\|_{0,\Omega} \to \|\tilde{A}_0(t_0)u\|_{0,\Omega}$ при $t \to t_0$. Поэтому для $u(t) = A_0^{-1}(t)g$ квадраты норм

$$\|\tilde{A}_0(t)u(t) - \tilde{A}_0(t)u(t_0)\|_{0,\Omega}^2 = \|g\|_{0,\Omega}^2 - 2\operatorname{Re}(g, \tilde{A}_0(t)u(t_0))_{0,\Omega} + \|\tilde{A}_0(t)u(t_0)\|_{0,\Omega}^2$$

стремятся к нулю при $t \to t_0$.

Теперь с помощью леммы 2 установим слабую дифференцируемость $u(t)$ по t.

Лемма 3. *Пусть выполняются предположения теоремы 5 (без неравенств (11) и (12)). Тогда при каждом $g \in L_2(\Omega)$ для функции $u(t) = A_0^{-1}(t)g$ при п.в. t*

$$\tau^{-1}P(t+\tau)(u(t+\tau) - u(t)) \to w(t) \quad \textit{слабо в } W_2^{2m}(\Omega) \textit{ при } \tau \to 0$$

и существует единственная функция $\tilde{w}(t) \in \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$ с граничными значениями (14) при $u = u(t)$ такая, что при п.в. t

$$u'(t) = -A_0^{-1}(t)(\partial\tilde{A}(t)/\partial t)u(t) - A_0^{-1}(t)\tilde{A}_0(t)\tilde{w}(t) + \tilde{w}(t), \tag{15}$$

$$P(t)u'(t) = -A_0^{-1}(t)(\partial\tilde{A}(t)/\partial t)u(t) - A_0^{-1}(t)\tilde{A}_0(t)\tilde{w}(t). \tag{16}$$

Доказательство. При каждом $t \in [0,T]$ для функций $u(t) \in D(A(t))$ и $v \in W_2^{2m}(\Omega)$ справедливы тождества

$$\tau^{-1}(P(t+\tau)[u(t+\tau) - u(t)], v)_{2m,\Omega} = \tau^{-1}([P(t+\tau) - P(t)]u(t+\tau), v)_{2m,\Omega} -$$

$$-\tau^{-1}([P(t+\tau) - P(t)]u(t), v)_{2m,\Omega} + \tau^{-1}(P(t)[u(t+\tau) - u(t)], v)_{2m,\Omega}. \tag{17}$$

В силу слабой дифференцируемости самосопряженных операторов $P(t)$ по t при п.в. t и сильной непрерывности функции $u(t)$ по t на $[0,T]$ в $W_2^{2m}(\Omega)$ при п.в. t для первого слагаемого в правой части равенства (17) при $\tau \to 0$ имеем

$$\tau^{-1}([P(t+\tau) - P(t)]u(t+\tau), v)_{2m,\Omega} = \tau^{-1}(u(t+\tau), [P(t+\tau) - P(t)]v)_{2m,\Omega} \to (u(t), P'(t)v)_{2m,\Omega},$$

а второе слагаемое, согласно лемме 2, при п.в. t и $\tau \to 0$ имеет предел, равный $(P'(t)u(t), v)_{2m,\Omega}$. Для вычисления предела третьего слагаемого в правой части равенства (17) нам понадобится

Лемма 4 [1, с. 144]. *Пусть выполняются предположения леммы 3 и* $P(t): W_2^{2m}(\Omega) \to D(A(t))$ *– операторы ортогонального проектирования. Тогда для каждых* $u, v \in W_2^{2m}(\Omega)$ *существуют функции* $w_\tau(t)$ *(соответственно функции* $v_\tau(t)$ *) из* $W_2^{2m}(\Omega)$ *такие, что справедливо включение* $P(t+\tau)u - w_\tau(t) \in D(A(t))$ *(соответственно включение* $P(t)v - v_\tau(t) \in D(A(t+\tau))$ *) и при п.в.* t $\tau^{-1}w_\tau(t) \to w'(t)$ *(соответственно* $\tau^{-1}v_\tau(t) \to v'(t)$ *) слабо в* $W_2^{2m}(\Omega)$ *при* $\tau \to 0$.

Доказательство. Для доказательства утверждений в круглых скобках к граничным условиям

$$\gamma_j v_\tau(t) - \sum_{i\in J_{-2m}}^{i<j} a_{i,j}(t+\tau)\gamma_i v_\tau(t) = -\sum_{i\in J_{-2m}}^{i<j} [a_{i,j}(t+\tau) - a_{i,j}(t)]\gamma_i v(t), \quad j \in J_{2m}, \tag{18}$$

добавим граничные условия

$$\gamma_j v_\tau(t) = 0, \quad j \notin J_{2m}, \tag{19}$$

и по полученным граничным значениям $\gamma_j v_\tau(t)$, $0 \le j \le 2m-1$, с помощью отображения γ^{-1} отыщем функции $v_\tau(t) \in \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$, для которых по построению $v(t) - v_\tau(t) \in D(A(t+\tau))$ для всех малых τ. Переходя в $\tau^{-1}v_\tau(t)$ к слабому пределу в $W_2^{2m}(\Omega)$ при $\tau \to 0$, с помощью формул (18) и (19) приходим к граничным значениям

$$\gamma_j v'(t) = -\sum_{i\in J_{-2m}}^{i<j} a'_{i,j}(t)\gamma_i v(t), \quad j \in J_{2m}, \quad \gamma_j v'(t) = 0, \quad j \notin J_{2m},$$

которым, согласно отображению продолжения γ^{-1}, соответствует некоторая функция $v'(t) \in \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$. Справедливость второго утверждения леммы 4 установлена. Справедливость первого утверждения этой леммы устанавливается аналогично. Лемма 4 доказана.

Итак, по второму утверждению леммы 4 и основным свойствам проекторов $P(t)$ справедливы тождества

$$(u(t+\tau)-u(t), P(t)v)_{2m,\Omega} = (P(t+\tau)u, P(t)v - v_\tau(t))_{2m,\Omega} + (P(t+\tau)u, v_\tau(t))_{2m,\Omega} - (u, P(t)v)_{2m,\Omega} =$$

$$= (u, P(t)v - v_\tau(t))_{2m,\Omega} + (P(t+\tau)u, v_\tau(t))_{2m,\Omega} - (u, P(t)v)_{2m,\Omega} = (P(t+\tau)u - u, v_\tau(t))_{2m,\Omega}.$$

Отсюда видим, что при п.в. t и каждом $v \in W_2^{2m}(\Omega)$

$$\tau^{-1}(P(t)[u(t+\tau) - u(t)], v)_{2m,\Omega} \to (P(t)u - u, v'(t))_{2m,\Omega} \quad \text{при} \quad \tau \to 0.$$

В итоге, суммируя найденные пределы для слагаемых из правой части тождеств (17), получаем, что при п.в. t и каждом $v \in W_2^{2m}(\Omega)$ имеет место сходимость

$$\tau^{-1}(P(t+\tau)[u(t+\tau) - u(t)], v)_{2m,\Omega} \to (P(t)u - u, v'(t))_{2m,\Omega} \quad \text{при} \quad \tau \to 0,$$

и, следовательно, функции $u(t) = A_0^{-1}(t)g$ при п.в. t имеют слабую производную $u'(t)$ по t в $W_2^{2m}(\Omega)$. Свойство ii) проекторов $P(t)$ доказано.

Найдем эту слабую производную. Вычисление слабых производных по t в уравнениях $\tilde{A}_0(t)u(t) = g$ в пространстве $W_2^{2m}(\Omega)$ и в граничных условиях (9) в пространствах $W_2^{2m-j-1/2}(S)$, $0 \le j \le 2m-1$, при п.в. t приводит к граничным задачам

$$\tilde{A}_0(t)u'(t) = -(\partial\tilde{A}(t)/\partial t)u(t), \quad x \in \Omega,$$

$$\Gamma_j(t)u'(t) = \sum_{i\in J_{-2m}}^{i<j} a'_{i,j}(t)\gamma_i u(t), \quad j \in J_{2m}.$$

Как уже показано, при п.в. t граничным данным (14) при $u = u(t)$ соответствует функция $\tilde{w}(t) \in \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$. Тогда функция $w(t) = u'(t) - \tilde{w}(t)$ при п.в. t является решением граничных задач

$$A_0(t)w(t) = -(\partial\tilde{A}(t)/\partial t)u(t) - \tilde{A}_0(t)\tilde{w}(t), \quad x \in \Omega,$$
$$\Gamma_j(t)w(t) = 0, \quad j \in J_{2m},$$

и, следовательно, при п.в. t $w(t) = -A_0^{-1}(t)(\partial\tilde{A}(t)/\partial t)u(t) - A_0^{-1}(t)\tilde{A}_0(t)\tilde{w}(t)$ и производная $u'(t)$ выражается формулой (15).

При п.в. t и всех $v(t) \in D(A(t))$ квадрат расстояния $\|u'(t) - v(t)\|^2_{2m,\Omega}$ эквивалентен

$$\sum_{j=0}^{2m-1} \|\gamma_j(u'(t) - v(t))\|^2_{2m-j-1/2,S} =$$

$$= \sum_{j\in J_{2m}} \left\|\gamma_j(u'(t)-w(t)) + \sum_{i\in J_{2m}}^{i<j} a_{i,j}(t)\gamma_i(w(t)-v(t))\right\|^2_{2m-j-1/2,S} + \sum_{j\notin J_{2m}} \|\gamma_j(u'(t)-v(t))\|^2_{2m-j-1/2,S},$$

минимум которого благодаря граничным данным (14) при $u = u(t)$ очевидно достигается при $v(t) = w(t)$. Это означает, что $P(t)u'(t) = w(t)$ в $W_2^{2m}(\Omega)$ и тем самым равенство (16) выполняется при п.в. t. Лемма 3 доказана.

3). Итак, переходя к сопряженному оператору в $L_2(\Omega)$, согласно формуле (15), при п.в. t и всех $h \in L_2(\Omega)$ имеем равенства

$$(u'(t), h)_{0,\Omega} = -(u(t), (\partial\tilde{A}^*(t)/\partial t)A_0^{*-1}(t)h)_{0,\Omega} - (A_0^{-1}(t)\tilde{A}_0(t)\tilde{w}(t) - \tilde{w}(t), h)_{0,\Omega}. \tag{20}$$

Для первого слагаемого из правой части этого равенства искомые оценки (8) следуют из условия II_1 и ограниченности операторов $(\partial\tilde{A}^*(t)/\partial t)A_0^{*-1}(t) \in L_\infty(]0,T[, \mathfrak{L}(H))$ в силу неравенств (11). Оценим второе слагаемое из правой части (20). Применение формулы Грина интегрирования по частям приводит к неравенству

$$\|A_0^{-1}(t)\tilde{A}_0(t)v\|^2_{0,\Omega} \le c_7\left(\|v\|^2_{0,\Omega} + \sum_{j=0}^{2m-1} \|\gamma_j v\|^2_{0,S}\right) \quad \forall v \in W_2^{2m}(\Omega), \tag{21}$$

где постоянная $c_7 \ge 1$ не зависит от v и t. Сопряженным оператором к изометрии [4, с. 20–56]

$$\gamma : \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega) \to \prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{2m-j-1/2}(S)$$

является изометрия $\gamma^* : \prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{-(2m-j-1/2)}(S) \to \mathcal{W}_2^{-2m}(\Omega)$ антидвойственных пространств $\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{-(2m-j-1/2)}(S)$ и $\mathcal{W}_2^{-2m}(\Omega)$ к пространствам $\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{2m-j-1/2}(S)$ и $\mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)$ соответственно. Сужением отображения γ^* на $\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{2m-j-1/2}(S)$ является отображение γ^{-1}. Применив основную теорему об интерполяции из [4, с. 41] к оператору

$$\gamma^* \in \mathfrak{L}\left(\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{2m-j-1/2}(S), \mathcal{W}_2^{2m}(\Omega)\right) \cap \mathfrak{L}\left(\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{-(2m-j-1/2)}(S), \mathcal{W}_2^{-2m}(\Omega)\right)$$

по параметру $\theta \in]0,1[$, при $\theta = 1/2$ будем иметь включение $\gamma^* \in \mathfrak{L}(\prod_{j=0}^{2m-1} W_2^{-j-1/2}(S), L_2(\Omega))$, т.е. неравенство

$$\|v\|^2_{0,\Omega} \le c_8 \sum_{j=0}^{2m-1} \|\gamma_j v\|^2_{-j-1/2,S} \quad \forall v \in W_2^{2m}(\Omega), \tag{22}$$

где постоянная $c_8 > 0$ не зависит от v и t. Тогда искомые оценки (8) для второго слагаемого в (20) следуют из неравенств (21), (22) и (12) согласно граничным данным (14) при $u = u(t)$. Свойство iii) проекторов $P(t)$ выполняется. Теорема 5 доказана.

Замечание 7. Аналогичные граничные условия Лионса [1, с. 142] являются частным случаем условий (9) при $J_{-2m} = [0, \ldots, k_0]$, $k_0 < m - 1$, не для самих операторов $A(t)$, как у нас, а для квадратных корней $A_1^{1/2}(t)$ (см. замечание 6). Непрерывную дифференцируемость по t коэффициентов уравнений и граничных условий Лионса нам удалось ослабить до их непрерывности по t и дифференцируемости при п.в. t.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lions J.-L.* Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin, 1961.
2. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1141.
3. *Ломовцев Ф.Е., Юрчук Н.И.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1754–1766.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
28.08.2002 г.