ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 5, с. 579–582

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.42

СИЛЬНАЯ ИЗОХРОННОСТЬ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

© 2006 г. **В. В. Амелькин**

Рассмотрим дифференциальное уравнение Льенара

$$\ddot{x} + B(x)\dot{x} + A(x) = 0 \tag{1}$$

в предположении, что вещественные голоморфные функции $A(x)$ и $B(x)$ задаются равенствами $A(x) = x + \sum_{i=2}^{\infty} A_i x^i$, $B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j x^j$, где A_i и B_j – некоторые постоянные.

Уравнение Льенара (1), часто встречающееся в приложениях, всесторонне изучалось и изучается с самых различных точек зрения. Обычный прием здесь – это переход к эквивалентной плоской динамической системе. Одной из таких систем является система

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = A(x) - B(x)y. \tag{2}$$

Пусть $\pi/2$ и $3\pi/2$ – полярные углы двух лучей l_1 и l_2 соответственно с началом в точке $O(0,0)$ – начале декартовой системы координат в фазовой плоскости xOy системы (2).

Определение (ср. [1]). Для системы (2) имеет место сильная изохронность в особой точке $O(0,0)$, если все изображающие точки, лежащие при $t = t_0$ на лучах l_1 и l_2, начиная в момент времени $t = t_0$ двигаться по траекториям центра или фокуса системы (2), переходят с одного из указанных двух лучей на другой за одно и то же время $T = \pi$.

В механической интерпретации сильная изохронность означает, что для колебательной системы имеет место изохронность колебаний как на временном промежутке, равном периоду колебаний, так и на временном промежутке, равном полупериоду колебаний около точки устойчивого равновесия.

Теорема 1. *Для того чтобы для системы (2) имела место сильная изохронность, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$A_2 = 0, \quad A_k = \sum_{n=1}^{k-2} \frac{B_n}{n+2} \cdot \frac{B_{k-n-1}}{k-n+1}, \quad k = 3, 4, \ldots \tag{3}$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 из работы [2] (см. также [3, теорема 8]) для системы (2) будет иметь место сильная изохронность тогда и только тогда, когда преобразование вида

$$u = x, \quad v = y + \sum_{k+l=2}^{\infty} \beta_{k,l} x^k y^l \tag{4}$$

переводит систему (2) в систему

$$\dot{u} = -v + u \sum_{s+\nu=1}^{\infty} \gamma_{s,\nu} u^s v^\nu, \quad \dot{v} = u + v \sum_{s+\nu=1}^{\infty} \gamma_{s,\nu} u^s v^\nu. \tag{5}$$

Если систему (5) записать с учетом преобразования (4) и системы (2) в переменных x и y, а затем приравнять в полученных соотношениях коэффициенты при $x^p y^q$ $(p+q=n)$, то для определения коэффициентов преобразования (4) и коэффициентов системы (5) придем к рассмотрению четырех систем алгебраических уравнений, первая из которых имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\beta_{2j-1,2m-2j+1}-\gamma_{2j-2,2m-2j+1}=0, \quad j=\overline{1,m}, \quad \ldots,\\
&\beta_{1,2m-1}+\gamma_{0,2m-1}=0,\\
&(2m-2l+3)\beta_{2l-3,2m-2l+3}-(2l-1)\beta_{2l-1,2m-2l+1}-\gamma_{2l-2,2m-2l+1}=0, \quad l=\overline{2,m}, \quad \ldots,\\
&\beta_{2m-1,1}=\mu_{2m,0},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\mu_{2m,0}$ – известные величины.

Система (6) представляет собой линейную систему $2m+1$ уравнений с $2m$ неизвестными. Вычитая из $(m+k)$-го уравнения этой системы ее k-е уравнение, получаем систему, равносильную системе (6), последовательно исключая неизвестные в которой, придем к системе, совместной при выполнении серии условий $\mu_{2m,0}=0$. При выполнении этой серии система (6) имеет единственное нулевое решение $\beta_{1,2m-1}=\ldots=\beta_{2k-1,2m-2k+1}=\ldots=\beta_{2m-1,1}=$ $=\gamma_{0,2m-1}=\ldots=\gamma_{2k,2m-2k-1}=\ldots=\gamma_{2m-2,1}=0$.

Вторая система имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\beta_{0,2m}=0,\\
&\beta_{2j,2m-2j}-\gamma_{2j-1,2m-2j}=0, \quad j=\overline{1,m}, \quad \ldots,\\
&(2m-2l+4)\beta_{2l-4,2m-2l+4}-(2l-2)\beta_{2l-2,2m-2l+2}-\gamma_{2l-3,2m-2l+2}=0, \quad l=\overline{2,m}, \quad \ldots,\\
&2\beta_{2m-2,2}-2m\beta_{2m,0}-\gamma_{2m-1,0}=B_{2m-1}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

и представляет собой линейную систему $2m+1$ уравнений с $2m+1$ неизвестными.

Вычитая из $(m+k+1)$-го уравнения этой системы ее k-е уравнение, получаем другую систему, исключая последовательно неизвестные в которой, придем к системе, равносильной системе (7), имеющей единственное решение $\beta_{0,2m}=\ldots=\beta_{2k,2m-2k}=\ldots=\beta_{2m-2,2}=0$, $\beta_{2m,0}=-B_{2m-1}/(2m+1)$, $\gamma_{1,2m-2}=\ldots=\gamma_{2k-1,2m-2k-2}=\ldots=\gamma_{2m-3,2}=0$, $\gamma_{2m-1,0}=$ $=-B_{2m-1}/(2m+1)$.

Следующая система имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\beta_{0,2m+1}=0,\\
&\beta_{2j,2m-2j+1}-\gamma_{2j-1,2m-2j+1}=0, \quad j=\overline{1,m}, \quad \ldots,\\
&(2m-2l+3)\beta_{2l-2,2m-2l+3}-2l\beta_{2l,2m-2l+1}-\gamma_{2l-1,2m-2l+1}=0, \quad l=\overline{1,m}, \quad \ldots,\\
&\beta_{2m,1}=\mu_{2m+1,0},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $\mu_{2m+1,0}$ – известные величины.

Система (8), представляющая собой систему $2m+2$ уравнений с $2m+1$ неизвестными, совместна, если выполняется серия условий $\mu_{2m+1,0}=0$. При выполнении этой серии система (8) имеет единственное решение $\beta_{0,2m+1}=\ldots=\beta_{2k,2m-2k+1}=\ldots=\beta_{2m,1}=\gamma_{1,2m-1}=\ldots$ $\ldots=\gamma_{2k+1,2m-2k-1}=\ldots=\gamma_{2m-1,1}=0$.

Наконец, последняя система запишется в виде

$$
\begin{aligned}
&\beta_{2j+1,2m-2j}-\gamma_{2j,2m-2j}=0, \quad j=\overline{0,m}, \quad \ldots,\\
&\beta_{1,2m}+\gamma_{0,2m}=0,\\
&(2m-2l+4)\beta_{2l-3,2m-2l+4}-(2l-1)\beta_{2l-1,2m-2l+2}-\gamma_{2l-2,2m-2l+2}=0, \quad l=\overline{2,m}, \quad \ldots,\\
&2\beta_{2m-1,2}-(2m+1)\beta_{2m+1,0}-\gamma_{2m,0}=B_{2m}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Исследование системы (9), содержащей $2m+2$ уравнений с $2m+2$ неизвестными, позволяет, как и в случае системы (7), сделать заключение, что она совместна и имеет единственное решение $\beta_{1,2m}=\ldots=\beta_{2k+1,2m-2k}=\ldots=\beta_{2m-1,2}=0$, $\beta_{2m+1,0}=-B_{2m}/(2m+2)$, $\gamma_{0,2m}=\ldots=\gamma_{2k,2m-2k}=\ldots=\gamma_{2m-2,2}=0$, $\gamma_{2m,0}=-B_{2m}/(2m+2)$.

Таким образом, при выполнении условий $\mu_{2m,0}=\mu_{2m+1,0}=0$, $m=1,2,\ldots$, преобразование координат

$$
u=x, \quad v=y-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_{n-1}}{n+1}x^n
\tag{10}
$$

переводит систему Льенара (2) в систему

$$\dot{u} = -v - u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n+2}\,u^n, \quad \dot{v} = u - v\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n+2}\,u^n. \tag{11}$$

Определим теперь всю серию условий $\mu_{n,0} = 0$, $n = 2,3,\ldots$, в явном виде. Эта задача после записи второго уравнения системы (11) в переменных x, y с учетом представления (2) и замены переменных (10) в виде

$$\left(x + \sum_{k=2}^{\infty}A_kx^k - y\sum_{k=1}^{\infty}B_kx^k\right) + y\sum_{k=2}^{\infty}k\,\frac{B_{k-1}}{k+1}\,x^{k-1} = x - \left(y - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{k-1}}{k+1}\,x^k\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k+2}\,x^k \tag{12}$$

сводится к установлению связи между коэффициентами A_k и B_l в соотношении (12). Соотношение (12) после упрощений можно переписать в виде

$$\sum_{k=2}^{\infty}A_kx^k = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{B_{k-1}}{k+1}\,x^k\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{k+2}\,x^k,$$

эквивалентном равенству

$$\sum_{k=2}^{\infty}A_kx^k = \sum_{k=3}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-2}\frac{B_n}{n+2}\cdot\frac{B_{k-n-1}}{k-n+1}\,x^k. \tag{13}$$

Тогда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в формуле (13), получим искомые условия (3). Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы для системы (2) имела место сильная изохронность, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$A(x) = x + x\Phi^2(x), \tag{14}$$

где $\Phi(x) = x^{-2}\int_0^x s\cdot B(s)\,ds$.

Справедливость теоремы следует из непосредственно проверяемой эквивалентности условий (3) и (14).

Из доказательства теоремы 1 вытекает также и следующая

Теорема 3. *Для того чтобы для системы (2) имела место сильная изохронность, необходимо и достаточно существование единственного преобразования (10), переводящего систему (2) в систему (11).*

Замечание 1. Если система Льенара (2) является полиномиальной (неполиномиальной голоморфной), то преобразование (10) также оказывается полиномиальным (неполиномиальным голоморфным).

Теорема 4. *Для того чтобы система (2) имела в начале координат* $O(0,0)$ *сильно изохронный центр, необходимо и достаточно выполнение условий*

$$A_{2k} = 0, \quad A_{2k+1} = \sum_{m=0}^{k-1}\frac{B_{2m+1}}{2m+3}\cdot\frac{B_{2k-2m-1}}{2k-2m+1}, \quad k = 1,2,\ldots \tag{15}$$

Доказательство. Очевидно, что система (2) будет иметь в начале координат $O(0,0)$ сильно изохронный центр тогда и только тогда, когда система (11) будет иметь в точке $O(0,0)$ центр. Но последнее имеет место в том и только в том случае, когда в формулах (3) все коэффициенты B_{2k}, $k = 1,2,\ldots$, окажутся равными нулю.

Необходимость выполнения условий $B_{2k} = 0$, $k = 1,2,\ldots$, следует из сравнения системы (11) с такой упрощенной системой (11), у которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(B_n/(n+2))u^n$ содержит только нечетные степени u и кривые центра которой нужно взять за топографическую систему кривых.

Достаточность прямо следует из симметрии поля направлений системы (11) относительно оси Ov. Выполнение условий $B_{2k}=0$, $k=1,2,\ldots,$ и означает выполнимость условий (15).

Справедливы и следующие два утверждения.

Теорема 5. *Для того чтобы система (2) имела в начале координат $O(0,0)$ сильно изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы функция $B(x)$ была нечетной и имело место равенство (14).*

Теорема 6. *Для того чтобы система (2) имела в начале координат $O(0,0)$ сильно изохронный центр, необходимо и достаточно существование единственного преобразования*

$$u=x, \quad v=y-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n-1}}{2n+1}\,x^{2n-1},$$

переводящего систему (2) в систему

$$\dot u=-v-u\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n-1}}{2n+1}\,u^{2n-1}, \quad \dot v=u-v\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n-1}}{2n+1}\,u^{2n-1}.$$

Замечание 2. Теорема 5 по существу доказана в работе [4, следствие 1]. В работах [5] (полиномиальный случай), [6] (аналитический и локально липшицев случай), [7] (аналитический случай) при рассмотрении вопроса об изохронности центра доказывалась по сути достаточность условий теоремы 5 о сильной изохронности.

Замечание 3. Исходя из вида полиномиальной системы Льенара в случае сильно изохронного центра, на основании работы [8] заключаем, что область сильно изохронного полиномиального центра системы Льенара, будучи неограниченной областью, глобальной не является, т.е. всю фазовую плоскость не заполняет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куклес И.С., Пискунов Н.С.* // Докл. АН СССР. 1937. Т. 17. № 9. С. 467–470.
2. *Амелькин В.В., Корсантия О.Б.* // Междунар. мат. конф. "Еругинские чтения–X": Тез. докл. Могилев, 2005. С. 47–48.
3. *Амелькин В.В., Корсантия О.Б.* // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 2. С. 147–152.
4. *Руденок А.Е.* // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.
5. *Algaba A., Freire E., Gamero E.* Isochronicity via normal form: Preprint. 1998.
6. *Sabatini M.* // J. Differ. Equat. 1999. V. 152. P. 467–487.
7. *Christopher C., Devlin J.* // J. Differ. Equat. 2004. V. 200. P. 1–17.
8. *Galeotti M., Villarini M.* // Ann. di Matem. pure ed appl. 1992. V. 161. № 4. P. 299–313.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
09.06.2005 г.