ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2006, том 42, № 2, с. 168–173

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО УБЫВАЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

© 2006 г. **Н. А. Изобов, С. А. Мазаник**

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0, \tag{1_A}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными (постоянной $a \geq \|A(t)\|$ при $t \geq 0$) коэффициентами и генеральными (особыми) нижним и верхним показателями [1, с. 109–111] $\omega_0(A) \leq \Omega_0(A)$.

При доказательстве (см. [2]) теоремы о приводимости преобразованием Ляпунова любой линейной системы (1_A) к системе (1_B) с кусочно-постоянной матрицей коэффициентов $B(t) = B_k$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_0 = 0$, $\{t_k\} \uparrow +\infty$, каждый элемент которой принимает одно из двух возможных значений $\{-a, a\}$, был использован следующий признак приводимости: системы (1_A) и (1_{A+Q}) с кусочно-непрерывным возмущением Q, удовлетворяющим условию

$$\lambda[Q] \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} t^{-1}\ln\|Q(t)\| < -4a,$$

взаимно приводимые друг к другу.

В настоящей работе в качестве следствия более общего результата величина $4a$ снижена до $2a$ и установлена точность последней.

Теорема 1. *Если для кусочно-непрерывной матрицы $Q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ выполнено условие*

$$\left\|\int\limits_t^{+\infty} Q(\tau)d\tau\right\| \leq C_Q e^{-\sigma t}, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

при $\sigma > \Omega_0(A) - \omega_0(A)$, то системы ($1_A$) и ($1_{A+Q}$) преобразованием Ляпунова приводимы друг к другу, т.е. являются асимптотически эквивалентными.

Доказательство. Обозначим через $X(t)$ и $Y(t)$ фундаментальные нормированные в нуле матрицы решений систем (1_A) и (1_{A+Q}) соответственно, а через $X(t,\tau)$ и $Y(t,\tau)$ матрицы Коши этих систем. В силу определения верхнего $\Omega_0(A) = \Omega_0$ и нижнего $\omega_0(A) = \omega_0$ генеральных показателей линейной системы (1_A) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие постоянные $C_1(\varepsilon) > 0$ и $C_2(\varepsilon) > 0$, что будут выполнены неравенства

$$\|X(t,\tau)\| \leq C_1(\varepsilon)e^{(\Omega_0+\varepsilon)(t-\tau)}, \quad \|X(\tau,t)\| \leq C_2(\varepsilon)e^{(-\omega_0+\varepsilon)(t-\tau)}, \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{3}$$

Так как по условию $Q(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то из следствия 13.2.26 (см. [1, с. 166]) имеем также неравенства

$$\|Y(t,\tau)\| \leq C_3(\varepsilon)e^{(\Omega_0+\varepsilon)(t-\tau)}, \quad \|Y(\tau,t)\| \leq C_4(\varepsilon)e^{(-\omega_0+\varepsilon)(t-\tau)}, \qquad \varepsilon > 0, \quad t \geq \tau \geq 0. \tag{4}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ удовлетворяющим условию

$$\sigma - (\Omega_0 - \omega_0) > 2\varepsilon > 0. \tag{5}$$

По формуле Коши для матрицы $Y(t)$ справедливо представление

$$Y(t) = X(t)\left[E + \int\limits_0^t X^{-1}(\tau)Q(\tau)Y(\tau)d\tau\right], \quad t \geq 0, \tag{6}$$

в котором E – единичная матрица. Из условия теоремы 1 следует сходимость интеграла $Q_0 = \int_0^{+\infty} Q(\tau)d\tau$. Вводя обозначение $B(t) \equiv A(t) + Q(t)$, интегрированием по частям получаем равенство

$$\int\limits_0^t X^{-1}(\eta)Q(\eta)Y(\eta)\,d\eta = Q_0 + X^{-1}(t)\int\limits_{+\infty}^t Q(\eta)d\eta Y(t) + Q_1(t), \quad t \geq 0,$$

в котором использованы обозначения

$$Q_1(t) \equiv \int\limits_0^t X^{-1}(\eta)P(\eta)Y(\eta)d\eta, \quad P(\eta) \equiv A(\eta)\int\limits_{+\infty}^{\eta} Q(\tau)d\tau - \int\limits_{+\infty}^{\eta} Q(\tau)d\tau B(\eta).$$

На основании оценок (2)–(4) справедливы неравенства

$$\|Q_1(t)\| \leq \int\limits_0^t \|X^{-1}(\eta)\|\|P(\eta)\|\|Y(\eta)\|d\eta \leq \int\limits_0^t \|X^{-1}(\eta)\|[\|A(\eta)\| + \|B(\eta)\|]\left\|\int\limits_{+\infty}^{\eta} Q(\tau)d\tau\right\|\|Y(\eta)\|d\eta \leq$$

$$\leq (2a+q)C_QC_2(\varepsilon)C_3(\varepsilon)\int\limits_0^t e^{(\Omega_0-\omega_0-\sigma+2\varepsilon)\eta}d\eta,$$

в которых постоянная $q > 0$ определяется условием $q \geq \|Q(t)\|$ при всех $t \geq 0$. Из этих неравенств в силу выбора (5) числа $\varepsilon > 0$ следует сходимость несобственного интеграла $Q_1(+\infty) \equiv Q_1$.

Таким образом, из представления (6) получаем равенство

$$Y(t) = X(t)\left[E + Q_0 + Q_1 + X^{-1}(t)\int\limits_{+\infty}^t Q(\eta)d\eta\, Y(t) + \int\limits_{+\infty}^t X^{-1}(\eta)P(\eta)Y(\eta)d\eta\right], \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение матрицу $L(t) = Y(t)C_0X^{-1}(t)$ с некоторой невырожденной матрицей C_0. С учетом равенства (7) для этой матрицы получаем представление

$$L(t) = X(t)(E+Q_0+Q_1)C_0X^{-1}(t) + \int\limits_{+\infty}^t Q(\eta)d\eta L(t) + \int\limits_{+\infty}^t X(t,\eta)P(\eta)Y(\eta,t)d\eta\, L(t), \quad t \geq 0. \tag{8}$$

В силу условия (2) и неравенств (3)–(5) имеем оценку

$$\left\|X^{-1}(t)\int\limits_{+\infty}^t Q(\eta)d\eta\, Y(t)\right\| \leq C_QC_2(\varepsilon)C_3(\varepsilon)e^{(\Omega_0-\omega_0-\sigma+2\varepsilon)t} \to 0, \quad t \to +\infty,$$

а из сходимости интеграла $Q_1(+\infty)$ – стремление

$$\int\limits_{+\infty}^t X^{-1}(\eta)P(\eta)Y(\eta)d\eta \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Поэтому из равенства (7) следует сходимость

$$X^{-1}(t)Y(t) \to E + Q_0 + Q_1 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{9}$$

По формуле Остроградского–Лиувилля и условия (2) выполнены соотношения

$$\det[X^{-1}(t)Y(t)] = \exp\left[\mathrm{Sp}\int\limits_0^t Q(\tau)d\tau\right] \to \exp(\mathrm{Sp}Q_0) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{10}$$

Сравнивая соотношения (9) и (10), получаем необходимое равенство

$$\det(E + Q_0 + Q_1) = \exp(\mathrm{Sp}Q_0) \neq 0.$$

Возьмем теперь в представлении (8) матрицы $L(t)$ неособенную матрицу $C_0 = (E + Q_0 + {}+ Q_1)^{-1}$. В результате получим тождество

$$\left[E + \int\limits_t^{+\infty} Q(\tau)d\tau + \int\limits_t^{+\infty} X(t,\tau)P(\tau)Y(\tau,t)d\tau\right]L(t) \equiv E, \quad t \geq 0. \tag{11}$$

Покажем, что в этом тождестве выражение в квадратных скобках при $t \to +\infty$ стремится к единичной матрице E. Действительно, в силу оценок (2)–(4) и условия (5) справедливы неравенства

$$\left\|\int\limits_t^{+\infty} X(t,\eta)P(\eta)Y(\eta,t)d\eta\right\| \leq C_2(\varepsilon)C_3(\varepsilon)\int\limits_t^{+\infty} e^{(\Omega_0-\omega_0+2\varepsilon)(\eta-t)}[2\|A(\eta)\| + \|Q(\eta)\|]\left\|\int\limits_{+\infty}^{\eta} Q(\tau)d\tau\right\|d\eta \leq$$

$$\leq (2a+q)C_QC_2(\varepsilon)C_3(\varepsilon)e^{-(\Omega_0-\omega_0+2\varepsilon)t}\int\limits_t^{+\infty} e^{(\Omega_0-\omega_0-\sigma+2\varepsilon)\eta}d\eta =$$

$$= \frac{(2a+q)C_QC_2(\varepsilon)C_3(\varepsilon)}{\sigma - (\Omega_0 - \omega_0 + 2\varepsilon)}e^{-\sigma t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Поэтому и в силу условия (2) выражение в квадратных скобках в (11) стремится к матрице E при $t \to +\infty$, что устанавливает стремление $L(t) \to E$ при $t \to +\infty$. Это же в силу ее непрерывности означает и ограниченность $L(t)$ на всей полуоси $[0, +\infty)$.

С другой стороны, для определителя матрицы $L(t)$ выполнены равенства

$$\det L(t) = \det C_0 \det Y(t) \det X^{-1}(t) =$$

$$= \det C_0 \exp \mathrm{Sp}\int\limits_0^t Q(\tau)d\tau \to \det C_0 \exp(\mathrm{Sp}\, Q_0) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{12}$$

означающие также его неравенство нулю при всех $t \geq 0$. Поэтому и в силу (12) на основании непрерывности этого определителя по $t \geq 0$ он отделен от нуля некоторой постоянной при всех $t \geq 0$. Это же означает и ограниченность обратной матрицы $L^{-1}(t)$. Из очевидного тождества $dL(t)/dt = B(t)L(t) - L(t)A(t)$ следует также ограниченность производной матрицы $L(t)$. Таким образом, матрица $L(t)$ является матрицей Ляпунова, откуда и вытекает приводимость по Ляпунову системы (1_{A+Q}) к системе (1_A) преобразованием $y = L(t)x$, так как, согласно доказанному, фундаментальная система решений $Y_1(t) = Y(t)C_0$ возмущенной системы (1_{A+Q}) связана с фундаментальной системой решений $X(t)$ исходной системы (1_A) равенством $Y_1(t) = L(t)X(t)$. Теорема 1 доказана.

Так как для младшего $\omega_0(A)$ и старшего $\Omega_0(A)$ генеральных показателей системы (1_A), определяемых по ее матрице Коши $X_A(t,\tau)$ равенствами [1, с. 117]

$$\omega_0(A) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\inf_{k\geq 0}\ln\|X_A(kT, kT+T)\|^{-1},$$

$$\Omega_0(A) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sup_{k\geq 0} \ln \|X_A(kT+T, kT)\|,$$

справедливы оценки $\omega_0(A) \geq -a$ и $\Omega_0(A) \leq a$, то из утверждения теоремы 1 вытекает

Следствие. *Если условие (2) выполнено при $\sigma > 2a$, то системы (1_A) и (1_{A+Q}) асимптотически эквивалентны.*

Установим теперь неулучшаемость во всем множестве линейных систем (1_A) с кусочно-непрерывными матрицами коэффициентов $A(t)$, имеющими норму $\|A(t)\| \leq a$ при $t \geq 0$, условия $\sigma > 2a$ сформулированного следствия, а тем самым и условия $\sigma > \Omega_0(A) - \omega_0(A)$ теоремы 1, асимптотической эквивалентности исходной (1_A) и возмущенной (1_{A+Q}) линейных систем.

Теорема 2. *Для любого числа $a > 0$ существуют система (1_A) с кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов, имеющей норму $\|A(t)\| \leq a$ при $t \geq 0$ и кусочно-непрерывное удовлетворяющее условию*

$$\|Q(t)\| \leq C_Q e^{-2at}, \quad t \geq 0, \tag{2_1}$$

возмущение $Q(t)$ такие, что исходная (1_A) и возмущенная (1_{A+Q}) линейные системы не являются асимптотически эквивалентными.

Доказательство. В качестве матрицы коэффициентов $A(t)$ исходной двумерной системы (1_A) возьмем диагональную матрицу $A(t) = \mathrm{diag}[-a(t), a(t)]$ с функцией

$$a(t) = (-1)^i a, \quad t \in [t_{2k+i}, t_{2k+i+1}), \quad i = 0, 1, \tag{13_1}$$

при определении которой использована временная последовательность $\{t_k\} \uparrow +\infty$ с элементами

$$t_0 = 0, \quad t_{k+1} = t_k + e^{4at_k}, \quad k \geq 0. \tag{13_2}$$

Введем обозначение

$$\alpha(t, \tau) \equiv \int_\tau^t a(\xi)d\xi, \quad t \geq \tau. \tag{14}$$

Тогда матрица Коши и ее норма приобретают представления

$$X(t,\tau) = \mathrm{diag}[e^{-\alpha(t,\tau)}, e^{\alpha(t,\tau)}], \quad \|X(t,\tau)\| = e^{|\alpha(t,\tau)|}, \quad t \geq \tau.$$

Легко видеть, что для построенной диагональной системы (1_A) с коэффициентами (13_1), (13_2) генеральные показатели определяются равенствами $\omega_0(A) = -a$, $\Omega_0(A) = a$.

В качестве возмущающей матрицы $Q(t)$ возьмем верхне-треугольную матрицу второго порядка с элементами

$$q_{ij}(t) = 0, \quad i \leq j, \quad q_{21}(t) = q(t) = e^{-2at}, \quad t \geq 0. \tag{15}$$

Тогда фундаментальная система решений $Y(t)$ системы (1_{A+Q}) имеет вид

$$Y(t) = e^{\alpha(t,0)} \begin{pmatrix} e^{-2\alpha(t,0)} & 0 \\ \int_0^t q(\tau)e^{-2\alpha(\tau,0)}d\tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, система (1_{A+Q}) преобразованием Ляпунова $y = L(t)x$ приводится к системе (1_A) тогда и только тогда, когда при некоторой неособенной постоянной матрице $C = (C_{ij})_1^2$ второго порядка матрица $S(t) \equiv Y(t)CX^{-1}(t)$ является матрицей Ляпунова. Ее представление имеет вид

$$S(t) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}e^{-2\alpha(t,0)} \\ e^{2\alpha(t,0)}(C_{21} + C_{11}J(t)) & C_{22} + C_{12}J(t) \end{pmatrix}, \quad J(t) \equiv \int_0^t q(\tau)e^{-2\alpha(\tau,0)}d\tau. \tag{16}$$

Исследуем поведение функции $\alpha(t,0)$ по последовательностям $\{t_{2m}\}$ и $\{t_{2m+1}\}$ при $m \to \infty$. Для элементов первой последовательности в силу соотношений (13_1), (13_2) и (14) выполнены равенства

$$\alpha(t_{2m},0) = \sum_{k=1}^{m} \alpha(t_{2k},t_{2k-2}) = -\sum_{k=1}^{m} [a(t_{2k}-t_{2k-1}) - a(t_{2k-1}-t_{2k-2})] =$$

$$= -a\sum_{k=1}^{m}(e^{4at_{2k-1}} - e^{4at_{2k-2}}) = -a\sum_{k=1}^{m} e^{4at_{2k-2}}(e^{4a\exp(4at_{2k-2})} - 1) \to -\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

а для элементов второй – аналогичные равенства

$$\alpha(t_{2m+1},0) = at_1 + \sum_{k=1}^{m} \alpha(t_{2k+1},t_{2k-1}) = at_1 + a\sum_{k=1}^{m}(e^{4at_{2k}} - e^{4at_{2k-1}}) =$$

$$= at_1 + a\sum_{k=1}^{m} e^{4at_{2k-1}}(e^{4a\exp(4at_{2k-1})} - 1) \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Поэтому для ограниченности на полуоси матрицы $S(t)$, определяемой равенством (16), необходимо выполнение равенства $C_{12} = 0$. С учетом этого из неособенности матрицы C следует выполнение неравенства $C_{11}C_{22} \neq 0$. Кроме того, для ограниченности на полуоси $[0,+\infty)$ матрицы S необходима ограниченность на ней функции

$$e^{2\alpha(t,0)}[C_{21} + C_{11}J(t)] \equiv e^{2\alpha(t,0)}\varphi(t).$$

Тогда в силу установленного стремления $\alpha(t_{2m+1},0) \to +\infty$ при $m \to \infty$ последовательность $\{\varphi(t_{2m+1})\}$ необходимо стремится к нулю при $m \to \infty$, т.е. имеет место сходимость

$$J(t_{2m+1}) \to c \equiv -C_{21}/C_{11} = \text{const} \in (-\infty,+\infty) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{17}$$

Покажем, что этого не может быть. Действительно, в силу положительности подынтегральной функции у интеграла $J(t)$ для его значений $J(t_{2m+1})$, $m \geq 2$, справедливы неравенства

$$J(t_{2m+1}) > \int\limits_{t_{2m-1}}^{t_{2m+1}} e^{-2a\tau-2\alpha(\tau,0)}d\tau > e^{-2at_{2m-1}-2\alpha(t_{2m-1},0)} \int\limits_{t_{2m-1}}^{t_{2m}} e^{-2a(\tau-t_{2m-1})-2\alpha(\tau,t_{2m-1})}d\tau. \tag{18}$$

Так как функция $a(t)$ равна $-a$ на промежутке $[t_{2m-1},t_{2m}]$, то имеет место равенство

$$\alpha(\tau,t_{2m-1}) = -a(\tau - t_{2m-1}) \quad \text{при} \quad \tau \in [t_{2m-1},t_{2m}],$$

устанавливающее равенство единице подынтегральной функции в предыдущем интеграле. Это позволяет получить из (18) неравенства

$$J(t_{2m+1}) > (t_{2m} - t_{2m-1})\exp[-2at_{2m-1} - 2\alpha(t_{2m-1},0)] = e^{4at_{2m-1}}\exp\left[-\sum_{k=0}^{m-1} 4a(t_{2k+1} - t_{2k})\right] =$$

$$= \exp\left[4a\sum_{k=1}^{m-1}(t_{2k} - t_{2k-1})\right] = \exp\left[4a\sum_{k=1}^{m-1} e^{4at_{2k-1}}\right] \to +\infty \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким образом, полученное свойство $J(t_{2m+1}) \to +\infty$ при $m \to \infty$ вступает в противоречие со свойством (17) интеграла $J(t)$, необходимым для существования преобразования Ляпунова, переводящего систему (1_A) в систему (1_{A+Q}). Это означает, что система (1_A) с матрицей коэффициентов, определяемой соотношениями (13_1) и (13_2), не является асимптотически эквивалентной возмущенной системе (1_{A+Q}) с матрицей возмущения (15). Теорема 2 доказана.

Замечание. Для системы (1_A) с коэффициентами (13_1), (13_2), для которой существует такая удовлетворяющая условию (2) с числом $\sigma = 2a$ матрица Q, что системы (1_A) и (1_{A+Q}) не являются асимптотически эквивалентными, выполнено равенство $\Omega_0(A) = -\omega_0(A) = a$. Нетрудно привести примеры системы (1_A) с кусочно-непрерывной матрицей коэффициентов, имеющей норму $\|A(t)\| \leq a$ при $t \geq 0$, и генеральными показателями $\omega_0(A)$ и $\Omega_0(A)$, для которых выполнено неравенство $\Omega_0(A) - \omega_0(A) < 2a$, и не асимптотически эквивалентной ей возмущенной системы (1_{A+Q}) с возмущением Q, удовлетворяющим условию (2) с числом $\sigma = \Omega_0(A) - \omega_0(A)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
2. *Мазаник С.А.* // Докл АН БССР. 1981. Т. 25. № 5. С. 399–401.

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск,
Белорусский государственный университет, г. Минск

Поступила в редакцию
21.01.2005 г.