Функциональный анализ и его приложения,
т. 8, вып. 1, 1974, 69—70.

СЛЕДЫ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПОГРУЖЕНИЯХ И ЕГО ГОМОТОПИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫЕ ИНВАРИАНТЫ

А. Б. Антоневич

Наиболее изученным гомотопически устойчивым инвариантом эллиптического псевдодифференциального оператора является его индекс. Существование отличных от индекса гомотопически устойчивых инвариантов вытекает из простых топологических рассуждений, однако явный вид этих инвариантов в общем случае не известен. В заметке с помощью понятия следа оператора на погружении построена полная система аналитических (определяемых только через действие оператора) гомотопически устойчивых инвариантов скалярного эллиптического псевдодифференциального оператора. Система полна в том смысле, что она однозначно определяет гомотопический класс оператора в множестве скалярных эллиптических псевдодифференциальных операторов.

1. Пусть $\alpha\colon Y \to X$ — погружение компактного многообразия Y в многообразие X и пусть на X задан скалярный псевдодифференциальный оператор A порядка r. Зафиксируем покрытие многообразия Y окрестностями U_j, $j = 1, \ldots, k$, такими, что их отображения в X являются вложениями. Зафиксируем разбиение единицы φ_j в Y, подчиненное этому покрытию, и гладкие функции $\psi_j(x) \geqslant 0$, заданные на X, равные 1 в некоторой трубчатой окрестности множества $\alpha(U_j)$ и равные 0 вне некоторой большей трубчатой окрестности V_j. Построим граничный оператор i, действующий из $C^\infty(X)$ в $C^\infty(Y)$ по формуле $iu(y) = u(\alpha(y))$, и кограничный оператор $\varkappa$, действующий из $C^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$ по формуле $\varkappa u(x) = \sum\limits_j \psi_j(x)\varphi_j(\alpha^{-1}(\pi_j x))u(\alpha^{-1}(\pi_j x))$, где π_j есть проекция на $\alpha(U_j)$ в окрестности V_j и члены в последней сумме определены корректно там, где $\psi_j(x) \neq 0$.

Следом оператора A на погружении α назовем оператор $i_\alpha A = i \circ A \circ \varkappa$.

Теорема 1. *Оператор $i_\alpha A$ является псевдодифференциальным оператором порядка r. Его символ определяется равенством $\sigma(i_\alpha A)(\xi) = \sigma(A)(\bar\alpha\xi)$, где $\zeta \in T^*Y$ $\bar\alpha\colon T^*Y \to T^*X$ — некоторое отображение, индуцированное погружением α.*

2. Для эллиптического псевдодифференциального оператора A на окружности S^1 определим инвариант $L(A)$, называемый *числом Лефшеца*. Пусть J — сингулярный интегральный оператор Коши. Тогда $L(A) = \operatorname{tr} J \mid \operatorname{Ker} A^1 - \operatorname{tr} J \mid \operatorname{Coker} A^1$, где

$$A^1 = \frac{1}{2}(A + JAJ).$$

Символ псевдодифференциального оператора A на окружности S^1 представляет собой пару функций $\sigma^\pm(x)$ на S^1. Пусть $k^\pm = (2\pi)^{-1}[\arg \sigma^\pm(x)]_{S^1}$, где $[\quad]_{S^1}$ обозначает приращение функции, стоящей в скобках, при обходе окружности S^1.

Теорема 2. *Число Лефшеца $L(A)$ устойчиво при гомотопии оператора A в множестве эллиптических операторов, и $L(A) = k^+ + k^-$.*

3. Сформулируем основной результат.

Теорема 3. *Пусть X — компактное n-мерное многообразие, $\alpha_k\colon S^1 \to X$, $k = 1, \ldots, p$,— погружения, реализующие систему образующих в группе гомологий $H_1(X)$, и пусть $\alpha_0\colon S^1 \to X$ — вложение в виде малой (стягиваемой) окружности. Пусть A — скалярный эллиптический псевдодифференциальный оператор на многообразии X. Тогда числа Лефшеца $L(i_{\alpha_k}A)$, где $k = 1, \ldots, p$ при $n \geqslant 3$ и $k = 0, 1, \ldots, p$ при $n = 2$, являются гомотопическими инвариантами и однозначно определяют гомотопический класс оператора A в множестве скалярных эллиптических операторов.*

Наша конструкция следа оператора на погружении является частным случаем ранслятора в смысле Б. Ю. Стернина [1]. Определение числа Лефшеца аналогично определению числа Лефшеца эквивариантного оператора [5]. В случае $X = S^2$ инвариант, по существу совпадающий с $L(i_{\alpha_0}A)$, был введен А. И. Вольпертом в [4] при построении гомотопической классификации эллиптических систем на сфере S^2. Отметим также, что в случае вложений более сложная конструкция следа и ее связь с K-теорией изучена в работах С. П. Новикова и Б. Ю. Стернина [2], [3].

Белорусский государственный университет

Поступило в редакцию 1 сентября 1972 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Стернин Б. Ю., ДАН СССР **200**, № 1 (1971), 45—48. 2. Новиков С. П., Стернин Б. Ю., ДАН СССР **170**, № 6 (1966), 1265—1267. 3. Новиков С. П., Стернин Б. Ю., ДАН СССР **171**, № 3 (1966), 525—528. 4. Вольперт А. И., Матем. сб. **59** (1962), 195—214. 5. Атья М., Сегал Г., УМН **XXII**, вып. 6 (1968), 135—149.