УДК 517.986.24

А. Б. Антоневич, В. И. Бахтин, А. В. Лебедев

Скрещенное произведение C^*-алгебры на эндоморфизм, алгебры коэффициентов и трансфер-операторы

Строится скрещенное произведение C^*-алгебры на эндоморфизм, порожденный частичной изометрией.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: C^*-алгебра, эндоморфизм, трансфер-оператор, скрещенное произведение.

§ 1. Введение

Для заданной C^*-алгебры A и эндоморфизма α существуют разные способы построения новой C^*-алгебры (расширения A), называемой скрещенным произведением A на α. Удачные конструкции такого типа предъявлены, например, в работах Кунца и Кригера [1], [2], Пашке [3], Стэйси [4], Мёрфи [5], Экселя [6] и Квасьневского [7]. Среди них скрещенное произведение Экселя из [6] является наиболее общей конструкцией, поскольку все остальные тем или иным образом могут быть сведены к ней. Однако, строго говоря, последнее утверждение справедливо не до конца. Здесь имеется в виду следующее. В конструкции Экселя (см. определение 4.10) начальными являются два объекта – эндоморфизм α исходной C^*-алгебры A и трансфер-оператор $\mathscr{L}$, удовлетворяющий некоторым соотношениям. Затем скрещенное произведение определяется как универсальная обертывающая C^*-алгебра, порожденная алгеброй A и оператором S, который порождает трансфер-оператор и удовлетворяет предписанным соотношениям. В противоположность этому скрещенное произведение Квасьневского (см. п. 4.6) не содержит трансфер-оператора среди начальных объектов. То же касается и алгебры Кунца–Кригера (см. п. 4.3). Работа Экселя [8] делает ситуацию еще более интригующей – в этой работе исчез эндоморфизм. Скрещенное произведение Экселя также обладает определенным "дефектом": как показали Браунлав и Райберн в [9], оно не всегда содержит исходную алгебру A и, таким образом, не всегда является расширением A. Вышесказанное означает, что естественный вопрос о том, какова общая "конструкция" скрещенного произведения, все еще ожидает ответа.

В настоящей статье мы исследуем данный вопрос еще с одной стороны.

В работе Лебедева и Одзиевича [10] введено понятие так называемой алгебры коэффициентов и показано, что этот объект играет принципиальную роль в расширениях C^*-алгебр с помощью частичных изометрий. В работе Бахтина и Лебедева [11] получен критерий того, что C^*-алгебра является алгеброй коэффициентов, ассоциированной с данным эндоморфизмом. Опираясь на результаты этих работ, мы приходим к некоторой конструкции скрещенного произведения. Она оказывается проще и “естественнее” конструкции Экселя. Обсуждение данного скрещенного произведения и является главной темой статьи.

Работа построена следующим образом.

В § 2 мы приводим необходимые сведения об алгебрах коэффициентов и трансфер-операторах, заимствованные из [6], [10], [11], а также вводим понятие скрещенного произведения. Описанию внутренней структуры введенного скрещенного произведения посвящен § 3. Здесь, в частности, получен критерий точности для представления скрещенного произведения и описано регулярное представление. В § 4 проведено сравнение введенного скрещенного произведения с уже существующими востребованными конструкциями. Оказывается, что оно покрывает “почти все” из них. В частности, в “наиболее популярной” ситуации, когда все степени трансфер-оператора порождены частичными изометриями, оно совпадает со скрещенным произведением Экселя, но для другой алгебры, другого эндоморфизма и другого трансфер-оператора. Заключительный § 5 посвящен обсуждению “общей конструкции” скрещенного произведения. Хотя этот параграф не содержит строгих результатов, мы считаем его очень важным, поскольку в нем изложена “общая философия” скрещенного произведения (как она нам представляется).

Работа является переработанной версией электронного препринта [12].

§ 2. Алгебры коэффициентов, трансфер-операторы, скрещенные произведения

Для полноты изложения мы начнем с напоминания ряда определений и фактов, касающихся трансфер-операторов и алгебр коэффициентов. Все они позаимствованы из работ [6], [10], [11].

Пусть заданы C^*-алгебра $\mathscr{A}$ с единицей 1 и эндоморфизм $\delta\colon \mathscr{A}\to\mathscr{A}$. Линейное отображение $\delta_*\colon \mathscr{A}\to\mathscr{A}$ называется *трансфер-оператором* для пары $(\mathscr{A},\delta)$, если оно непрерывно, положительно и удовлетворяет тождеству

$$\delta_*(\delta(a)b) = a\delta_*(b), \qquad a,b\in\mathscr{A}. \tag{2.1}$$

Предложение 2.1 (см. [6; предложение 2.3]). *Пусть δ_* – трансфер-оператор для пары $(\mathscr{A},\delta)$. Тогда следующие три утверждения равносильны*:

(i) *композиция $E=\delta\circ\delta_*$ является оператором условного математического ожидания, отображающим $\mathscr{A}$ на $\delta(\mathscr{A})$*;

(ii) $\delta\circ\delta_*\circ\delta=\delta$;

(iii) $\delta(\delta_*(1))=\delta(1)$.

Если равносильные утверждения из предложения 2.1 выполняются, то Эксель называет δ_* *невырожденным* трансфер-оператором.

Мы будем называть трансфер-оператор δ_* *полным*, если

$$\delta\delta_*(a)=\delta(1)a\delta(1), \qquad a\in\mathscr{A}. \tag{2.2}$$

Заметим, что полный трансфер-оператор невырожден. В самом деле, из (2.2) вытекают равенства

$$\delta\delta_*\delta(a) = \delta(1)\delta(a)\delta(1) = \delta(a)$$

и, следовательно, выполняется утверждение (ii) из предложения 2.1.

Следующая теорема дает критерий существования полного трансфер-оператора.

Теорема 2.2 (см. [11; теорема 2.8]). *Пусть заданы C^*-алгебра $\mathscr{A}$ с единицей 1 и эндоморфизм $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$. Тогда следующие три условия равносильны:*

1) *существует полный трансфер-оператор δ_* (для $(\mathscr{A},\delta)$);*
2) (i) *существует невырожденный трансфер-оператор δ_*,*
   (ii) *$\delta(\mathscr{A})$ является наследственной подалгеброй $\mathscr{A}$;*
3) (i) *существует такой центральный ортогональный проектор $P \in \mathscr{A}$, что*
      а) *$\delta(P) = \delta(1)$,*
      б) *отображение $\delta\colon P\mathscr{A} \to \delta(\mathscr{A})$ является *-изоморфизмом,*
   (ii) *$\delta(\mathscr{A}) = \delta(1)\mathscr{A}\delta(1)$.*

Более того, трансфер-оператор δ_* в 1) и 2), а также центральный проектор P в 3) определяются однозначно и удовлетворяют равенствам

$$P = \delta_*(1), \tag{2.3}$$

$$\delta_*(a) = \delta^{-1}\bigl(\delta(1)a\delta(1)\bigr), \qquad a \in \mathscr{A}, \tag{2.4}$$

где $\delta^{-1}\colon \delta(\mathscr{A}) \to P\mathscr{A}$ – отображение, обратное к $\delta\colon P\mathscr{A} \to \delta(\mathscr{A})$.

Определение 2.3. Пусть $A \subset L(H)$ является *-подалгеброй, содержащей единицу 1 из $L(H)$, и $V \in L(H)$. Мы будем называть A *алгеброй коэффициентов* для C^*-алгебры $C^*(A,V)$, порождаемой A и V, если A и V удовлетворяют следующим трем условиям:

$$Va = VAV^*V, \qquad a \in A; \tag{2.5}$$

$$VaV^* \in A, \qquad a \in A; \tag{2.6}$$

$$V^*aV \in A, \qquad a \in A. \tag{2.7}$$

В [10] и [11] было показано, что вместо (2.5) можно использовать эквивалентное условие

$$V^*V \in Z(A), \tag{2.8}$$

где $Z(A)$ – центр A, или же условие

$$V^*VaV^*bV = aV^*bV, \qquad a,b \in A. \tag{2.9}$$

Стоит отметить, что из вышеприведенных условий (2.5)–(2.7) автоматически вытекает, что V является частичной изометрией, а отображение $A \ni a \mapsto VaV^*$ является эндоморфизмом (см. [10; предложение 2.2]). Таким образом, учитывая (2.1), мы видим, что C^*-алгебра $A \subset L(H)$, содержащая единицу из $L(H)$, будет алгеброй коэффициентов для $C^*(A,V)$ в том и только том случае, когда отображение $V\cdot V^*\colon A \to A$ является эндоморфизмом и одновременно отображение $V^*\cdot V\colon A \to A$ является трансфер-оператором для $V \cdot V^*$.

Определение 2.4. Пусть δ – эндоморфизм (абстрактной) C^*-алгебры $\mathscr{A}$ с единицей. Будем говорить, что пара $(\mathscr{A},\delta)$ *отлично представима*, если существует такая тройка (H,π,U), состоящая из гильбертова пространства H, точного невырожденного представления $\pi\colon \mathscr{A}\to L(H)$ и линейного непрерывного оператора $U\colon H\to H$, что для всех $a\in\mathscr{A}$ выполняются условия

$$\pi(\delta(a)) = U\pi(a)U^*, \qquad U^*\pi(a)U \in \pi(\mathscr{A}), \tag{2.10}$$

$$U\pi(a) = \pi(\delta(a))U, \qquad a\in\mathscr{A}. \tag{2.11}$$

Иначе говоря, $\pi(\mathscr{A})$ является алгеброй коэффициентов для $C^*(\pi(\mathscr{A}),U)$ при фиксированном эндоморфизме $U\cdot U^*$. В этом случае мы будем также называть $\mathscr{A}$ *алгеброй коэффициентов*, *ассоциированной с* δ.

В силу рассуждений, следующих за определением 2.3, вместо условия (2.11) можно использовать равносильное условие

$$U^*U \in Z(\pi(\mathscr{A})) \tag{2.12}$$

либо условие

$$U^*U\pi(a)U^*\pi(b)U = \pi(a)U^*\pi(b)U, \qquad a,b\in\mathscr{A}. \tag{2.13}$$

В частности, ясно, что отлично представимую пару $(\mathscr{A},\delta)$ можно определять как такую пару, для которой найдется тройка (H,π,U), где $\pi\colon\mathscr{A}\to L(H)$ является точным невырожденным представлением, $U\in L(H)$ и отображение $U\cdot U^*$ совпадает с эндоморфизмом δ на $\pi(\mathscr{A})$ в то время как отображение $U^*\cdot U$ является трансфер-оператором для δ.

Поскольку δ – эндоморфизм, $\delta(1)$ является проектором. Отсюда и из (2.10) следует, что UU^* является проектором, а U – частичной изометрией.

Теорема 2.5 (см. [11; теорема 3.1]). *Пара $(\mathscr{A},\delta)$ отлично представима тогда и только тогда, когда для нее существует полный трансфер-оператор δ_*.*

Определение 2.6. Пусть пара $(\mathscr{A},\delta)$ отлично представима. *Скрещенное произведение* A на δ (обозначение $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ или просто $\mathscr{A}\times\mathbb{Z}$, когда δ фиксировано) – это универсальная C^*-алгебра с единицей, порожденная такой копией $\mathscr{A}$ и частичной изометрией U, для которых выполняются соотношения

$$\delta(a) = UaU^*, \quad \delta_*(a) = U^*aU, \qquad a\in\mathscr{A}, \tag{2.14}$$

где δ_* – полный трансфер-оператор для $(\mathscr{A},\delta)$ (который существует в силу теоремы 2.5 и единствен в силу теоремы 2.2). При этом алгебра $\mathscr{A}$ называется *алгеброй коэффициентов* для $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$.

Замечание 2.7. Причина, по которой мы используем в обозначении скрещенного произведения $\mathbb{Z}$, а не $\mathbb{N}$ (как в некоторых других источниках), будет раскрыта в следующем параграфе.

Теоремы 2.2 и 2.5 гарантируют невырожденность определения 2.6 (т.е. существование ненулевого представления для $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$, в котором $\mathscr{A}$ содержится как C^*-подалгебра). Дальнейшее исследование структуры $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ проводится в следующем параграфе.

§ 3. Точные и регулярные представления скрещенного произведения

Настоящий параграф посвящен описанию внутренней структуры $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$. В качестве главных технических инструментов здесь будут использованы результаты из [10] и [11].

3.1. Свойство $(^*)$**.** Пусть $\widehat{a}$ и $\widehat{U}$ – канонические образы $a \in \mathscr{A}$ и U в $\mathscr{A} \times \mathbb{Z}$ соответственно. Мы будем отождествлять $\widehat{a}$ с a, это отождествление позволяет использовать обозначения $\delta(\widehat{a})$ и $\delta_*(\widehat{a})$.

По определению 2.4 и определению скрещенного произведения алгебра $\widehat{\mathscr{A}}$ является алгеброй коэффициентов для $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z} = C^*(\widehat{\mathscr{A}}, \widehat{U})$ (см. определение 2.3).

Предложение 3.1 (см. [10; предложение 2.3]). *Пусть A – алгебра коэффициентов для $C^*(A, V)$. Тогда линейное пространство B_0, состоящее из конечных сумм*

$$x = V^{*N} a_{-N} + \dots + V^* a_{-1} + a_0 + a_1 V + \dots + a_N V^N, \tag{3.1}$$

где $a_k \in A$ и $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, является всюду плотной *-подалгеброй в $C^*(A, V)$.

Поскольку всякая C^*-алгебра может быть точно представлена как C^*-подалгебра операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве, предложение 3.1 влечет следующее

Предложение 3.2. *Пространство C_0, состоящее из конечных сумм*

$$x = \widehat{U}^{*N} \widehat{a}_{-N} + \dots + \widehat{U}^* \widehat{a}_{-1} + \widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 \widehat{U} + \dots + \widehat{a}_N \widehat{U}^N, \tag{3.2}$$

где $a_k \in \mathscr{A}$ и $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, является всюду плотной *-подалгеброй в $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$.

Определение 3.3. Будем говорить, что алгебра $C^*(A, V)$ из определения 2.3 *обладает свойством* $(^*)$, если для каждого $x \in B_0$ (представимого формулой (3.1)) выполняется неравенство

$$\|a_0\| \leqslant \|x\|. \tag{3.3}$$

Замечание 3.4. Заметим, что $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z} = C^*(\widehat{\mathscr{A}}, \widehat{U})$ обладает свойством $(^*)$. В самом деле, возьмем любое точное невырожденное представление $\pi\colon \mathscr{A} \to L(H)$ и частичную изометрию $U\colon H \to H$ из определения 2.4. Рассмотрим пространство $\mathscr{H} = l^2(\mathbb{Z}, H)$ и представление $\nu\colon C^*(\widehat{\mathscr{A}}, \widehat{U}) \to L(\mathscr{H})$, задаваемое формулами

$$(\nu(\widehat{a})\xi)_n = \pi(a)(\xi_n), \quad \text{где} \ \ a \in \mathscr{A}, \ \ l^2(\mathbb{Z}, H) \ni \xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}};$$
$$(\nu(\widehat{U})\xi)_n = U(\xi_{n-1}), \qquad (\nu(\widehat{U}^*)\xi)_n = U^*(\xi_{n+1}).$$

Рутинная проверка показывает, что $\nu(\widehat{\mathscr{A}})$ и $\nu(\widehat{U})$ удовлетворяют всем условиям определения 2.4 (для $\pi(\mathscr{A})$ и U).

Теперь возьмем любой $x \in C^*(\widehat{\mathscr{A}}, \widehat{U})$ вида (3.2) и для любого $\varepsilon > 0$ подберем такой вектор $\eta \in H$, что

$$\|\eta\| = 1, \qquad \|\pi(a_0)\eta\| > \|\pi(a_0)\| - \varepsilon. \tag{3.4}$$

Определим элемент $\xi \in l^2(\mathbb{Z}, H)$ равенством $\xi_n = \delta_{0n}\eta$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда $\|\xi\| = 1$, а из явной формулы для $\nu(x)\xi$ и (3.4) следуют оценки

$$\|\nu(x)\xi\|^2 \geqslant \|\pi(a_0)\eta\|^2 > (\|\pi(a_0)\| - \varepsilon)^2.$$

В силу произвольности ε они доказывают требуемое неравенство

$$\|x\| \geqslant \|\pi(a_0)\| = \|\widehat{a}_0\|.$$

Замечание 3.4 дает нам возможность применить все главные результаты из [10] для исследования структуры скрещенного произведения. Займемся этим.

Следующая теорема демонстрирует принципиальное значение свойства $(^*)$ для скрещенного произведения – это свойство оказывается критерием для того, чтобы представление скрещенного произведения было точным.

Теорема 3.5. *Пусть заданы C^*-алгебра $\mathscr{A}$ с единицей 1 и эндоморфизм $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$, для которых существует полный трансфер-оператор δ_*, и пусть (H, π, U) – соответствующая тройка из определения 2.4. Тогда отображение*

$$\Phi(\widehat{U}) = U, \qquad \Phi(\widehat{a}) = \pi(a), \quad a \in \mathscr{A}, \tag{3.5}$$

порождает изоморфизм между алгебрами $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z} = C^*(\widehat{\mathscr{A}}, \widehat{U})$ и $C^*(\pi(\mathscr{A}), U)$ в том и только том случае, когда алгебра $C^*(\pi(\mathscr{A}), U)$ обладает свойством $(^*)$.

Это следует из замечания 3.4 и [10; теорема 2.13].

Замечание 3.6. Представление $\nu\colon C^*(\widehat{\mathscr{A}}, \widehat{U}) \to L(\mathscr{H})$ из замечания 3.4 обладает свойством $(^*)$ и потому является точным представлением $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$.

Замечание 3.7. Стоит отметить, что значение свойства $(^*)$ в теории скрещенных произведений C^*-алгебр на дискретные группы (полугруппы) автоморфизмов (эндоморфизмов) отмечалось многими авторами наряду с доказательствами результатов типа теоремы 3.5. Важность свойства $(^*)$, по-видимому, впервые была выяснена О'Донованом (см. [13]) в связи с описанием C^*-алгебр, порожденных взвешенными сдвигами. Наиболее общий результат, устанавливающий решающую роль этого свойства в теории скрещенного произведения C^*-алгебр на дискретные группы автоморфизмов, был получен в [14] (см. также [15; гл. 2, 3], где изложены полные доказательства и представлены разнообразные приложения) для произвольной C^*-алгебры и аменабельной дискретной группы. Связь соответствующего свойства с точными представлениями скрещенных произведений на эндоморфизмы, порожденные изометриями, была исследована в [16], [17]. Роль свойств типа $(^*)$ в теории алгебр расслоений Фелла изучалась в [18]. Свойства подобного сорта оказались весьма важными не только в чистой C^*-теории, но и в разных приложениях, таких, например, как построение символического исчисления и развитие теории разрешимости функциональных дифференциальных уравнений (см. [19], [20]).

Мы также будем существенно использовать это свойство в п. 3.2.

3.2. Регулярное представление скрещенного произведения. Точное представление, упомянутое в замечании 3.6, не было явным образом определено (в терминах $\mathscr{A}$, δ, δ_*), на самом деле мы только установили его существование. Сейчас мы предъявим точное представление $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$, которое будет явно выписано в терминах $\mathscr{A}$, δ, δ_*. По ассоциации со стандартными регулярными представлениями для известных различных версий скрещенных произведений имеет смысл назвать его *регулярным представлением* $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$. В действительности конструкция этого представления была получена при доказательстве теоремы 3.1 в [11].

Вначале мы построим нужное гильбертово пространство H с помощью элементов исходной алгебры $\mathscr{A}$ следующим образом. Пусть $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – некоторое неотрицательное скалярное произведение на $\mathscr{A}$ (отличающееся от обычного скалярного произведения лишь тем, что для некоторых ненулевых элементов $v \in \mathscr{A}$ выражение $\langle v, v\rangle$ может равняться нулю). Например, это скалярное произведение может иметь вид $\langle v, u\rangle = f(u^*v)$, где f – какой-нибудь положительный линейный функционал на $\mathscr{A}$. Если профакторизовать $\mathscr{A}$ по всем элементам v, для которых $\langle v, v\rangle = 0$, то получится линейное пространство со строго положительным скалярным произведением. Пополнение этого пространства по норме $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ мы будем называть *гильбертовым пространством*, *порожденным скалярным произведением* $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$.

Построим искомую тройку (H, U, π) с помощью тройки $(\mathscr{A}, \delta, \delta_*)$. Пусть F – множество всех положительных линейных функционалов на $\mathscr{A}$. Пространство H будет построено как пополнение прямой суммы $\bigoplus_{f\in F} H^f$ некоторых гильбертовых пространств H^f. Каждое H^f, в свою очередь, будет пополнением прямой суммы гильбертовых пространств $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H_n^f$. Эти H_n^f порождаются неотрицательными скалярными произведениями $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_n$ на исходной алгебре $\mathscr{A}$, которые определяются формулами

$$\langle v, u\rangle_0 = f(u^*v), \tag{3.6}$$
$$\langle v, u\rangle_n = f\bigl(\delta_*^n(u^*v)\bigr), \qquad n \geqslant 0, \tag{3.7}$$
$$\langle v, u\rangle_n = f\bigl(u^*\delta^{|n|}(1)v\bigr), \qquad n \leqslant 0. \tag{3.8}$$

Отметим следующее свойство данных скалярных произведений (см. [11; лемма 3.2]): для всех $v, u \in \mathscr{A}$ выполняются равенства

$$\langle \delta(v), u\rangle_{n+1} = \langle v, \delta_*(u)\rangle_n, \qquad n \geqslant 0, \tag{3.9}$$
$$\langle \delta^{|n|}(1)v, u\rangle_{n+1} = \langle v, \delta^{|n|}(1)u\rangle_n, \qquad n < 0. \tag{3.10}$$

Теперь определим операторы U и U^* на построенном пространстве H. Эти операторы оставляют инвариантными все подпространства $H^f \subset H$. Действия U и U^* на каждом H^f одинаковы и схематично изображены в первой строке следующей диаграммы:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\underset{U^*}{\overset{U}{\rightleftarrows}}: & \cdots & \underset{\delta^3(1)}{\overset{\delta^3(1)}{\rightleftarrows}} & H_{-2}^f & \underset{\delta^2(1)}{\overset{\delta^2(1)}{\rightleftarrows}} & H_{-1}^f & \underset{\delta(1)}{\overset{\delta(1)}{\rightleftarrows}} & H_0^f & \underset{\delta_*}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} & H_1^f \underset{\delta_*}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} & H_2^f \underset{\delta_*}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} & \cdots \\
\pi(a): & \cdots & & \delta^2(a) & & \delta(a) & & a & & a & a & \cdots
\end{array}$$

Формально это действие определяется так. Возьмем любую конечную сумму

$$h = \bigoplus_n h_n \in H^f, \qquad h_n \in H_n^f.$$

Положим

$$Uh = \bigoplus_n (Uh)_n, \qquad U^*h = \bigoplus_n (U^*h)_n,$$

где

$$(Uh)_n = \begin{cases} \delta(h_{n-1}), & \text{если } \; n > 0, \\ \delta^{|n|+1}(1)h_{n-1}, & \text{если } \; n \leqslant 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$(U^*h)_n = \begin{cases} \delta_*(h_{n+1}), & \text{если } \; n \geqslant 0, \\ \delta^{|n|}(1)h_{n+1}, & \text{если } \; n < 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Равенства (3.9) и (3.10) гарантируют, что операторы U и U^* определены корректно (т.е. сохраняют факторизацию и пополнение, с помощью которых пространства H_n^f строились из алгебры $\mathscr{A}$) и взаимно сопряжены.

Теперь определим представление $\pi\colon \mathscr{A} \to L(H)$. Для каждого $a \in \mathscr{A}$ оператор $\pi(a)\colon H \to H$ будет оставлять инвариантными подпространства $H^f \subset H$, а также все подпространства $H_n^f \subset H^f$. Если $h_n \in H_n^f$, то положим

$$\pi(a)h_n = \begin{cases} ah_n, & n \geqslant 0, \\ \delta^{|n|}(a)h_n, & n \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Схема действия оператора $\pi(a)$ изображена во второй строке вышеприведенной диаграммы.

В процессе доказательства теоремы 3.1 в [11] было проверено, что вышеописанная тройка (H, π, U) удовлетворяет всем условиям определения 2.4, а свойство (*) может быть доказано точно так же, как в замечании 3.4.

3.3. Коэффициенты элементов скрещенного произведения. Результаты из [10] дают возможность сказать больше о структуре и свойствах элементов $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$, и ниже мы приведем эти свойства.

Поскольку отображение $\widehat{U} \cdot \widehat{U}^*\colon \widehat{\mathscr{A}} \to \widehat{\mathscr{A}}$ является эндоморфизмом, то для любого $k \in \mathbb{N}$ отображение $\widehat{U}^k \cdot \widehat{U}^{*k}\colon \widehat{\mathscr{A}} \to \widehat{\mathscr{A}}$ тоже является эндоморфизмом. Поэтому $\widehat{U}^k \widehat{U}^{*k}$ является проектором, а $\widehat{U}^k$, $k \in \mathbb{N}$, – частичной изометрией. Значит, $\widehat{U}^k = \widehat{U}^k \widehat{U}^{*k} \widehat{U}^k$ и $\widehat{U}^{*k} = \widehat{U}^{*k} \widehat{U}^k \widehat{U}^{*k}$. Поэтому мы всегда можем выбрать коэффициенты $\widehat{a}_k$ и $\widehat{a}_{-k}$ в (3.2) таким образом, что

$$\widehat{a}_k \widehat{U}^k \widehat{U}^{*k} = \widehat{a}_k, \qquad \widehat{U}^k \widehat{U}^{*k} \widehat{a}_{-k} = \widehat{a}_{-k}. \tag{3.14}$$

Следующее предложение показывает, что предположение о том, что коэффициенты $\widehat{a}_k, \widehat{a}_{-k} \in \widehat{\mathscr{A}}$, $k = 1, \ldots, N$, в разложении (3.2) удовлетворяют (3.14), гарантирует их единственность. Более того, из теоремы 3.10 будет вытекать, что каждый элемент $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$ однозначно определяется этими коэффициентами.

Предложение 3.8. *Если коэффициенты элемента x в (3.2) удовлетворяют (3.14), то*

$$\|\widehat{a}_k\| = \|a_k\| \leqslant \|x\|, \qquad \|\widehat{a}_{-k}\| = \|a_{-k}\| \leqslant \|x\| \tag{3.15}$$

для всех $k \in \{0, 1, \dots, N\}$. В частности, эти коэффициенты определяются однозначно.

Поскольку $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$ обладает свойством $(^*)$, это вытекает из [10; предложение 2.6].

Предложение 3.8 означает, что мы можем определить линейные непрерывные отображения $\mathscr{N}_k : C_0 \to \mathscr{A}$ и $\mathscr{N}_{-k} : C_0 \to \mathscr{A}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{N}_k(x) = a_k \in \mathscr{A} U^k U^{*k} \subset \mathscr{A}, \qquad \mathscr{N}_{-k}(x) = a_{-k} \in U^k U^{*k} \mathscr{A} \subset \mathscr{A}. \tag{3.16}$$

По непрерывности эти отображения могут быть продолжены на все $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$, определяя таким образом “коэффициенты” любого элемента $x \in \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$.

Приведенная ниже теорема 3.9 показывает, что норма элемента $x \in C_0$ может быть вычислена в терминах элементов одной только алгебры $\mathscr{A}$ (коэффициентов нулевой степени для различных степеней xx^*).

Теорема 3.9. *Для каждого элемента $x \in C_0$ вида (3.2)*

$$\|x\| = \lim_{k\to\infty} \sqrt[4k]{\left\| \mathscr{N}_0 \left[(xx^*)^{2k} \right] \right\|}, \tag{3.17}$$

где отображение $\mathscr{N}_0$ определено в (3.16).

Это вытекает из [10; теорема 2.11].

Мы завершим этот пункт утверждением, показывающим, что $\mathscr{N}_0$ является условным математическим ожиданием, отображающим $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$ на $\mathscr{A}$, и что каждый элемент $x \in \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$ может быть “восстановлен” по своим коэффициентам $\mathscr{N}_k(x)$ и $\mathscr{N}_{-k}(x)$.

Теорема 3.10. *Пусть $x \in \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) $x = 0$;

(ii) $\mathscr{N}_k(x) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$;

(iii) $\mathscr{N}_0(x^*x) = 0$.

Это вытекает из [10; теорема 2.15].

§ 4. Различные скрещенные произведения

В этом параграфе мы перечислим ряд востребованных конструкций скрещенных произведений, ассоциированных с C^*-алгебрами того или иного сорта и эндоморфизмами, и обсудим, как они соотносятся со скрещенным произведением, определенным в этой статье.

4.1. Мономорфизмы с наследственным образом. Начнем со скрещенного произведения, определенного в предположении выполнения некоторого специального условия. Это скрещенное произведение было рассмотрено в [5].

Рассмотрим C^*-алгебру $\mathscr{A}$ с единицей 1 и мономорфизм с наследственным образом $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$. Обозначим через $\mathscr{U}(\mathscr{A},\delta)$ универсальную C^*-алгебру с единицей, порожденную алгеброй $\mathscr{A}$ и изометрией T, удовлетворяющей соотношению

$$\delta(a) = TaT^*, \qquad a \in \mathscr{A}. \tag{4.1}$$

В [5] эта алгебра $\mathscr{U}(\mathscr{A},\delta)$ была предложена в качестве определения скрещенного произведения $\mathscr{A}$ на δ.

Поскольку $\delta(\mathscr{A})$ есть наследственная подалгебра в $\mathscr{A}$, из [6; предложение 4.1] следует, что $\delta(\mathscr{A}) = \delta(1)\mathscr{A}\delta(1)$. Таким образом, мы оказываемся в условиях, описанных в п. 3) теоремы 2.2 с $P = 1$. Отсюда следует, что для рассматриваемого эндоморфизма δ существует единственный полный трансфер-оператор δ_*, задаваемый формулой (2.4). Значит, мы можем построить скрещенное произведение $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$. Из определения 2.6 скрещенного произведения $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$, универсальности $\mathscr{U}(\mathscr{A},\delta)$ и (4.1) вытекает, что $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$ является представлением $\mathscr{U}(\mathscr{A},\delta)$, и поскольку $\mathscr{A}$ вложена в $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$, она также вложена и в $\mathscr{U}(\mathscr{A},\delta)$. Поэтому мы можем рассматривать $\mathscr{A}$ как подалгебру в $\mathscr{U}(\mathscr{A},\delta)$.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathscr{A}$ является C^*-алгеброй с единицей* 1 *и $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ – мономорфизм с наследственным образом. Тогда отображение*

$$\varphi\colon \mathscr{U}(\mathscr{A},\delta) \to \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z},$$

для которого $\varphi(T) = \widehat{U}$ и $\varphi(a) = \widehat{a}$ при всех $a \in \mathscr{A}$, где $\widehat{a}$ и $\widehat{U}$ – канонические образы соответственно $a \in \mathscr{A}$ и U в $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$, является *-изоморфизмом.

Доказательство. Из предшествующего данному предложению рассуждения вытекает, что φ есть *-эпиморфизм, и для завершения доказательства достаточно заметить, что

$$T^*aT = \delta_*(a), \qquad a \in \mathscr{A}.$$

Последнее вытекает из (4.1), (2.4), равенства $T^*T = 1$ и соотношений

$$T^*aT = T^*TT^*aTT^*T = T^*\delta(1)a\delta(1)T = T^*\delta\delta_*(a)T = T^*T\delta_*(a)T^*T = \delta_*(a).$$

4.2. Частичное скрещенное произведение. Понятие частичного скрещенного произведения C^*-алгебры на группу $\mathbb{Z}$ частичных автоморфизмов было введено Экселем в [21], а затем обобщено МакКланаханом в [22] до скрещенного произведения C^*-алгебры и частичного действия дискретной группы. Точные представления этих скрещенных произведений были описаны в [23].

В рамках настоящей статьи естественно ограничиться группой $\mathbb{Z}$. Напомним понятие частичного скрещенного произведения из [21].

Определение 4.2. *Частичный автоморфизм* C^*-алгебры A – это тройка $\Theta = (\theta, I, J)$, в которой I и J являются двусторонними замкнутыми идеалами в A и $\theta\colon I \to J$ есть *-изоморфизм.

Для заданного частичного автоморфизма при каждом целом n можно рассмотреть множество D_n – область определения θ^{-n} (которая равна образу θ^n). Примем соглашение, что $D_0 = A$ и θ^0 – тождественный автоморфизм A.

Для всякого целого n множество D_n является идеалом в A (см. [21; предложение 3.2]).

Для удобства изложения мы дадим ниже определение частичного скрещенного произведения, которое отличается от исходного определения Экселя, но в действительности равносильно ему (см. [21; §§ 3, 5]).

Частичное скрещенное произведение для $\Theta = (\theta, I, J)$ – это универсальная обертывающая C^*-алгебра $C^*(A, \Theta)$, порождаемая конечными суммами

$$a_{-n}V^{*n} + \dots + a_{-1}V^* + a_0 + a_1V + \dots + a_nV^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

где $a_i \in D_i$, $i \in \mathbb{Z}$, и V – такая частичная изометрия, что:

(i) начальным пространством для V является замыкание $I\mathscr{H}$ и финальным пространством для V является замыкание $J\mathscr{H}$ (здесь $\mathscr{H}$ – пространство, на котором действует A);

(ii) $VaV^* = \theta(a)$, $a \in I$.

Замечание 4.3. Из условия (i), в частности, следует, что оба проектора V^*V и VV^* принадлежат коммутанту A. Помимо этого из условий (i) и (ii) вытекает, что $V^*aV = \theta^{-1}(a)$, $a \in J$.

Следующее предложение описывает условия на алгебру коэффициентов, при которых введенное в настоящей статье скрещенное произведение является частичным скрещенным произведением.

Предложение 4.4. *Если δ_* – полный трансфер-оператор для пары $(\mathscr{A}, \delta)$ и $\delta(1) \in Z(\mathscr{A})$, то:*

1) *тройка $\Theta = (\delta, \delta_*(1)\mathscr{A}, \delta(1)\mathscr{A})$ есть частичный автоморфизм;*

2) *$\delta_* \colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ является эндоморфизмом;*

3) *отображение*

$$\phi \colon C^*(\mathscr{A}, \Theta) \to \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z},$$

для которого $\varphi(V) = \widehat{U}$ и $\varphi(a) = \widehat{a}$ при всех $a \in \mathscr{A}$, где $\widehat{a}$ и $\widehat{U}$ – канонические образы соответственно $a \in \mathscr{A}$ и U в $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$, является *-изоморфизмом.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) доказаны в [11; предложение 2.9]. Применяя равенство (2.2) и условие $\delta(1) \in Z(\mathscr{A})$, получаем для всех $a, b \in \mathscr{A}$

$$\delta(\delta_*(a)b) = \delta\delta_*(a)\delta(b) = \delta(1)a\delta(1)\delta(b) = a\delta(b).$$

Это означает, что δ есть трансфер-оператор для δ_*. Поэтому для всех $n \in \mathbb{N}$ будет $\delta^n(1) \in Z(\mathscr{A})$ и $\delta_*^n(1) \in Z(\mathscr{A})$. Нетрудно видеть, что $D_n = \mathscr{A}\delta^n(1)$ и $D_{-n} = \mathscr{A}\delta_*^n(1)$ (здесь D_n – идеалы из определения 4.2).

Теперь утверждение 3) вытекает из определения $C^*(\mathscr{A}, \Theta)$, определения скрещенного произведения $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$ и предложения 3.2. Нужно только заметить, что поскольку $\delta^n(1) = \widehat{U}^n\widehat{U}^{*n} \in Z(\widehat{\mathscr{A}})$, то справедливы равенства

$$\widehat{U}^{*n}\widehat{a} = \widehat{U}^{*n}\widehat{U}^n\widehat{U}^{*n}\widehat{a} = \widehat{U}^{*n}\widehat{a}\widehat{U}^n\widehat{U}^{*n} = \delta_*^n(\widehat{a})\widehat{U}^{*n}\widehat{U}^n\widehat{U}^{*n} = \delta_*^n(\widehat{a})\delta_*^n(1)\widehat{U}^{*n},$$
$$\widehat{a}\widehat{U}^n = \widehat{a}\widehat{U}^n\widehat{U}^{*n}\widehat{U}^n = \widehat{a}\delta^n(1)\widehat{U}^n,$$

и потому выражение (3.2) совпадает с (4.2).

Предложение 4.4 “почти обратимо”. Точнее говоря, с помощью “небольшого” (естественного) продолжения частичного автоморфизма всегда можно получить алгебру коэффициентов, удовлетворяющую условиям предложения 4.4.

В самом деле, пусть A – алгебра с единицей и $\Theta = (\theta, I, J)$ – тройка из определения 4.2. Обозначим через $A_1 = \{A, VV^*, V^*V\}$ обертывающую C^*-алгебру, порождаемую элементами A, VV^* и V^*V (где V – частичная изометрия из определения частичного скрещенного произведения). Множества VV^*A и V^*VA являются идеалами в A_1 и изоморфизм $\theta\colon I \to J$ продолжается до изоморфизма

$$\tilde{\theta}\colon V^*VA \to VV^*A.$$

Очевидно, отображение

$$\delta\colon A_1 \to A_1, \qquad \delta(\,\cdot\,) = \tilde{\theta}(V^*V\cdot),$$

является эндоморфизмом A_1, а отображение

$$\delta_*\colon A_1 \to A_1, \qquad \delta_*(\,\cdot\,) = \tilde{\theta}^{-1}(VV^*\cdot),$$

является полным трансфер-оператором для (A_1, δ).

Поскольку $\delta(1) = VV^* \in Z(A_1)$, тройка (A_1, δ, δ_*) удовлетворяет всем условиям предложения 4.4.

Таким образом, допуская небольшую вольность речи, можно сказать, что частичное скрещенное произведение – это скрещенное произведение, введенное в настоящей статье, при дополнительном предположении $\delta(1) \in Z(\mathscr{A})$.

4.3. Алгебры Кунца–Кригера. В этом пункте A будет обозначать матрицу размерности $n \times n$ с элементами $A(i,j) \in \{0,1\}$ для всех i, j, в которой каждая строка и каждый столбец содержит хотя бы одну единицу. Алгебра Кунца–Кригера $\mathscr{O}_A$ (см. [2]) – это C^*-алгебра, порожденная частичными изометриями S_i, $i \in 1,\dots,n$, которые действуют на некотором гильбертовом пространстве таким образом, что проекторы на их носители $Q_i = S_i^*S_i$ и проекторы на их образы $P_i = S_iS_i^*$ удовлетворяют соотношениям

$$P_iP_j = 0, \quad i \neq j; \qquad Q_i = \sum_{r=1}^{n} A(i,r)P_r, \quad i,j \in 1,\dots,n. \tag{4.3}$$

Такого рода алгебры естественно возникают как объекты, ассоциированные с топологическими цепями Маркова, и служат предметом многочисленных исследований.

Мы покажем, что $\mathscr{O}_A$ естественно рассматривать как специальный случай введенного нами скрещенного произведения.

Сумма проекторов на образы P_i является единицей в $\mathscr{O}_A$. Для любого мультииндекса $\mu=(i_1,\dots,i_k)$, в котором $i_j\in 1,\dots,n$, обозначим через $|\mu|$ его длину k и положим $S_\varnothing=1$, $S_\mu=S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}$ ($\varnothing$ тоже рассматривается как мультииндекс). В [2] показано, что все S_μ являются частичными изометриями.

Мы напомним с связи с этим, что произведение двух частичных изометрий не обязательно будет частичной изометрией. Критерий того, что произведение двух частичных изометрий будет частичной изометрией, дается в следующем предложении.

Предложение 4.5 (см. [24; лемма 2]). *Если S и T – частичные изометрии, то ST будет частичной изометрией тогда и только тогда, когда S^*S коммутирует с TT^*.*

Символы P_μ, Q_μ будут обозначать проекторы на область значений и на носитель S_μ соответственно. Предыдущие рассмотрения означают, что для любых двух мультииндексов μ и ν проекторы P_μ и Q_ν коммутируют.

Вдобавок по лемме 2.1 из [2] при $|\mu|=|\nu|$ будет

$$S_\mu^*S_\nu\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad \mu=\nu,\qquad S_\mu^*S_\nu=Q_\mu=Q_{i_k},\quad \mu=(i_1,\dots,i_k), \tag{4.4}$$

откуда следует

$$P_\mu P_\nu=\delta_{\mu,\nu}P_\mu, \tag{4.5}$$

и поскольку $\sum_i P_i=1$, получаем

$$\sum_{|\mu|=k}P_\mu=1. \tag{4.6}$$

Пусть $\mathscr{F}_A$ будет C^*-алгеброй, порожденной всеми элементами вида $S_\mu P_i S_\nu^*$, где $|\mu|=|\nu|=k$, $k=0,1,\dots$; $i\in 1,\dots,n$. Очевидно,

$$S_i\mathscr{F}_AS_i^*\subset\mathscr{F}_A,\qquad i\in 1,\dots,n. \tag{4.7}$$

В [2; лемма 2.2] также показано, что

$$S_i^*\mathscr{F}_AS_i\subset\mathscr{F}_A,\qquad i\in 1,\dots,n. \tag{4.8}$$

Более того, предложение 2.8 из [2] утверждает, что каждый элемент X из *-алгебры $\mathscr{O}_A$, порожденной S_i, $i\in 1,\dots,n$, может быть записан как конечная сумма:

$$X=\sum_{|\nu|\geqslant 1}X_\nu S_\nu^*+X_0+\sum_{|\mu|\geqslant 1}S_\mu X_\mu, \tag{4.9}$$

где $X_\nu,X_0,X_\mu\in\mathscr{F}_A$, и для X из (4.9) справедливо неравенство

$$\|X\|\geqslant\|X_0\|. \tag{4.10}$$

Для каждого проектора P_i, $i\in 1,\dots,n$, положим

$$\alpha(P_i)=\sum_{j=1}^n S_jP_iS_j^*=\sum_{j=1}^n P_{j,i}. \tag{4.11}$$

Ясно, что $\alpha(P_i) \in \mathscr{F}_A$. Более того, из (4.11), (4.5) и (4.6) следует, что

$$\alpha(P_i)\alpha(P_j) = 0, \qquad i \neq j, \tag{4.12}$$

$$\sum_i \alpha(P_i) = 1. \tag{4.13}$$

Продолжим формулу (4.11) по линейности:

$$\alpha(Q_i) = \sum_{r=1}^{n} A(i,r)\alpha(P_r). \tag{4.14}$$

Положим

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i, \tag{4.15}$$

$$\alpha(Q) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(Q_i). \tag{4.16}$$

Очевидно, $\alpha(Q_i), Q, \alpha(Q) \in \mathscr{F}_A$, и поскольку в матрице A нет нулевых столбцов, из (4.3) вместе с (4.15), а также из (4.13), (4.14) и (4.16) следует, что

$$Q \geqslant 1, \qquad \alpha(Q) \geqslant 1. \tag{4.17}$$

Положим

$$S = \alpha(Q)^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} S_i. \tag{4.18}$$

Отсюда и из (4.4) мы получаем

$$S_i = P_i \alpha(Q)^{1/2} S. \tag{4.19}$$

Заметим теперь, что S – изометрия. Действительно, в силу (4.15), (4.16) и (4.14) будет

$$\alpha(Q) = \sum_{r=1}^{n} \gamma_r \alpha(P_r), \tag{4.20}$$

где $\gamma_r \neq 0$, $r = 1, \dots, n$, и

$$Q = \sum_{r=1}^{n} \gamma_r P_r. \tag{4.21}$$

Поэтому

$$\alpha(Q)^{-1} = \sum_{r=1}^{n} \gamma_r^{-1} \alpha(P_r), \tag{4.22}$$

$$Q^{-1} = \sum_{r=1}^{n} \gamma_r^{-1} P_r. \tag{4.23}$$

Теперь в силу (4.18) и (4.4)

$$S^*S = \sum_{i,j} S_i^* \alpha(Q)^{-1} S_j = \sum_j S_j^* \alpha(Q)^{-1} S_j.$$

Подставляя (4.22) в последнюю формулу и используя (4.11), (4.23) и (4.4), получаем

$$\begin{aligned} S^*S &= \sum_j S_j^* \sum_r \gamma_r^{-1} \alpha(P_r) S_j = \sum_j \sum_r \gamma_r^{-1} \sum_i S_j^* S_i P_r S_i^* S_j \\ &= \sum_j \sum_r \gamma_r^{-1} Q_j P_r = \sum_j Q_j \sum_r \gamma_r^{-1} P_r = QQ^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Значит, S – изометрия.

Из (4.18), (4.7) и (4.8) мы заключаем, что

$$S\mathscr{F}_A S^* \subset \mathscr{F}_A, \qquad S^*\mathscr{F}_A S \subset \mathscr{F}_A. \tag{4.24}$$

Из изометричности S следует, что отображение $\delta\colon \mathscr{F}_A \to \mathscr{F}_A$, определяемое формулой

$$\delta(\,\cdot\,) = S(\,\cdot\,)S^*, \tag{4.25}$$

является эндоморфизмом на $\mathscr{F}_A$.

Формулы (4.24) и (4.25) означают, что $\mathscr{F}_A$ является алгеброй коэффициентов для C^*-алгебры $C^*(\mathscr{F}_A, S)$ и

$$\delta_*(\,\cdot\,) = S^*(\,\cdot\,)S. \tag{4.26}$$

Теперь мы готовы ввести структуру скрещенного произведения на C^*-алгебре Кунца–Кригера $\mathscr{O}_A$.

Предложение 4.6. *Для всякой матрицы A размерности $n\times n$ без нулевых строк и столбцов*

$$\mathscr{O}_A = C^*(\mathscr{F}_A, S) \cong \mathscr{F}_A \times_\delta \mathbb{Z},$$

где изоморфизм

$$\varphi\colon C^*(\mathscr{F}_A, S) \to \mathscr{F}_A \times_\delta \mathbb{Z}$$

удовлетворяет условиям $\varphi(S) = \widehat{U}$ и $\varphi(a) = \widehat{a}$ для всех $a \in \mathscr{F}_A$, где $\widehat{a}$ и $\widehat{U}$ – канонические образы соответственно $a \in \mathscr{F}_A$ и U в $\mathscr{F}_A \times_\delta \mathbb{Z}$, а δ и δ_* определены формулами (4.25) *и* (4.26).

Доказательство. Равенство $\mathscr{O}_A = C^*(\mathscr{F}_A, S)$ следует из (4.18), (4.19), (4.9) и того, что P_i при $i \in 1, \dots, n$ и $\alpha(Q)$ принадлежат $\mathscr{F}_A$.

Заметим, что (4.10) есть не что иное, как свойство $(^*)$ для $C^*(\mathscr{F}_A, S)$. Поэтому требуемый результат вытекает из теоремы 3.5.

4.4. Скрещенное произведение типа Пашке. Анализируя простоту алгебры Кунца (рассмотренную в [1]), У. Л. Пашке нашел некоторое условие на действие эндоморфизма, порожденного изометрией S, при котором C^*-алгебра $C^*(A, S)$, порожденная исходной C^*-алгеброй A и S, изоморфна некоторому скрещенному произведению и одновременно проста. Его результат формулируется так.

Теорема 4.7 (см. [3; теорема 1]). *Пусть A – строго аменабельная C^*-алгебра с единицей, действующая на гильбертовом пространстве H. Предположим, что S является неединичной изометрией (т.е. $S^*S = 1 \neq SS^*$) в $L(H)$, для которой*:

(i) $SAS^* \subset A$, $S^*AS \subset A$;

(ii) *из того, что собственный (двусторонний) идеал J удовлетворяет условию $SJS^* \subseteq J$, следует $J = \{0\}$.*

Тогда алгебра $C^*(A, S)$ проста.

Сейчас мы убедимся, что этот результат Пашке может быть легко обобщен на ситуацию, рассматриваемую в настоящей статье. Прежде всего приведем следующую лемму.

Лемма 4.8. *Пусть A – алгебра коэффициентов для $C^*(A, V)$ (см. определение 2.3). Предположим, что A строго аменабельна, $VV^* \neq 1$ и единственный собственный (двусторонний) идеал J, для которого выполняется условие $VJV^* \subseteq J$, является нулевым. Тогда $C^*(A, V)$ обладает свойством $(^*)$.*

Доказательство. Достаточно воспроизвести соответствующие части доказательств лемм 2 и 3 из [3], используя, где это необходимо, вместо условия Пашке $S^*S = 1$ свойство алгебры коэффициентов $V^*V \in Z(A)$. Подробности опускаем.

Как следствие из этой леммы получаем следующее обобщение теоремы 4.7.

Теорема 4.9. *Пусть A – алгебра коэффициентов для $C^*(A, V)$ (см. определение 2.3). Предположим, что A строго аменабельна, $VV^* \neq 1$ и единственный собственный (двусторонний) идеал J, для которого выполняется условие $VJV^* \subseteq J$, является нулевым. Тогда*:

1) $C^*(A, V) \cong A \times_\delta \mathbb{Z}$, *где* $\delta(\,\cdot\,) = V(\,\cdot\,)V^*$ *и* $\delta_*(\,\cdot\,) = V^*(\,\cdot\,)V$, *причем изоморфизм*
$$\varphi\colon C^*(A, V) \to A \times_\delta \mathbb{Z}$$
удовлетворяет условиям $\varphi(V) = \widehat{U}$ *и* $\varphi(a) = \widehat{a}$ *для всех* $a \in A$, *где* $\widehat{a}$ *и* $\widehat{U}$ *– канонические образы соответственно* $a \in A$ *и* U *в* $A \times_\delta \mathbb{Z}$;

2) *алгебра $C^*(A, V)$ проста.*

Доказательство. 1) В силу леммы 4.8 алгебра $C^*(A, V)$ обладает свойством $(^*)$. Поэтому утверждение 1) вытекает из теоремы 3.5.

2) Пусть I – любой собственный идеал в $C^*(A, V)$. Тогда $J = I \cap A$ будет собственным идеалом в A (поскольку в случае $J = A$ будет $I = C^*(A, V)$). Ясно, что $VJV^* \subseteq J$ и потому
$$I \cap A = J = \{0\}. \tag{4.27}$$
Рассмотрим каноническое отображение $\pi\colon C^*(A, V) \to C^*(A, V)/I$. Легко видеть, что $\pi(C^*(A, V)) = C^*(\pi(A), \pi(V))$, и для любого $a \in A$ мы имеем
$$\pi(V^*aV) = \pi(V)^*\pi(a)\pi(V), \qquad \pi(VaV^*) = \pi(V)\pi(a)\pi(V)^*,$$
$$\pi(V^*V) \in Z(\pi(A)).$$

Из (4.27) следует, что

$$\pi(A) \cong A/(A \cap I) \cong A.$$

Значит, $\pi(C^*(A,V)) = C^*(\pi(A), \pi(V))$ удовлетворяет всем условиям леммы 4.8 с $\pi(A)$, $\pi(V)$ вместо A, V. Поэтому в силу уже доказанной части 1) теоремы

$$\pi(C^*(A,V)) \cong A \times_\delta \mathbb{Z} \cong C^*(A,V).$$

Следовательно, $I = \{0\}$.

4.5. Скрещенное произведение Экселя. Р. Эксель предложил в [6] новое определение для скрещенного произведения C^*-алгебры с единицей на эндоморфизм α и некоторый трансфер-оператор $\mathscr{L}$. Он также доказал в [6], что эта новая конструкция обобщает многие из известных до того конструкций, в числе которых упомянутые выше мономорфизмы с наследственным образом, скрещенное произведение Пашке и алгебры Кунца–Кригера (мы думаем, что в действительности главным устремлением Экселя было обобщить конструкцию Кунца–Кригера, в чем он полностью преуспел).

В этом пункте мы проанализируем связь между скрещенными произведениями Экселя и нашим. Мы покажем, с одной стороны, что скрещенное произведение, введенное в настоящей статье, является частным случаем произведения Экселя и, с другой стороны, что в наиболее естественных ситуациях (когда все степени $\mathscr{L}$ порождены частичными изометриями) скрещенное произведение Экселя относится к введенному здесь типу, но с другой алгеброй, другим эндоморфизмом и другим трансфер-оператором. На самом деле в общей ситуации "философия" скрещенного произведения более своеобразна и тонка (обсудим это ниже).

В этом пункте A будет обозначать C^*-алгебру с единицей, $\alpha\colon A \to A$ будет *-эндоморфизмом и $\mathscr{L}$ будет некоторым трансфер-оператором для пары (A, α) (иными словами, $\mathscr{L}\colon A \to A$ является положительным непрерывным оператором, удовлетворяющим условию (2.1) с δ вместо α и δ_* вместо $\mathscr{L}$).

Определение 4.10. *Скрещенное произведение* (Экселя) $A \times_{\alpha,\mathscr{L}} \mathbb{N}$ – это универсальная C^*-алгебра, порожденная экземпляром алгебры A и элементом S, удовлетворяющими соотношениям:

(i) $Sa = \alpha(a)S$, $a \in A$;

(ii) $S^*aS = \mathscr{L}(a)$, $a \in A$;

(iii) если пара $(a,k) \in \overline{A\alpha(A)A} \times \overline{ASS^*A}$ такова, что

$$abS = kbS \tag{4.28}$$

для всех $b \in A$, то $a = k$; здесь $\overline{A\alpha(A)A}$ – замкнутое линейное подпространство, порожденное $A\alpha(A)A$ (двусторонним идеалом в A, порожденным $\alpha(A)$), и $\overline{ASS^*A}$ – замкнутое линейное подпространство, порожденное ASS^*A.

Любая пара (a,k) из (iii) называется *бесполезной* (*redundancy*).

Обозначение 4.11. *Будем обозначать через* $\mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L})$ *универсальную алгебру, удовлетворяющую условиям* (*i*) *и* (*ii*) *определения* 4.10.

Замечание 4.12. Р. Эксель показал в [6; 3.5], что для любого эндоморфизма α и трансфер-оператора $\mathscr{L}$ алгебра $\mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L})$ невырождена (т.е. каноническое отображение $A\to\mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L})$ инъективно).

Поэтому скрещенное произведение $A\times_{\alpha,\mathscr{L}}\mathbb{N}$ можно считать фактор-алгеброй $\mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L})$ по замкнутому двустороннему идеалу $\mathscr{I}$, порожденному множеством разностей $a-k$ для всех бесполезных пар (a,k).

В противоположность ситуации с $\mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L})$ не для всех α и $\mathscr{L}$ существует естественное вложение A в $A\times_{\alpha,\mathscr{L}}\mathbb{N}$. Условия, гарантирующие инъективность канонического отображения $A\to A\times_{\alpha,\mathscr{L}}\mathbb{N}$, были найдены Н. Браунлавом и И. Райберном (см. [9]). Они формулируются в терминах алгебр Кунца–Кригера.

Вначале убедимся, что введенное в этой статье скрещенное произведение есть частный случай скрещенного произведения Экселя (это будет установлено в теореме 4.16).

Рассуждения здесь полностью аналогичны рассуждениям из [6; раздел 4] и мы приводим их исключительно в целях полноты изложения.

В следующем предложении утверждается, что произведение $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ "не больше", чем $\mathscr{T}(\mathscr{A},\delta,\delta_*)$.

Предложение 4.13. *Пусть пара $(\mathscr{A},\delta)$ отлично представима и δ_* – соответствующий ей трансфер-оператор. Тогда существует единственный *-эпиморфизм*

$$\psi\colon \mathscr{T}(\mathscr{A},\delta,\delta_*)\to\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z},$$

удовлетворяющий условиям $\psi(S)=\widehat{U}$ и $\psi(a)=\widehat{a}$ для всех $a\in\mathscr{A}$.

Доказательство. Поскольку $\delta(\,\cdot\,)=U(\,\cdot\,)U^*$ и $U^*U\in Z(\mathscr{A})$, то для всех $a\in\mathscr{A}$ выполняются равенства

$$Ua=UU^*Ua=UaU^*U=\delta(a)U.$$

Другими словами, соотношения (i), (ii) из определения 4.10 выполняются для $\widehat{\mathscr{A}}$ и $\widehat{U}$ внутри $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ и, следовательно, заключение вытекает из универсальности $\mathscr{T}(\mathscr{A},\delta,\delta_*)$.

Чтобы убедиться в совпадении $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ (скрещенного произведения, введенного в этой статье) и $\mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N}$ (скрещенного произведения Экселя), мы вначале отметим следующий факт.

Предложение 4.14. *Если тройка $(\mathscr{A},\delta,\delta_*)$ удовлетворяет условиям предложения 4.13, то:*

(i) *канонический элемент $S\in\mathscr{T}(\mathscr{A},\delta,\delta_*)$ является частичной изометрией и, следовательно, его образ $\dot{S}\in\mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N}$ – тоже;*
(ii) *для каждого $a\in\mathscr{A}$ пара $(\delta(a),SaS^*)$ является бесполезной.*

Доказательство. (i) В силу (2.3) $\delta_*(1)$ является проектором, и потому S – частичная изометрия.

(ii) Для каждого $b\in\mathscr{A}$ мы имеем

$$SaS^*bS=Sa\delta_*(b)=\delta(a)\delta\delta_*(b)S=\delta(a)\delta(1)b\delta(1)S=\delta(a)bS,$$

где мы использовали полноту δ_* и тот факт, что $\delta(1)S=S1=S$. Остается лишь заметить, что $SaS^*=\delta(a)SS^*\in\overline{\mathscr{A}SS^*\mathscr{A}}$.

Следствие 4.15. *В условиях предложения 4.14 существует единственный* **-эпиморфизм*

$$\phi\colon \mathscr{A}\times_\delta \mathbb{Z}\to \mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N},$$

удовлетворяющий условиям $\phi(\widehat{U})=\dot S$ *и* $\phi(\widehat{a})=\dot a$ *для всех* $a\in\mathscr{A}$, *где* $\dot S$ *и* $\dot a$ *суть канонические образы соответственно* S *и* a *в* $\mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N}$, *а* $\widehat{a}$ *и* $\widehat{U}$ *суть канонические образы* $a\in\mathscr{A}$ *и* U *в* $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ (*здесь* $\mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N}$ *обозначает скрещенное произведение Экселя, а* $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ *обозначает скрещенное произведение, определенное в этой статье*).

Доказательство. По предложению 4.14, (ii) имеем $\delta(\dot a)=\dot S\dot a\dot S^*$. Поэтому заключение вытекает из универсальности $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$.

Итак, $\mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N}$ “не больше”, чем $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$. Следующий результат демонстрирует совпадение между $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ и $\mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N}$.

Теорема 4.16. *Пусть* $(\mathscr{A},\delta)$ *– отлично представимая пара с полным трансфер-оператором* δ_*. *Тогда отображение* ϕ *из следствия 4.15 является* **-изоморфизмом между* $\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z}$ *и* $\mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N}$.

Доказательство. Заметим, что отображение ψ из предложения 4.13 обращается в нуль на идеале $\mathscr{I}$, упомянутом в замечании 4.12. Действительно, пусть $(a,k)\in\overline{\mathscr{A}\delta(\mathscr{A})\mathscr{A}}\times\overline{\mathscr{A}SS^*\mathscr{A}}$ является бесполезной парой. Тогда для всех $b\in\mathscr{A}$ будет $abS=kbS$. Применяя ψ к обеим частям последнего равенства, получаем

$$\widehat{a}\widehat{b}\widehat{U}=\psi(k)\widehat{b}\widehat{U}.$$

Поскольку $\delta(1)=UU^*$, то для всех $b,c\in\mathscr{A}$ выполняется

$$\widehat{a}\widehat{b}\widehat{\delta(1)}\widehat{c}=\widehat{a}\widehat{b}\widehat{U}\widehat{U}^*\widehat{c}=\psi(k)\widehat{b}\widehat{U}\widehat{U}^*\widehat{c}=\psi(k)\widehat{b}\widehat{\delta(1)}\widehat{c}.$$

Следовательно, $\widehat{a}\widehat{x}=\psi(k)\widehat{x}$ для всех $x\in\overline{\mathscr{A}\delta(1)\mathscr{A}}$. Так как $k\in\overline{\mathscr{A}SS^*\mathscr{A}}$, то $\psi(k)\in\overline{\widehat{\mathscr{A}}\widehat{U}\widehat{U}^*\widehat{\mathscr{A}}}=\overline{\widehat{\mathscr{A}}\widehat{\delta(1)}\widehat{\mathscr{A}}}$. Наконец, в силу полноты δ_* имеем

$$a\in\overline{\mathscr{A}\delta(\mathscr{A})\mathscr{A}}=\overline{\mathscr{A}\delta(1)\mathscr{A}\delta(1)\mathscr{A}}=\overline{\mathscr{A}\delta(1)\mathscr{A}}.$$

Таким образом, $\widehat{a}=\psi(k)$. Отсюда следует, что $\psi(a-k)=0$, и потому ψ обращается в нуль на $\mathscr{I}$, как и утверждалось. С помощью факторизации мы получаем отображение

$$\widetilde{\psi}\colon \mathscr{A}\times_{\delta,\delta_*}\mathbb{N}\to\mathscr{A}\times_\delta\mathbb{Z},$$

обратное к отображению ϕ из следствия 4.15.

Таким образом, мы установили, что скрещенное произведение, введенное в настоящей статье, есть частный случай произведения Экселя. Теперь мы пойдем в обратном направлении и покажем, что в “наиболее популярной” ситуации, когда все операторы S^n, $n=1,2,\dots$, являются частичными изометриями (что эквивалентно условию, что все элементы $\mathscr{L}^n(1)$, $n=1,2,\dots$, являются проекторами), скрещенное произведение Экселя будет иметь введенный нами тип, но с другой алгеброй, другим эндоморфизмом и другим трансфер-оператором.

Начнем с результата, показывающего, что при упомянутом предположении само $\mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L})$ обладает структурой некоторого скрещенного произведения.

Теорема 4.17. *Пусть A – C^*-алгебра с единицей, $\alpha\colon A \to A$ – эндоморфизм и $\mathscr{L}$ – трансфер-оператор такой, что все элементы $\mathscr{L}^n(1)$, $n = 1, 2, \dots$, являются проекторами. Пусть $\mathscr{A}$ – C^*-алгебра, порожденная элементами A и $S^k S^{*k}$, $k = 1, 2, \dots$, где S – универсальный оператор, удовлетворяющий соотношениям* (i) *и* (ii) *из определения* 4.10. *Тогда отображение*

$$\nu\colon \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z} \to \mathscr{T}(A, \alpha, \mathscr{L}),$$

для которого $\nu(\widehat{U}) = (S)$ и $\nu(\widehat{a}) = a$ при всех $a \in A$, эндоморфизм $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ имеет вид $\delta(\,\cdot\,) = S(\,\cdot\,)S^*$, а отображение $\delta_*\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ имеет вид $\delta_*(\,\cdot\,) = S^*(\,\cdot\,)S$, устанавливает *-изоморфизм.

Доказательство. Как уже отмечалось, условие, что все элементы $\mathscr{L}^n(1)$, $n = 1, 2, \dots$, являются проекторами, равносильно условию, что все операторы S^k, $k = 1, 2, \dots$, – частичные изометрии. Из этого условия и предложения 4.5 следует, что все операторы $S^{*k}S^k$, $S^j S^{*j}$, $k, j = 1, 2, \dots$, коммутируют друг с другом, и поэтому S^*S принадлежит коммутанту $\mathscr{A}$. Заметим теперь, что для всех $a \in A$ и $k = 1, 2, \dots$ будет

$$SaS^* = \alpha(a)SS^* \in \mathscr{A}, \qquad S(S^k S^{*k})S^* = S^{k+1}S^{*k+1} \in \mathscr{A}$$

и для всех $c, d \in \mathscr{A}$ будет

$$ScdS^* = SS^*ScdS^* = ScS^*SdS^*, \tag{4.29}$$

где мы использовали упомянутую принадлежность S^*S коммутанту $\mathscr{A}$.

Из предыдущих рассуждений следует, что

$$S\mathscr{A}S^* \subset \mathscr{A}, \qquad S^*S \in Z(\mathscr{A}). \tag{4.30}$$

Заметим также, что в силу (4.29) отображение $S(\,\cdot\,)S^*$ является эндоморфизмом $\mathscr{A}$.

Тривиальное вычисление показывает, что

$$S^*\mathscr{A}S \subset \mathscr{A}. \tag{4.31}$$

По определению $\mathscr{T}(A, \alpha, \mathscr{L})$ и $\mathscr{A}$ имеем

$$\mathscr{T}(A, \alpha, \mathscr{L}) = C^*(\mathscr{A}, S). \tag{4.32}$$

Соотношения (4.30) и (4.31) означают, что $\mathscr{A}$ является алгеброй коэффициентов для $C^*(\mathscr{A}, S)$ с $\delta(\,\cdot\,) = S(\,\cdot\,)S^*$ и $\delta_*(\,\cdot\,) = S^*(\,\cdot\,)S$. Теперь из универсальности $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$ следует, что отображение

$$\nu\colon \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z} \to \mathscr{T}(A, \alpha, \mathscr{L}),$$

где $\nu(\widehat{a}) = a$, $a \in A$ и $\nu(\widehat{U}) = S$, является *-эпиморфизмом.

Для доказательства того, что это отображение является *-изоморфизмом, достаточно убедиться, что C^*-алгебра $C^*(\mathscr{A}, S)$ в (4.32) обладает свойством $(^*)$ (в этом случае можно применить теорему 3.5). Проверим это свойство. Пусть A и S – соответственно универсальная алгебра и элемент, которые порождают

$\mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L}) = C^*(\mathscr{A},S)$. Они удовлетворяют соотношениям (4.30) и (4.31), и без потери общности можно считать, что $C^*(\mathscr{A},S)$ есть C^*-подалгебра в $L(H)$ для некоторого гильбертова пространства H и что единица в A совпадает с единицей в $L(H)$. Рассмотрим пространство $\mathscr{H} = l^2(\mathbb{Z},H)$ и представление $\mu\colon \mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L}) \to L(\mathscr{H})$, задаваемое формулами

$$(\mu(a)\xi)_n = a(\xi_n), \qquad a \in A, \quad l^2(\mathbb{Z},H) \ni \xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}};$$
$$(\mu(S)\xi)_n = S(\xi_{n-1}), \qquad (\mu S^*)\xi)_n = S^*(\xi_{n+1}).$$

Легко видеть, что $\mu(\mathscr{A}) \cong \mathscr{A}$ и что $\mu(\mathscr{A})$ и $\mu(S)$ удовлетворяют тем же соотношениям (4.30) и (4.31), а $\mu(S)$ порождает те же самые отображения δ и δ_* на $\mu(\mathscr{A})$. Заметим теперь, что алгебра $C^*(\mu(\mathscr{A}),\mu(S))$ обладает свойством $(^*)$ (достаточно вспомнить рассуждения из замечания 3.4). Но тогда алгебра $C^*(\mathscr{A},S) = \mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L})$ также обладает этим свойством. Теорема доказана.

Теперь мы установим искомый изоморфизм между скрещенным произведением Экселя и скрещенным произведением, определенным в этой статье.

Теорема 4.18. *Пусть выполняются условия теоремы 4.17. Пусть C^*-алгебра $\dot{\mathscr{A}}$ порождается элементами $\dot{A}$ и $\dot{S}^k\dot{S}^{*k}$, $k=1,2,\dots$, где $\dot{S}$ и $\dot{A}$ – канонические образы S и A в $A\times_{\alpha,\mathscr{L}}\mathbb{N}$ соответственно. Тогда отображение*

$$\gamma\colon \dot{\mathscr{A}} \times_\delta \mathbb{Z} \to A\times_{\alpha,\mathscr{L}}\mathbb{N},$$

для которого $\gamma(\widehat{U}) = \dot{S}$ и $\gamma(\widehat{a}) = \dot{a}$ при всех $a\in A$, эндоморфизм $\delta\colon \dot{\mathscr{A}} \to \dot{\mathscr{A}}$ задается формулой $\delta(\,\cdot\,) = \dot{S}(\,\cdot\,)\dot{S}^*$ и отображение $\delta_*\colon \dot{\mathscr{A}} \to \dot{\mathscr{A}}$ задается формулой $\delta_*(\,\cdot\,) = \dot{S}^*(\,\cdot\,)\dot{S}$, устанавливает *-изоморфизм.

Доказательство. В силу (4.30)–(4.32) имеем

$$A\times_{\alpha,\mathscr{L}}\mathbb{N} = C^*(\dot{\mathscr{A}},\dot{S}) \tag{4.33}$$

и $\dot{\mathscr{A}}$ является алгеброй коэффициентов для $C^*(\dot{\mathscr{A}},\dot{S})$ с $\delta(\,\cdot\,) = \dot{S}(\,\cdot\,)\dot{S}^*$ и $\delta_*(\,\cdot\,) = \dot{S}^*(\,\cdot\,)\dot{S}$. Из универсальности $\dot{\mathscr{A}} \times_\delta \mathbb{Z}$ вытекает, что отображение

$$\gamma\colon \dot{\mathscr{A}} \times_\delta \mathbb{Z} \to A\times_{\alpha,\mathscr{L}}\mathbb{N},$$

где $\gamma(\widehat{a}) = \dot{a}$, $a\in A$ и $\gamma(\widehat{U}) = \dot{S}$, есть *-эпиморфизм.

Чтобы доказать изоморфность этого отображения, достаточно убедиться, что C^*-алгебра $C^*(\dot{\mathscr{A}},\dot{S})$ в (4.33) обладает свойством $(^*)$.

Пусть $\dot{A}$ и $\dot{S}$ – соответственно универсальная алгебра и элемент, которые порождают произведение $A\times_{\alpha,\mathscr{L}}\mathbb{N} = C^*(\dot{\mathscr{A}},\dot{S})$. Они удовлетворяют соотношениям (4.30) и (4.31) (для $\dot{\mathscr{A}}$ и $\dot{S}$), и без потери общности мы можем считать, что $C^*(\dot{\mathscr{A}},\dot{S})$ есть C^*-подалгебра в $L(H)$ для некоторого гильбертова пространства H и что единица из $\dot{A}$ совпадает с единицей в $L(H)$. Рассмотрим пространство $\mathscr{H} = l^2(\mathbb{Z},H)$ и представление $\nu\colon \mathscr{T}(A,\alpha,\mathscr{L}) \to L(\mathscr{H})$, задаваемое формулами

$$(\nu(a)\xi)_n = \dot{a}(\xi_n), \qquad a \in A, \quad l^2(\mathbb{Z},H) \ni \xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}};$$
$$(\nu(S)\xi)_n = \dot{S}(\xi_{n-1}), \qquad (\nu(S^*)\xi)_n = \dot{S}^*(\xi_{n+1}).$$

Легко видеть, что $\nu(\mathscr{A}) \cong \dot{\mathscr{A}}$ (здесь $\mathscr{A}$ – C^*-алгебра из теоремы 4.17), $\nu(\mathscr{A})$ и $\nu(S)$ удовлетворяют тем же самым соотношениям (4.30), (4.31) (для $\dot{\mathscr{A}}$ и $\dot{S}$) и $\nu(S)$ порождает те же самые отображения δ и δ_* на $\nu(\mathscr{A})$. Более того, поскольку $\dot{A}$ и $\dot{S}$ удовлетворяют соотношениям (i), (ii) и (iii) из определения 4.10, то по построению ν тем же соотношениям удовлетворяют $\nu(A)$ и $\nu(S)$. Поэтому мы можем рассматривать ν как представление $A \times_{\alpha,\mathscr{L}} \mathbb{N} = C^*(\dot{\mathscr{A}}, \dot{S})$. Но $C^*(\nu(\mathscr{A}), \nu(S))$ обладает свойством $(^*)$ (в силу рассуждений из замечания 3.4). Значит, $C^*(\dot{\mathscr{A}}, \dot{S})$ также обладает этим свойством.

4.6. Скрещенное произведение Квасьневского. Здесь мы опишем структуру скрещенного произведения, введенного Б. К. Квасьневским (см. [7]), и обсудим связь этой структуры со скрещенным произведением, определенным в настоящей статье. Чтобы объяснить мотивировку скрещенного произведения Квасьневского, начнем с двух простых примеров.

Пример 4.19. Рассмотрим гильбертово пространство $H = L^2(\mathbb{R})$. Пусть $A \subset L(H)$ будет C^*-алгеброй операторов умножения на ограниченные непрерывные функции на $\mathbb{R}$, которые постоянны на отрицательной полуоси $\mathbb{R}_- = \{x : x \leqslant 0\}$. Определим унитарный оператор $U \in L(H)$ с помощью формулы

$$(Uf)(x) = f(x-1), \qquad f(\,\cdot\,) \in H. \tag{4.34}$$

Тривиально проверяется, что отображение

$$A \ni a \mapsto UaU^* \tag{4.35}$$

является эндоморфизмом A вида

$$UaU^*(x) = a(x-1), \qquad a(\,\cdot\,) \in A, \tag{4.36}$$

$$U^*aU(x) = a(x+1), \qquad a(\,\cdot\,) \in A. \tag{4.37}$$

Очевидно, отображение $A \ni a \mapsto U^*aU$ не сохраняет A.

Пусть $C^*(A, U)$ обозначает C^*-алгебру, порожденную A и U. Легко видеть, что

$$C^*(A, U) = C^*(\mathscr{A}, U), \tag{4.38}$$

где $\mathscr{A} \subset L(H)$ обозначает C^*-алгебру операторов умножения на ограниченные непрерывные функции на $\mathbb{R}$, имеющие предел при $x \to -\infty$.

Кроме того,

$$U\mathscr{A}U^* \subset \mathscr{A}, \qquad U^*\mathscr{A}U \subset \mathscr{A}, \tag{4.39}$$

причем действие операторов $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$ и $\delta_*(\,\cdot\,) = U^*(\,\cdot\,)U$ на $\mathscr{A}$ определяется формулами (4.36) и (4.37).

Таким образом, $\mathscr{A}$ является алгеброй коэффициентов для $C^*(\mathscr{A}, U)$.

Кроме того, легко проверяется, что $C^*(\mathscr{A}, U)$ обладает свойством $(^*)$. Поэтому из теоремы 3.5 мы заключаем, что

$$C^*(A, U) = C^*(\mathscr{A}, U) \cong \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}. \tag{4.40}$$

Подчеркнем, что рассматриваемая ситуация не удовлетворяет условиям, при которых определяется скрещенное произведение Экселя, поскольку мы начинаем с таких алгебры A и оператора U, при которых отображение $A \ni a \mapsto U^*aU$

(4.37) не является трансфер-оператором (не сохраняет A). Но после расширения A до $\mathscr{A}$ мы получаем алгебру коэффициентов и, тем самым, оказываемся в тех условиях, при которых определяется конструкция скрещенного произведения в настоящей статье.

В действительности с помощью небольшой модификации рассмотренного примера можно еще более "ухудшить" рассматриваемую ситуацию.

Пример 4.20. Пусть H и U те же, что и в предыдущем примере, а $A \subset L(H)$ есть C^*-алгебра операторов умножения на ограниченные непрерывные функции на $\mathbb{R}$, которые постоянны на $\mathbb{R}_-$ и при $x \geqslant \pi$. Тогда

$$C^*(A, U) = C^*(\mathscr{A}, U), \tag{4.41}$$

где $\mathscr{A}$ обозначает C^*-алгебру операторов умножения на ограниченные непрерывные функции, имеющие пределы на $\pm\infty$.

Как и в предыдущем примере, здесь $\mathscr{A}$ будет алгеброй коэффициентов для $C^*(\mathscr{A}, U)$, и для нее

$$C^*(A, U) = C^*(\mathscr{A}, U) \cong \mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z},$$

где δ и δ_* задаются теми же формулами. Но, в противоположность предыдущему примеру, здесь даже отображение $A \ni a \mapsto UaU^*$ не сохраняет A (и потому не является эндоморфизмом).

Эти примеры показывают, что ни трансфер-оператор, ни даже какой-либо эндоморфизм не являются теми исходными объектами, которые приводят к алгебрам коэффициентов и скрещенным произведениям. Действительно, в обоих наших примерах принципиально важной была некоторая процедура расширения исходной алгебры A до алгебры коэффициентов $\mathscr{A}$ (эта процедура порождается отображениями $A \ni a \mapsto UaU^*$ и $A \ni a \mapsto U^*aU$). После осуществления этой процедуры и получения алгебры коэффициентов $\mathscr{A}$ последний шаг (построение скрещенного произведения) делается легко (в соответствии со схемой, изложенной в этой статье).

Общие процедуры расширения исходных C^*-алгебр до алгебр коэффициентов были приведены в [10]. Пространства максимальных идеалов возникающих на этом пути коммутативных алгебр коэффициентов были описаны в [25]. Развивая технику [10] и [25] и привлекая ряд новых идей, Квасьневский описал процедуру расширения как для исходной коммутативной C^*-алгебры A, так и для действия ($A \ni a \mapsto UaU^*$ и $A \ni a \mapsto U^*aU$) вплоть до получения коммутативной алгебры коэффициентов $\mathscr{A}$ и соответствующего действия (в действительности – частичного действия), что приводит к соответствующему скрещенному произведению (точнее, к частичному скрещенному произведению). Скрещенное произведение Квасьневского следует рассматривать как наиболее общее скрещенное произведение типа произведения, представленного в примере 4.19.

Еще раз подчеркнем, что среди исходных объектов этой конструкции нет никакого трансфер-оператора, и потому ее следует считать качественно отличной от конструкции Экселя.

Ниже мы вкратце опишем конструкцию Квасьневского и ее связь со скрещенным произведением, определенным в настоящей статье.

Пусть A – коммутативная C^*-алгебра с единицей и δ – эндоморфизм A. Коммутативность A позволяет применить преобразование Гельфанда и отождествить A с алгеброй $C(X)$ непрерывных функций на пространстве максимальных идеалов X алгебры A. При таком отождествлении эндоморфизм δ порождает (см., например, [25; предложение 2.1]) непрерывное отображение $\gamma\colon \Delta \to X$, где множество $\Delta \subset X$ одновременно открыто и замкнуто, причем

$$\delta(a)(x) = \begin{cases} a(\gamma(x)), & x \in \Delta, \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases} \qquad a \in C(X). \tag{4.42}$$

Такие отображения γ называют *частичными отображениями* (множества X). Таким образом, мы имеем взаимно однозначное соответствие между парами (A,δ) и парами (X,γ), где X – компакт, а γ – непрерывное частичное отображение открыто-замкнутой области в X. В [7] пара (X,γ) называется *частичной динамической системой*.

В [7] автор построил скрещенное произведение для “почти любого” эндоморфизма δ. Точнее, единственное ограничение его конструкции состояло в том, что образ $\gamma(\Delta)$ частичного отображения γ должен быть открыт. Как утверждают предложение 4.24 и замечание 4.23, это ограничение совершенно незначительно.

Если A – коммутативная C^*-подалгебра с единицей в $L(H)$ для некоторого гильбертова пространства H и U – частичная изометрия, для которой $U^*U \in A'$ и $UAU^* \subset A$, то, очевидно, $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$ является эндоморфизмом A. Хотя в данной ситуации A не обязательно является алгеброй коэффициентов для $C^*(A,U)$, существует естественный способ ее построения путем перехода к бóльшей C^*-алгебре $\mathscr{A}$, порожденной элементами из $\{A, U^*AU, U^{2*}AU^2, \dots\}$. Это утверждает следующее

Предложение 4.21 (см. [10; предложение 4.1]). *Если $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$ является эндоморфизмом C^*-алгебры A, произведение U^*U принадлежит ее коммутанту и $\mathscr{A}$ обозначает C^*-алгебру, порожденную объединением $\bigcup_{n=0}^{\infty} U^{*n}AU^n$, то $\mathscr{A}$ коммутативна, причем оба отображения $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ и $\delta_*\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ (где $\delta_*(\,\cdot\,) = U^*(\,\cdot\,)U$) являются эндоморфизмами.*

Значит, в рассматриваемой ситуации $\mathscr{A}$ является алгеброй коэффициентов для $C^*(\mathscr{A},U) = C^*(A,U)$.

Здесь чрезвычайно важно, что алгебра $\mathscr{A}$ коммутативна и что благодаря работе [25] мы можем описать ее пространство максимальных идеалов, обозначаемое ниже через $\mathscr{X}$, в терминах максимальных идеалов в A. Напомним это описание.

Для начала введем некоторые обозначения.

В оставшейся части этого пункта A будет обозначать коммутативную C^*-алгебру с единицей, X будет пространством ее максимальных идеалов (которое является хаусдорфовым компактом), δ будет некоторым эндоморфизмом A и γ будет обозначать непрерывное частичное отображение $\gamma\colon \Delta \to X$, для которого выполняется равенство (4.42) (где подмножество $\Delta \subset X$ открыто и замкнуто). Для каждого частичного отображения γ^n, $n = 1, 2, \dots$, определим его область определения $\Delta_n = \gamma^{-n}(X)$ и образ $\Delta_{-n} = \gamma^n(\Delta_n)$; при $n = 0$ положим $\gamma^0 = \mathrm{Id}$

и $\Delta_0 = X$. Тогда для всех $n, m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\gamma^n \colon \Delta_n \to \Delta_{-n}, \tag{4.43}$$
$$\gamma^n(\gamma^m(x)) = \gamma^{n+m}(x), \qquad x \in \Delta_{n+m}. \tag{4.44}$$

Заметим, что в терминах мультипликативных функционалов на A отображение γ задается формулами

$$x \in \Delta_1 \quad \Longleftrightarrow \quad x(\delta(1)) = 1, \tag{4.45}$$
$$\gamma(x) = x \circ \delta, \qquad x \in \Delta_1. \tag{4.46}$$

В [25] авторы вычислили пространство максимальных идеалов $\mathscr{X}$ для $\mathscr{A}$ в терминах пары (A, δ), или, точнее, в терминах порожденной частичной динамической системы (X, γ). Это описание дается в теореме 4.22.

Каждому $\widetilde{x} \in \mathscr{X}$ сопоставим последовательность функционалов $\xi^n_{\widetilde{x}} \colon A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, определяемых условием

$$\xi^n_{\widetilde{x}}(a) = \delta^n_*(a)(\widetilde{x}), \qquad a \in A. \tag{4.47}$$

Последовательность $\xi^n_{\widetilde{x}}$ однозначно определяет $\widetilde{x}$, так как $\mathscr{A} = C^*\bigl(\bigcup_{n=0}^\infty \delta^n_*(A)\bigr)$. Поскольку δ_* является эндоморфизмом $\mathscr{A}$, функционалы $\xi^n_{\widetilde{x}}$ линейны и мультипликативны на A. Поэтому либо $\xi^n_{\widetilde{x}} \in X$ (X – спектр A), либо $\xi^n_{\widetilde{x}} \equiv 0$. Отсюда следует, что отображение

$$\mathscr{X} \ni \widetilde{x} \to \bigl(\xi^0_{\widetilde{x}}, \xi^1_{\widetilde{x}}, \dots\bigr) \in \prod_{n=0}^\infty (X \cup \{0\}) \tag{4.48}$$

инъективно и имеет место следующая теорема.

Теорема 4.22 (см. [25; теоремы 3.1 и 3.3]). *Пусть $\delta(\,\cdot\,) = U(\,\cdot\,)U^*$ – эндоморфизм A, произведение U^*U содержится в A и частичное отображение $\gamma \colon \Delta_1 \to X$ порождено δ. Тогда пространство максимальных идеалов $\mathscr{X}$ алгебры $\mathscr{A} = C^*\bigl(\bigcup_{n=0}^\infty \delta^n_*(A)\bigr)$ имеет вид*

$$\mathscr{X} = \bigcup_{N=0}^\infty \mathscr{X}_N \cup \mathscr{X}_\infty,$$
$$\mathscr{X}_N = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, \dots, x_N, 0, \dots) : x_n \in \Delta_n,\ \gamma(x_n) = x_{n-1},\ 1 \leqslant n \leqslant N,\ x_N \notin \Delta_{-1}\bigr\},$$
$$\mathscr{X}_\infty = \bigl\{\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots) : x_n \in \Delta_n,\ \gamma(x_n) = x_{n-1},\ n \geqslant 1\bigr\}.$$

Топология на $\mathscr{X}$ определяется фундаментальными системами окрестностей точек $\widetilde{x} \in \mathscr{X}_N$ вида

$$O(a_1, \dots, a_k, \varepsilon) = \{\widetilde{y} \in \mathscr{X}_N : |a_i(x_N) - a_i(y_N)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\}$$

и системой окрестностей точек $\widetilde{x} \in \mathscr{X}_\infty$ вида

$$O(a_1, \dots, a_k, n, \varepsilon) = \biggl\{\widetilde{y} \in \bigcup_{N=n}^\infty \mathscr{X}_N \cup \mathscr{X}_\infty : |a_i(x_n) - a_i(y_n)| < \varepsilon,\ i = 1, \dots, k\biggr\},$$

где $\varepsilon > 0$, $a_i \in A$ и $k, n \in \mathbb{N}$.

Замечание 4.23. Топология на X – это *-слабая топология. Отсюда следует (см. (4.48)), что топология на $\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\mathscr{X}_N\cup\mathscr{X}_\infty$ на самом деле есть топология произведения, индуцированная с $\prod_{n=0}^{\infty}(X\cup\{0\})$, где множество $\{0\}$ открыто и замкнуто.

Теорема 4.22 побуждает нас внимательнее рассмотреть условие $U^*U\in A$.

Заметим (см. [25; предложение 3.5]), что если U^*U принадлежит коммутанту A, то δ является эндоморфизмом C^*-алгебры $A_1=C^*(A,U^*U)$, а также

$$\mathscr{A}=C^*\biggl(\bigcup_{n=0}^{\infty}\delta_*^n(A)\biggr)=C^*\biggl(\bigcup_{n=0}^{\infty}\delta_*^n(A_1)\biggr).$$

Таким образом, упомянутое условие означает просто, что вычисление пространства максимальных идеалов $\mathscr{X}$ алгебры $\mathscr{A}$ следует начинать с C^*-алгебры A_1 вместо алгебры A.

Далее, условие $U^*U\in A$ тесно связано с открытостью Δ_{-1} (поскольку множество Δ_1 компактно и γ непрерывно, то Δ_{-1} всегда замкнуто).

Предложение 4.24 (см. [7; предложение 2.4]). *Пусть $P_{\Delta_{-1}}\in A$ – проектор, отвечающий характеристической функции $\chi_{\Delta_{-1}}\in C(X)$. Если $U^*U\in A$, то Δ_{-1} открыто и $U^*U=P_{\Delta_{-1}}$. Если U^*U лежит в коммутанте A, Δ_{-1} открыто и A имеет невырожденное действие на H, то $U^*U\leqslant P_{\Delta_{-1}}$.*

Замечание 4.25. Как показано в [7], неравенство во второй части предложения 4.24 не может быть заменено равенством.

В силу предложения 4.21 отображения δ и δ_* являются эндоморфизмами C^*-алгебры $\mathscr{A}$. Отправляясь от теоремы 4.22, мы теперь можем найти форму порождаемых ими частичных отображений. Стартовую подсказку дает следующее

Предложение 4.26 (см. [25; предложение 2.5]). *Пусть $\delta(\,\cdot\,)=U(\,\cdot\,)U^*$ и $\delta_*(\,\cdot\,)=U^*(\,\cdot\,)U$ являются эндоморфизмами A, и пусть γ – частичное отображение X, порожденное δ. Тогда Δ_1 и Δ_{-1} открыты и замкнуты, а γ: $\Delta_1\to\Delta_{-1}$ – гомеоморфизм. Более того, действие эндоморфизма δ_* на $C(X)$ задается формулой*

$$(\delta_*f)(x)=\begin{cases}f(\gamma^{-1}(x)), & x\in\Delta_{-1},\\ 0, & x\notin\Delta_{-1}.\end{cases}\tag{4.49}$$

Это предложение вместе с теоремой 4.22 приводит к следующей теореме.

Теорема 4.27 (см. [7; теорема 2.8]). *Пусть выполняются условия теоремы 4.22. Тогда*:

(i) *множества*

$$\widetilde{\Delta}_1=\{\widetilde{x}=(x_0,x_1,\dots)\in\mathscr{X}:x_0\in\Delta_1\},$$
$$\widetilde{\Delta}_{-1}=\{\widetilde{x}=(x_0,x_1,\dots)\in\mathscr{X}:x_1\neq 0\}$$

открыты и замкнуты в $\mathscr{X}$;

(ii) *эндоморфизм* δ *порождает на* $\mathscr{X}$ *частичный гомеоморфизм* $\widetilde{\gamma}\colon \widetilde{\Delta}_1 \to \widetilde{\Delta}_{-1}$, *действующий по формуле*

$$\widetilde{\gamma}(\widetilde{x}) = \widetilde{\gamma}(x_0, x_1, \dots) = (\gamma(x_0), x_0, x_1, \dots), \qquad \widetilde{x} \in \widetilde{\Delta}_1; \tag{4.50}$$

(iii) *частичное отображение, порождаемое* δ_*, *обратно к* $\widetilde{\gamma}$, *т.е.* $\widetilde{\gamma}^{-1}\colon \widetilde{\Delta}_{-1} \to \widetilde{\Delta}_1$, *где*

$$\widetilde{\gamma}^{-1}(\widetilde{x}) = \widetilde{\gamma}^{-1}(x_0, x_1, \dots) = (x_1, x_2, \dots), \qquad \widetilde{x} \in \widetilde{\Delta}_{-1}. \tag{4.51}$$

Пара $(\mathscr{X}, \widetilde{\gamma})$ называется в [7] *обратимым расширением* частичной динамической системы (X, γ).

Наряду с описанием пространства максимальных идеалов для $\mathscr{A} = C(\mathscr{X})$ и действия $\widetilde{\gamma}$ на нем автор предъявляет в [7] явную алгебраическую конструкцию алгебры $\mathscr{A}$ в терминах (A, δ). Эта конструкция такова.

Вначале заметим, что семейство $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $A_n = \delta^n(1)A$, является убывающим семейством замкнутых двусторонних идеалов. Поскольку оператор $\delta^n(1)$ отвечает характеристической функции $\chi_{\Delta_n} \in C(X)$, мы можем рассматривать A_n как $C_{\Delta_n}(X)$ (где $C_K(X)$ обозначает алгебру непрерывных функций на X, обращающихся в нуль вне подмножества $K \subset X$). Пусть $\mathcal{E}_*(A)$ – множество, состоящее из таких последовательностей $a = \{a_n\}_{n\geqslant 0}$, в которых лишь конечное число элементов $a_n \in A_n$ отличны от нуля. А именно,

$$\mathcal{E}_*(A) = \biggl\{a \in \prod_{n=0}^{\infty} A_n : \exists\, N > 0 \ \forall\, n > N \ a_n \equiv 0\biggr\}.$$

Пусть $a = \{a_n\}_{n\geqslant 0}$, $b = \{b_n\}_{n\geqslant 0} \in \mathcal{E}_*(A)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Определим сложение, умножение на скаляр, сверточное умножение и инволюцию на $\mathcal{E}_*(A)$ соответственно формулами

$$(a + b)_n = a_n + b_n, \tag{4.52}$$

$$(\lambda a)_n = \lambda a_n, \tag{4.53}$$

$$(a \cdot b)_n = a_n \sum_{j=0}^{n} \delta^j(b_{n-j}) + b_n \sum_{j=1}^{n} \delta^j(a_{n-j}), \tag{4.54}$$

$$(a^*)_n = \overline{a}_n. \tag{4.55}$$

Эти операции корректно определены и вполне естественны, исключая, возможно, умножение двух элементов из $\mathcal{E}_*(A)$. Подчеркнем, что индекс в одной из сумм в (4.54) начинает изменяться от 0.

Предложение 4.28 (см. [7; предложение 4.5]). *Множество* $\mathcal{E}_*(A)$ *с операциями* (4.52)–(4.55) *становится коммутативной алгеброй с инволюцией.*

Теперь определим морфизм $\varphi\colon \mathcal{E}_*(A) \to C(\mathscr{X})$. С этой целью для любых $a = \{a_n\}_{n\geqslant 0} \in \mathcal{E}_*(A)$ и $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots) \in \mathscr{X}$ положим

$$\varphi(a)(\tilde{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_n), \tag{4.56}$$

где $a_n(x_n) = 0$, как только $x_n = 0$. Это отображение φ корректно определено, потому что лишь конечное число функций a_n отличны от нуля.

Теорема 4.29 (см. [7; теорема 4.6]). *Отображение* $\varphi\colon \mathcal{E}_*(A) \to C(\mathscr{X})$ *из* (4.56) *является морфизмом алгебр с инволюцией. Образ* φ *плотен в* $C(\mathscr{X})$, *т.е.*

$$\overline{\varphi(\mathcal{E}_*(A))} = C(\mathscr{X}).$$

Рассмотрим факторпространство $\mathcal{E}_*(A)/\ker\varphi$ и соответствующее фактороотображение $\phi\colon \mathcal{E}_*(A)/\ker\varphi \to C(\mathscr{X})$, т.е. $\phi(a+\ker\varphi) = \varphi(a)$. Ясно, что ϕ – инъективное отображение на плотную *-подалгебру в $C(\mathscr{X})$. Положим

$$E_*(A) := \phi(\mathcal{E}_*(A)/\ker\varphi), \tag{4.57}$$

$$[a] := \phi(a+\ker\varphi), \qquad a\in\mathcal{E}_*(A). \tag{4.58}$$

Определение 4.30 (см. [7; определение 4.7]). $E_*(A)$ называется *-*алгеброй коэффициентов* для пары (A,δ). Мы будем писать $[a] = [a_0, a_1, \dots] \in C(\mathscr{X})$ для $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathcal{E}_*(A)$.

Естественная инъекция $A \ni a_0 \longrightarrow [a_0, 0, 0, \dots] \in E_*(A)$ позволяет нам трактовать A как C^*-подалгебру в $E_*(A)$, а также в $\mathscr{A} = C(\mathscr{X})$:

$$A \subset E_*(A) \subset \mathscr{A}, \qquad \overline{E_*(A)} = \mathscr{A}.$$

Как только произведено расширение A до алгебры коэффициентов $\mathscr{A}$, дальнейшее построение скрещенного произведения идет без проблем (см. [7; § 5]). Поскольку у нас δ и δ_* являются эндоморфизмами $\mathscr{A}$, они будут частичными автоморфизмами (предложение 4.26), и их действие описано в теореме 4.27. Поэтому скрещенное произведение в [7] естественно определяется как частичное скрещенное произведение, введенное в [21]. Очевидно, в рассматриваемой ситуации оно совпадает с $\mathscr{A} \times_\delta \mathbb{Z}$.

В конце этого пункта упомянем несколько интересных наблюдений о зависимости $\mathscr{X}$ от γ, сделанных в [7].

Если γ сюръективно, то $\mathscr{X}_N = \varnothing$ при всех $n\in\mathbb{N}$ и $\mathscr{X} = \mathscr{X}_\infty$. В этом случае $\mathscr{X}$ можно определить как проективный предел (см. [7; предложение 3.10]).

Если γ инъективно, то естественная проекция $\Phi\colon \mathscr{X} \to X$, задаваемая формулой

$$\Phi(x_0, x_1, \dots) = x_0, \tag{4.59}$$

является гомеоморфизмом (см. [7; предложение 2.3]).

Если (X,γ) является односторонней топологической цепью Маркова, то ее обратимое расширение $(\mathscr{X}, \tilde\gamma)$ является двусторонней топологической цепью Маркова (см. [7; пример 2.8]).

Последний пример показывает, в частности, что скрещенное произведение Квасьневского качественно отличается от алгебры Кунца–Кригера. Хотя оба эти скрещенные произведения базируются на односторонней топологической цепи Маркова, в конструкции Кунца–Кригера мы получаем некоммутативную алгебру коэффициентов $\mathscr{F}_A$ (см. п. 4.3), в то время как конструкция Квасьневского приводит к коммутативной алгебре коэффициентов $C(\mathscr{X})$, где $(\mathscr{X}, \tilde\gamma)$ – двусторонняя топологическая цепь Маркова.

§ 5. Скрещенное произведение, алгебры коэффициентов, трансфер-операторы и другое (взаимосвязи)

Различные конструкции, представленные в предыдущем параграфе (иногда даже “качественно” различные; здесь мы хотели бы особо “противопоставить” скрещенные произведения Экселя и Квасьневского), все оказываются скрещенными произведениями того типа, который был введен в настоящей статье: в каждой из них возникают отлично представимая пара $(\mathscr{A}, \delta)$ и соответствующий полный трансфер-оператор δ_*.

Но поскольку эти конструкции все же различны, естественно возникает вопрос: что именно следует называть скрещенным произведением? Или, более конкретно, что и с чем мы скрещиваем?

Объекты из предыдущего параграфа вместе с результатами из § 2 и § 3 приводят к более или менее естественному ответу, который мы дадим ниже.

5.1. Конструкция скрещенного произведения. Построение скрещенного произведения состоит из двух шагов.

Шаг 1 (начальные объекты и процедура расширения). Должна быть задана некоторая *-алгебра A (или хотя бы некоторый набор элементов из A) и некая процедура расширения, посредством которой можно расширить алгебру A вплоть до C^*-алгебры коэффициентов $\mathscr{A}$ и определить эндоморфизм $\delta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ таким образом, чтобы пара $(\mathscr{A}, \delta)$ была отлично представима (что эквивалентно существованию полного трансфер-оператора δ_* для $(\mathscr{A}, \delta)$, который единствен по теореме 2.2).

Шаг 2 (скрещивание алгебры коэффициентов с эндоморфизмом δ). Как только получены $\mathscr{A}$, δ и δ_*, скрещенное произведение ($\mathscr{A}$ и δ) определяется в соответствии с определением 2.6.

Таким образом, в сущности мы скрещиваем алгебру коэффициентов $\mathscr{A}$ с эндоморфизмом δ, в то время как исходная алгебра A и процедура ее расширения служат инструментом построения $\mathscr{A}$ и δ.

5.2. Обсуждение. I. *Расширение.* На шаге 1 построения скрещенного произведения используется процедура расширения. Что это такое? Существует ли возможность явно описать эту процедуру? В общей ситуации, к сожалению, мы не видим способа дать точное описание. Просматривая все конструкции скрещенных произведений, приведенные в § 4, можно заметить, что ни трансфер-оператор (см., например, скрещенное произведение Квасьневского), ни даже эндоморфизм алгебры A (см. пример 4.20) не является необходимым для этой процедуры. Более того, если мы рассмотрим алгебру Кунца–Кригера, то среди исходных объектов обнаружим проекторы $Q_i = S_i^* S_i$ и $P_i = S_i S_i^*$, набор которых даже не образует алгебру, и при этом изначально нет никакого трансфер-оператора (необходимые алгебра и трансфер-оператор возникают здесь в результате процедуры расширения). В этой связи отметим работу Дж. Линдиарни и И. Райберна [26], в которой начальными объектами являются C^*-алгебра A и положительный конус Γ^+ в некоторой вполне упорядоченной абелевой группе, действующей на A эндоморфизмами, которые продолжаются на алгебру мультипликаторов алгебры A (где не предполагается наличие никаких трансфер-операторов). Предполагая, что эти эндоморфизмы порождаются частичными изометриями V_s, $s \in \Gamma^+$, вида $A \ni a \mapsto V_s a V_s^*$, причем произведения $V_s^* V_s$ лежат в коммутанте A, авторы определяют скрещенное произведение как универсальную обертывающую C^*-алгебру, порожденную элементами A и V_s. Очевидно, в этом случае соответствующей алгеброй коэффициентов $\mathscr{A}$ (расширением A) будет универсальная C^*-алгебра, порожденная элементами A, $V_s^* A V_s$, где $s \in \Gamma^+$, а также $\delta_s(\,\cdot\,) = V_s(\,\cdot\,)V_s^*$ и $\delta_{*s}(\,\cdot\,) = V_s^*(\,\cdot\,)V_s$.

На самом деле в общей ситуации процедура расширения задается отображениями $A \ni a \mapsto UaU^*$ и $A \ni a \mapsto U^*aU$, которые зависят от происхождения алгебры A и происхождения оператора U (вообще говоря, ни отображение $U(\,\cdot\,)U^*$, ни отображение $U^*(\,\cdot\,)U$ не сохраняет A, и потому они не являются эндоморфизмом и трансфер-оператором). В принципе процедура расширения сводится к некоторому аксиоматическому описанию этих отображений. Основные структуры и объекты, возникающие на этом пути, описаны в [10; § 3].

Мы хотели бы также напомнить уже упоминавшееся "противопоставление" между алгеброй Кунца–Кригера и скрещенным произведением Квасьневского для односторонней топологической цепи Маркова. Оба скрещенных произведения базируются на односторонней топологической цепи Маркова. Далее, операторы S_i в алгебре Кунца–Кригера порождают изометрию S (4.18), которая приводит к процедуре расширения, определяемой отображениями $S(\,\cdot\,)S^*$ и $S^*(\,\cdot\,)S$ и дающей в результате алгебру коэффициентов $\mathscr{F}_A$ (в то время как процедура расширения в скрещенном произведении Квасьневского приводит к коммутативной алгебре коэффициентов $C(\mathscr{X})$, где $(\mathscr{X}, \tilde{\gamma})$ является двусторонней топологической цепью Маркова).

В работе Экселя [8] обсуждаются некоторые процедуры расширения вида

$$U^*aU = \mathscr{H}(a)U^*U, \quad UaU^* = \mathscr{V}(a)UU^*, \qquad a \in A,$$

где A – C^*-алгебра, U – частичная изометрия и $\mathscr{V}, H\colon A \to A$ – некоторые положительные линейные отображения. По завершении серии впечатляющих выкладок в [8; § 7] Эксель пишет: "Читателя может поразить впечатление, что дикое жонглирование ковариантными представлениями… немного чрезмерно, и нужно что-то сделать, чтобы остановить это. Я согласен." Мы тоже согласны. Но все предыдущие рассуждения убеждают нас в том, что нет универсального способа описать произвольную процедуру расширения. Повторим еще раз, что существует столько процедур расширения, сколько есть различных типов C^*-алгебр A и отображений $A \ni a \mapsto UaU^*$ и $A \ni a \mapsto U^*aU$.

II. *Алгебры коэффициентов и трансфер-операторы.* В настоящей статье мы начинали с алгебр коэффициентов (§ 2). Но на самом деле из предыдущего обсуждения ясно, что алгебра коэффициентов является не начальным объектом, а скорее конечным (или промежуточным) – она является целью процедуры расширения.

Что касается связи между алгебрами коэффициентов и трансфер-операторами, мы должны подчеркнуть, что изначально (когда мы только начинаем строить алгебру коэффициентов) трансфер-оператор может как присутствовать, так и отсутствовать (это зависит от той процедуры расширения, с которой мы имеем дело), в то время как в конце (когда мы уже построили алгебру коэффициентов) этот оператор обязательно возникает и однозначно определен.

Стоит упомянуть, что в конструкции скрещенного произведения Экселя (см. определение 4.10) трансфер-оператор $\mathscr{L}$ определяется не однозначно (он не полностью определяется по α; см., например, [11; замечание 2.4]). С другой стороны, когда с помощью конструкции Экселя мы получаем алгебру коэффициентов $\mathscr{A}$ (как в теоремах 4.17 и 4.18), возникающий при этом трансфер-оператор δ_* единствен (он полностью определяется по δ; см. теорему 2.2). Поэтому различие между разными трансфер-операторами $\mathscr{L}$ означает различие между исходными объектами соответствующих процедур расширения (повторим, что не все процедуры расширения могут быть определены с помощью некоторого трансфер-оператора).

III. *Скрещенное произведение.* Приведенная в § 2 конструкция покрывает не все известные на данный момент типы скрещенных произведений (в частности, в нее не включается скрещенное произведение Экселя, если трансфер-оператор $\mathscr{L}$ не связан с частичной изометрией). С другой стороны, мы верим (и весь материал настоящей статьи убеждает в этом), что как только мы сталкиваемся со скрещенным произведением, связанным с частичными изометриями, мы неизбежно приходим к конструкции скрещенного произведения, описанной в п. 5.1, и в итоге – к скрещенному произведению из определения 2.6.

Это скрещенное произведение вполне удовлетворительное во многих отношениях: оно покрывает все наиболее востребованные конструкции скрещенного произведения, полученные ранее (см. § 4), и его внутренняя структура обладает хорошими свойствами (описанными в § 3).

Поэтому, вспоминая замечание Экселя "…что-то нужно сделать, чтобы остановить это…", мы думаем, что это скрещенное произведение можно считать разумной (как минимум, промежуточной) остановкой.

Список литературы

[1] J. Cuntz, "Simple C^*-algebra generated by isometries", *Comm. Math. Phys.*, **57**:2 (1977), 173–185.

[2] J. Cuntz, W. Krieger, "A class of C^*-algebras and topological Markov chains", *Invent. Math.*, **56**:3 (1980), 251–268.

[3] W. L. Paschke, "The crossed product of a C^*-algebra by an endomorphism", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80**:1 (1980), 113–118.

[4] P. J. Stacey, "Crossed products of C^*-algebras by *-endomorphisms", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **54**:2 (1993), 204–212.

[5] G. J. Murphy, "Crossed products of C^*-algebras by endomorphisms", *Integral Equations Operator Theory*, **24**:3 (1996), 298–319.

[6] R. Exel, "A new look at the crossed-product of a C^*-algebra by an endomorphism", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **23**:6 (2003), 1733–1750.

[7] B. K. Kwaśniewski, "Covariance algebra of a partial dynamical system", *Cent. Eur. J. Math.*, **3**:4 (2005), 718–765.

[8] R. Exel, "Interactions", *J. Funct. Anal.*, **244**:1 (2007), 26–62.

[9] N. Brownlowe, I. Raeburn, "Exel's crossed product and relative Cuntz–Pimsner algebras", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **141**:3 (2006), 497–508.

[10] А. В. Лебедев, А. Одзиевич, "Расширения C^*-алгебр частичными изометриями", *Матем. сб.*, **195**:7 (2004), 37–70; англ. пер.: A. V. Lebedev, A. Odzijewicz, "Extensions of C^*-algebras by partial isometries", *Sb. Math.*, **195**:7 (2004), 951–982.

[11] V. I. Bakhtin, A. V. Lebedev, *When a C^*-algebra is a coefficient algebra for a given endomorphism*, arXiv: math.OA/0502414.

[12] A. B. Antonevich, V. I. Bakhtin, A. V. Lebedev, *Crossed product of a C^*-algebra by an endomorphism, coefficient algebras and transfer operators*, arXiv: math.OA/0502415.

[13] D. P. O'Donovan, "Weighted shifts and covariance algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **208** (1975), 1–25.

[14] A. V. Lebedev, *On certain C^*-methods that are used while investigating algebras associated with automorphisms and endomorphisms*, VINITI, No 5351-B87 (Russian), 1987.

[15] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional differential equations: I. C^*-theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman, Harlow, 1994.

[16] S. Boyd, N. Keswani, I. Raeburn, "Faithful representations of crossed products by endomorphisms", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **118**:2 (1993), 427–436.

[17] S. Adji, M. Laca, M. Nilsen, I. Raeburn, "Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122**:4 (1994), 1133–1141.

[18] R. Exel, "Amenability for Fell bundles", *J. Reine Angew. Math.*, **492** (1997), 41–73.

[19] A. Antonevich, M. Belousov, A. Lebedev, *Functional differential equations*. II. *C^*-applications: Part* 1. *Equations with continuous coefficients*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **94**, Longman, Harlow, 1998.

[20] A. Antonevich, M. Belousov, A. Lebedev, *Functional differential equations*. II. *C^*-applications: Part* 2. *Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **95**, Longman, Harlow, 1998.

[21] R. Exel, "Circle actions on C^*-algebras, partial automorphisms, and a generalized Pimsner–Voiculescu exact sequence", *J. Funct. Anal.*, **122**:2 (1994), 361–401.

[22] K. McClanahan, "K-theory for partial crossed products by discrete groups", *J. Funct. Anal.*, **130**:1 (1995), 77–117.

[23] А. В. Лебедев, "Топологически свободные частичные действия и точные представления скрещенных произведений", *Функц. анализ и его прил.*, **39**:3 (2005), 54–63; англ. пер.: A. V. Lebedev, "Topologically free partial actions and faithful representations of crossed products", *Funct. Anal. Appl.*, **39**:3 (2005), 207–214.

[24] P. R. Halmos, L. J. Wallen, "Powers of partial isometries", *J. Math. Mech.*, **19**:8 (1970), 657–663.

[25] Б. К. Квасневски, А. В. Лебедев, "Обратимые расширения необратимых динамических систем: C^*-метод", *Матем. сб.*, **199**:11 (2008), 45–74; англ. пер.: B. K. Kwaśniewski, A. V. Lebedev, "Reversible extensions of irreversible dynamical systems: C^*-method", *Sb. Math.*, **199**:11 (2008), 1621–1648.

[26] J. Lindiarni, I. Raeburn, "Partial-isometric crossed products by semigroups of endomorphisms", *J. Operator Theory*, **52**:1 (2004), 61–87.

А. Б. Антоневич (A. B. Antonevich)
Белорусский государственный университет, г. Минск;
University of Bialystok, Poland
E-mail: antonevich@bsu.by

Поступила в редакцию
28.02.2010

В. И. Бахтин (V. I. Bakhtin)
Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: bakhtin@tut.by

А. В. Лебедев (A. V. Lebedev)
Белорусский государственный университет, г. Минск;
University of Bialystok, Poland
E-mail: lebedev@bsu.by