

Линейные расширения, ассоциированные с абстрактными функциональными операторами

© 2008. А. Б. АНТОНЕВИЧ, И. Ю. ТРУБНИКОВ

Пусть M — компактное топологическое пространство, $\alpha: M \rightarrow M$ — его гомеоморфизм, а μ — мера на M , квазиинвариантная относительно α , причем $\text{supp } \mu = M$.

Далее, пусть $\xi = (E, M, p)$ — комплексное векторное расслоение над M размерности n , в каждом слое которого задано скалярное произведение, непрерывно зависящее от точки x . Непрерывное отображение $\beta: \xi \rightarrow \xi$ называется *линейным расширением* отображения $\alpha: M \rightarrow M$, если при нем слой $\xi(x)$ линейно отображается в слой $\xi(\alpha(x))$. Линейное расширение β называется *гиперболическим*, если существуют инвариантные относительно β непрерывные подрасслоения ξ^s и ξ^u , постоянные $c_s, c_u > 0$ и $0 < \gamma_s, \gamma_u < 1$, такие, что $\xi = \xi^s \oplus \xi^u$ и

$$\|\beta^m(y)\| \leq c_s \gamma_s^m \|y\|, \quad y \in \xi^s, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$\|\beta^m(y)\| \geq c_u \gamma_u^{-m} \|y\|, \quad y \in \xi^u, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2)$$

(возможен случай, когда одно из подрасслоений нулевое). Подрасслоение ξ^s называют *сжимающимся*, а ξ^u — *растягивающимся*.

Пространство $L_2(\xi)$ определяется как пополнение пространства $\Gamma(\xi)$ непрерывных сечений по норме $\|u\| = (\int_M \|u(x)\|_x^2 d\mu)^{1/2}$.

Пусть $A = \text{НОМ } \xi$ — алгебра гомоморфизмов расслоения ξ , т. е. таких непрерывных отображений $a: \xi \rightarrow \xi$, при которых слой $\xi(x)$ линейно переходит в $\xi(x)$. Каждому элементу a алгебры A ставится в соответствие ограниченный оператор $a: L_2(\xi) \rightarrow L_2(\xi)$, переводящий сечение $u(x)$ в сечение $a(x)u(x)$.

Пусть θ — некоторое унитарное линейное расширение отображения α . Унитарный оператор T в $L_2(\xi)$ задается формулой

$$(Tu)(x) = \left(\frac{d\mu_\alpha}{d\mu} \right)^{1/2} \theta \circ u(\alpha^{-1}(x)), \quad (3)$$

где $\mu_\alpha(K) := \mu(\alpha^{-1}(K))$, $K \subset M$. Операторы вида $\sum_{k=1}^m a_k T^k$, $a_k \in A$, обычно называются *функциональными операторами*.

Если расслоение ξ тривиально и θ действует на ξ по формуле $\theta(x, y) = (\alpha(x), y)$, $x \in M$, $y \in \mathbb{C}^n$, то T есть стандартный унитарный оператор взвешенного сдвига в пространстве векторнозначных функций.

Достаточно широко известен ряд теорем об эквивалентности обратимости операторов вида $I + aT$, $a \in A$, и гиперболичности соответствующего линейного расширения отображения α ([1], [2], [4], [5]). Говорят, что отображение α действует на M *топологически свободно*, если множество непериодических точек этого отображения всюду плотно в M .

Теорема 1 [1, с. 266]. Пусть $A = \text{НОМ}\xi$ — алгебра гомоморфизмов расслоения ξ , T — оператор вида (3) и отображение α действует на M топологически свободно. Оператор $b = I + aT$, $a \in A$, обратим в $L_2(\xi)$ тогда и только тогда, когда ассоциированное с ним линейное расширение $\beta(x, y) = (\alpha(x), a(x)\theta(x, y))$, $x \in M$, $y \in \xi(x)$, является гиперболическим.

Отображение $\widehat{T}: a \rightarrow TaT^{-1}$, $a \in A$, — автоморфизм алгебры A . Это свойство положено в основу определения следующего класса абстрактных C^* -алгебр [1].

Пусть B есть C^* -алгебра, A — замкнутая C^* -подалгебра в B , а T — унитарный элемент из B . Запись $B = C^*(A, T)$ обозначает, что выполнены следующие аксиомы:

1) $TaT^{-1} \in A$, $a \in A$, причем отображение $\widehat{T}: a \rightarrow TaT^{-1}$ есть автоморфизм алгебры A ;

2) множество B^0 конечных сумм $\sum a_k T^k$, $a_k \in A$, плотно по норме в B .

Приведенные аксиомы отражают важнейшие свойства функциональных операторов; поэтому элементы алгебры B называются *абстрактными функциональными операторами*, а элементы вида aT — *абстрактными операторами взвешенного сдвига*.

Все неприводимые представления C^* -алгебры типа $\text{НОМ}\xi$ конечномерны и имеют размерность n , т. е. такие алгебры являются *n -однородными*.

Целью работы является получение аналогов теоремы 1 и ее следствий для абстрактных функциональных операторов, если A есть произвольная n -однородная C^* -алгебра. Основные теоремы, ранее доказанные для алгебр, порожденных функциональными операторами, за исключением теоремы 1, были перенесены на случай алгебр абстрактных функциональных операторов. Особое место теоремы 1 связано с тем, что при построении ассоциированного линейного расширения β использовались два предположения: что $A \approx \text{НОМ}\xi$ и что автоморфизм $\tau = \widehat{T}$ задается с помощью некоторого линейного расширения θ , действующего на векторном расслоении ξ :

$$\tau(a) = \theta \circ a \circ \theta^{-1}, \quad a \in A. \quad (4)$$

Эти предположения в общем случае не выполнены.

Как известно, необходимым и достаточным условием существования такого векторного расслоения ξ , что $A \approx \text{НОМ}\xi$, является равенство нулю так называемого инварианта Диксмье–Дуади $\delta(A) \in H^3(M, \mathbb{Z})$ [3, теорема 10.7.15]. Если группа $H^3(M, \mathbb{Z})$ имеет нетривиальный элемент h конечного порядка, то, согласно теореме Гротендика [8, следствие 1.7], существует такая n -однородная алгебра A , что $\delta(A) = h$. Таким образом, над каждым пространством M , у которого группа когомологий $H^3(M, \mathbb{Z})$ содержит нетривиальные элементы конечного порядка, существуют алгебраические расслоения, алгебры непрерывных сечений которых не представимы в виде $\text{НОМ}\xi$.

Для любого автоморфизма τ алгебры A существует алгебра $B = C^*(A, T)$, такая, что $\tau = \widehat{T}$. Но даже в случае, когда $A \approx \text{НОМ}\xi$ для некоторого векторного расслоения, могут существовать автоморфизмы, не представимые в виде (4) [7, с. 81]. Приведем пример такого автоморфизма.

Предложение 1. Пусть $\text{Aut}(n)$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathbb{C}^{n \times n}$, $\xi = \text{Aut}(n) \times \mathbb{C}^n$ — тривиальное векторное расслоение и $A = \text{НОМ}\xi$. Автоморфизм $\tau(a)(x) = x(a(x))$, $x \in \text{Aut}(n)$, алгебры A не представим в виде (4)

и при этом может быть задан в виде $\tau(a) = WaW^{-1}$ с помощью некоторого оператора W , заданного той же формулой, что и оператор T в (3), но с разрывным отображением θ .

Доказательство. Предположив, что этот автоморфизм представляется в виде (4), мы получим существование такого непрерывного отображения $u : \text{Aut}(n) \rightarrow U(n)$, что $\tau(a)(x) = u(x)a(x)u(x)^*$. Другими словами, это означает, что *главное* S^1 -расслоение $(U(n), \text{Aut}(n), p)$ имеет непрерывное сечение u . Тогда это расслоение является тривиальным, т. е. $U(n) = \text{Aut}(n) \times S^1$. В этом случае для гомотопических групп должно выполняться соотношение $\pi_1(U(n)) = \pi_1(\text{Aut}(n) \times \pi_1(S^1))$. Но $\pi_1(U(n)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, а $\pi_1(\text{Aut}(n)) = \mathbb{Z}_n$. Равенство $\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$ невозможно, и полученное противоречие доказывает предложение. \square

В работе предложена новая конструкция ассоциированного линейного расширения, применимая в случае произвольных абстрактных функциональных операторов.

Требуемое изменение конструкции подсказывает теорема Фелла [6, теорема 3.2], утверждающая, что для любой n -однородной C^* -алгебры A существует алгебраическое расслоение ξ_A над пространством M максимальных идеалов алгебры A , такое, что A изоморфна алгебре непрерывных сечений $\Gamma(\xi_A)$. Напомним, что *алгебраическим* расслоением над пространством M называется расслоение, у которого слоем является алгебра матриц $\mathbb{C}^{n \times n}$, а структурной группой — группа автоморфизмов $\text{Aut}(n)$.

Пусть $I_{x_0} = \{u \in \Gamma(\xi_A) : u(x_0) = 0\}$ — максимальный идеал алгебры A . При автоморфизме \widehat{T} идеал I_{x_0} переходит в некоторый идеал I_{x_1} , тем самым порождая гомеоморфизм $\alpha : M \rightarrow M$, $x_0 \rightarrow x_1$. Автоморфизм \widehat{T} индуцирует отображение факторалгебр $\widehat{\theta} : A/I_{x_0} \rightarrow A/I_{x_1}$. Но $A/I_{x_0} \approx \mathbb{C}^{n \times n}$ — слой над точкой x_0 , а $A/I_{x_1} \approx \mathbb{C}^{n \times n}$ — слой над точкой $\alpha(x_0)$.

Таким образом, в случае абстрактных функциональных операторов определены алгебраическое расслоение ξ_A , гомеоморфизм $\alpha : M \rightarrow M$ и его линейное расширение $\widehat{\theta}$, такое, что автоморфизм \widehat{T} представляется в виде $\widehat{T}(a) = \widehat{\theta} \circ a \circ \widehat{\theta}^{-1}$, $a \in A$. Поэтому определено ассоциированное линейное расширение β , действующее на алгебраическом расслоении ξ_A по формуле

$$\beta(x, y) = (\alpha(x), a(x)\widehat{\theta}(x, y)), \quad x \in M, y \in \xi_A(x).$$

При этой новой конструкции оказывается справедливым аналог теоремы 1. Гиперболичность линейного расширения на алгебраическом расслоении определяется, как и в случае векторного расслоения, без требования, чтобы подрасслоения ξ_A^s и ξ_A^u являлись алгебраическими.

Теорема 2. Пусть $B = C^*(A, T)$, A есть n -однородная алгебра и отображение α действует на M топологически свободно. Элемент $b = I + aT$, $a \in A$, обратим тогда и только тогда, когда ассоциированное линейное расширение β , действующее на алгебраическом расслоении ξ_A , является гиперболическим.

Одним из следствий теоремы 1 является тот факт ([1, с. 281], [2, с. 99], [5, с. 219]), что если $A \approx \text{НОМ}\xi$, то число связных компонент спектра элемента aT не превосходит размерности расслоения ξ , т. е. n . В случае произвольной n -однородной C^* -алгебры A аналогичные рассуждения приводят к тому, что

количество связных компонент спектра оператора aT не превосходит размерности соответствующего алгебраического расслоения ξ_A , т. е. числа n^2 . В частности, возникает вопрос: может ли в случае алгебраического расслоения число связных компонент спектра оказаться больше, чем n ?

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и M неприводимо относительно гомеоморфизма α , порожденного автоморфизмом \hat{T} . Тогда спектр оператора aT состоит не более чем из n непересекающихся колец с центром в нуле.

Доказательство. Инвариантность спектра оператора aT относительно вращений вокруг точки 0 следует из общих теорем для алгебр подобного вида. Рассмотрим множество Λ модулей спектральных значений. Это множество в силу инвариантности спектра относительно вращений однозначно определяет спектр оператора aT . Дополнение к множеству Λ на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ есть открытое множество W . Для каждой точки λ из W , $\lambda \geq 0$, обозначим через $\xi_{A,\lambda}^s$ устойчивое подрасслоение, соответствующее по теореме 2 обратимому элементу $\lambda I + aT$. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ и $\lambda_2 \notin W$, $\lambda_1, \lambda_3 \in W$. Согласно определению устойчивости, $\xi_{A,\lambda_1}^s \subset \xi_{A,\lambda_3}^s$. Если $\xi_{A,\lambda_1}^s = \xi_{A,\lambda_3}^s$, то для каждого λ , такого, что $\lambda_1 < |\lambda| < \lambda_3$, линейное расширение является гиперболическим и, следовательно, элемент $\lambda I + aT$ обратим. При $\lambda = \lambda_2$ получаем противоречие. Значит, ξ_{A,λ_1}^s не совпадает с ξ_{A,λ_3}^s .

Размерность слоя подрасслоения $\xi_{A,\lambda}^s$ является непрерывной целочисленной функцией на M , инвариантной относительно α . В силу неприводимости пространства M относительно α эта функция постоянна и $\dim \xi_{A,\lambda_1}^s < \dim \xi_{A,\lambda_3}^s$. Одним из ключевых моментов в доказательстве теоремы 2 является доказательство того факта, что проектор P^s на подрасслоение $\xi_{A,\lambda}^s$ есть умножение на элемент p_0 из алгебры A , т. е. в локальных координатах проектор P^s действует в слое $\xi_{A,\lambda}^s(x) \approx \mathbb{C}^{n \times n}$ как умножение на матрицу $p_0(x)$. Оператор умножения на матрицу $p_0(x)$ в $\mathbb{C}^{n \times n}$ представляется как тензорное произведение $p_0(x) \otimes I_n$, откуда следует, что размерность образа кратна n .

Так как размерность слоя может принимать только значения вида kn , при изменении λ от 0 до ∞ может произойти не более n скачков размерности. Поскольку при переходе λ через каждый интервал из составляющих открытое множество W происходит скачок размерности, множество W содержит не более n компонент связности, откуда следует утверждение. \square

Заметим, что исследование обратимости многочленных абстрактных функциональных операторов стандартным приемом сводится к исследованию бинарных операторов вида $a_0 + a_1 T$ в некоторой вспомогательной алгебре с аналогичной структурой и связано с исследованием линейного пучка $F(\lambda) = \lambda a_0 + a_1 T$.

В [1, с. 281] приведено обобщение теоремы 1 и ее следствий на случай линейных пучков вида $F(\lambda) = \lambda a_0 + a_1 T$; аналогичные обобщения имеют место для абстрактных функциональных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Антоневиц, А. Лебедев, *Functional Differential Equations: I. C^* -theory*, Longman Scientific and Technical, Harlow, 1994. [2] И. У. Бронштейн, *Неавтономные динамические системы*, «Штиинца», Кишинев, 1984. [3] Ж. Диксмье, *C^* -алгебры и их*

представления, Наука, М., 1974. [4] Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, УМН, **46:2** (1991), 85–143. [5] З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику*, Мир, М., 1975. [6] J. M. G. Fell, Acta Math., **106:3–4** (1961), 233–280. [7] M. J. Dupré, R. M. Gillette, *Banach Bundles, Banach Modules and Automorphisms of C^* -Algebras*, Pitman Publishing Inc., Boston, 1983. [8] A. Grothendieck, in: Dix Exposés sur la cohomology des schemas, North-Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968, 46–66.

Белорусский государственный университет
Университет в Белостоке
e-mail: antonevich@bsu.by

Поступило в редакцию
25 августа 2006 г.

Белорусский государственный университет
e-mail: itrubnikov@gmail.com

УДК 512.547.4

Проективные характеры бесконечной обобщенной симметрической группы

© 2008. А. В. Дудко, Н. И. Нессонов

Обобщенная симметрическая группа B_m^∞ по определению является полупрямым произведением $S(\infty) \ltimes \mathbb{Z}_m^\infty$, где $S(\infty)$ — группа всех конечных перестановок натурального ряда, а \mathbb{Z}_m^∞ — множество последовательностей элементов из \mathbb{Z}_m с конечным числом ненулевых координат, на котором задано естественное действие группы $S(\infty)$. В данной заметке анонсируется полная классификация проективных факторпредставлений конечного типа группы B_m^∞ , которым с помощью известной конструкции (см. [4]) сопоставляются обычные факторпредставления ее накрывающей

$$\begin{aligned} \tilde{B}_m^\infty = \langle \tilde{s}_i, \tilde{w}_j \ (i, j \in \mathbb{N}) \mid \tilde{s}_i^2 = 1; \tilde{w}_i^m = 1; (\tilde{s}_i \tilde{s}_{i+1})^3 = 1; \tilde{s}_i \tilde{w}_i = \tilde{w}_{i+1} \tilde{s}_i; \\ \tilde{s}_i \tilde{w}_j = \vartheta \tilde{w}_j \tilde{s}_i, \ j \neq i, i+1; (\tilde{s}_i \tilde{s}_j)^2 = \nu, \ |i-j| > 1; \tilde{w}_i \tilde{w}_j = \mu \tilde{w}_j \tilde{w}_i, \ i \neq j \rangle. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ϑ, ν, μ — центральные элементы, удовлетворяющие условию $\vartheta^{(2,m)} = \nu^2 = \mu^{(2,m)} = 1$, где $(2, m)$ — наименьший общий делитель чисел 2 и m . Аналогичная задача для группы $S(\infty)$ решена Назаровым [5] (см. также [3]). Понятно, что для любого унитарного факторпредставления π группы \tilde{B}_m^∞ операторы $\pi(\vartheta), \pi(\nu), \pi(\mu)$ могут отличаться только знаком от единичного оператора. С другой стороны, упорядоченный триплет $c(\pi) = (\pi(\vartheta), \pi(\nu), \pi(\mu))$ можно рассматривать как элемент второй группы когомологий

$$\mathcal{H}^2(B_m^\infty, T) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2^3, & \text{если } m = 2k \ (k \in \mathbb{N}), \\ \mathbb{Z}_2, & \text{если } m = 2k - 1, \end{cases}$$

где T — одномерный тор, определяющий конкретное центральное расширение. При взятии тензорного произведения представлений соответствующие триплеты перемножаются.

1. Обычные представления группы B_m^∞ описаны независимо в [1] и [2]. Для вычисления характера обычного представления параметризуем, в первую очередь, классы сопряженных элементов. Произвольный элемент $g \in B_m^\infty$ имеет