ФЕВРАЛЬ 1972 г., ТОМ VIII, № 2

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.946

ОБ ИНДЕКСЕ И НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С КОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ СДВИГОВ НА ГРАНИЦЕ

А. Б. АНТОНЕВИЧ

1. Постановка задачи. Пусть в ограниченной области $V \subset R_n$ с гладкой границей Γ задан эллиптический дифференциальный оператор $A \equiv A(x, D)$ порядка $2r$, правильно эллиптический на границе. Пусть также задано N бесконечно дифференцируемых преобразований $g_0, \ldots, g_{N-1}$ области V в себя, в совокупности образующих конечную группу G. На границе Γ пусть заданы сингулярные интегродифференциальные (СИД) операторы B_{ikg} порядка $m_i - k$, где m_i — заданные числа, $i = 1, \ldots, r$; $k = 0, \ldots, m_i$; $g \in G$.

Рассматривается краевая задача: найти решение u уравнения

$$A(x, D)\, u(x) = f(x), \quad x \in V, \tag{1}$$

удовлетворяющее на границе Γ общим краевым условиям со сдвигом

$$B_i u = \sum_{g \in G} B_{ig} u\left(g^{-1}(x)\right) = \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{m_i} B_{ikg} \frac{d^k}{d\nu^k} u\left(g^{-1}(x)\right)\Big|_\Gamma = \varphi_i, \tag{2}$$

где $i = 1, \ldots, r$; $\dfrac{d^k}{d\nu^k}$ — производная порядка k по внутренней нормали к Γ.

Краевые условия (2) связывают значения функции u в различных точках границы Γ и задача (1)—(2) является нелокальной краевой задачей для эллиптического уравнения. Случай $N = 2$ рассматривался автором [2], случай $n = 2$, $r = 1$ и циклической группы G рассмотрен Р. А. Кордзадзе [4]. Другие нелокальные краевые задачи для эллиптических уравнений с разных точек зрения изучались в работах Ф. Браудера [7], R. Beals [6], Я. А. Ройтберга и З. Г. Шефтеля [5] и других.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия нормальной разрешимости задачи (1)—(2) в пространствах Соболева. Вычисление индекса краевой задачи (1)—(2) сводится к вычислению индекса сингулярного интегрального оператора с конечной группой сдвигов на граничном многообразии Γ, формула которого (индекса) получена автором в [3]. Для простоты мы считаем коэффициенты оператора A и символы СИД операторов B_{ikg} бесконечно дифференцируемыми, хотя эти требования можно ослабить. При изучении краевой задачи с конечной группой сдвигов используется теория эллиптических краевых задач без сдвига, изложенная, например, в статье М. С. Аграновича [1].

Пусть $l_0 = \max(2r, m_1+1, \ldots, m_r+1)$ и $l \geqslant l_0$, l — целое. Мы будем рассматривать решения и правые части, принадлежащие пространствам Соболева: $u \in H_l(V)$, $f \in H_{l-2r}(V)$, $\varphi_i \in H_{l-m_i-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $i=1, \ldots, r$. Пусть

$$H_l(V, \Gamma) = H_{l-2r}(V) \times H_{l-m_1-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H_{l-m_r-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Краевой задаче (1)—(2) поставим в соответствие действующий из $H_l(V)$ в $H_l(V, \Gamma)$ оператор

$$M = (A, B) = (A, B_1, \ldots, B_r). \tag{3}$$

Оператор M нетеровский тогда и только тогда, когда краевая задача (1)—(2) нормально разрешима в соответствующих пространствах.

2. Вспомогательный оператор $\tilde{M}$ без сдвига. Введем операторы

$$T_g u(x) = u\left(g^{-1}(x)\right), \quad g \in G,$$

действующие в любом пространстве функций, заданных на V или на Γ. Вместе с задачей (1)—(2) рассмотрим краевую задачу для N функций $u_{g_0}, \ldots, u_{g_{N-1}}$:

$$A_h u_h = T_h A T_h^{-1} u_h = f_h, \tag{4}$$

$$\sum_{g \in G} T_h B_{ig} T_h^{-1} u_{h^{-1}g} = \varphi_{ih};\ i = 1, \ldots, r;\ h \in G. \tag{5}$$

Пусть $\tilde{H}_l(V) = [H_l(V)]^N$. Компоненты вектор-функции из $\tilde{H}_l(V)$ будем нумеровать элементами группы G. Пусть также

$$\tilde{H}_l(V, \Gamma) = \tilde{H}_{l-2r}(V) \times \tilde{H}_{l-m_1-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times \tilde{H}_{l-m_2-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Краевой задаче (4)—(5) поставим в соответствие оператор $\tilde{M}$, действующий из $\tilde{H}_l(V)$ в $\tilde{H}_l(V, \Gamma)$ и определенный левой частью системы (4) и краевых условий (5). Оператор $\tilde{M}$ нетеровский тогда и только тогда, когда краевая задача (4)—(5) нормально разрешима.

Лемма 1. *Если краевая задача (4)—(5) нормально разрешима, то краевая задача (1)—(2) также нормально разрешима.*

Доказательство. Пусть задача (4)—(5) нормально разрешима. Это значит, что ядро $\operatorname{Ker} \tilde{M}$ конечномерно и что существуют $\overline{\omega}^j \in \tilde{H}_l(V, \Gamma)$, $j = 1, \ldots, p$, такие, что при выполнении условий

$$\left(\overline{\psi}, \overline{\omega}^j\right)_{\tilde{H}_l(V, \Gamma)} = 0,\ j = 1, \ldots, p, \tag{6}$$

существует решение $\overline{u} \in \tilde{H}_l(V)$ уравнения $\tilde{M}\overline{u} = \overline{\psi}$. Пусть $u \in \operatorname{Ker} M$ и пусть $\overline{u} = (u, T_{g_1} u, \ldots, T_{g_{N-1}} u)$. Тогда непосредственной проверкой убеждаемся, что $\overline{u} \in \operatorname{Ker} \tilde{M}$. Так как отображение $u \to \overline{u}$ переводит линейно независимые функции в линейно независимые, $\operatorname{Ker} M$ изоморфно части $\operatorname{Ker} \tilde{M}$ и, следовательно, конечномерно.

Пусть теперь $\psi = (f, \varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in H_l(V, \Gamma)$ и пусть $\overline{\psi} = (\overline{f}, \overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_r)$. Если выполнены условия (6), уравнение $\tilde{M}\overline{u} = \overline{\psi}$ имеет решение $\overline{u} = (u_{g_0}, u_{g_1}, \ldots, u_{g_{N-1}})$. Тогда функция

$$u = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} T_h^{-1} u_h$$

является решением краевой задачи (1)—(2). Условия (6) существования решения можно записать в виде

$$(\psi, w^j)_{H_l(V,\Gamma)} = 0, \ j = 1, \ \dots, \ p,$$

где $w^j = \left(\sum\limits_{g\in G} \overset{*}{T}_g w_g^j, \ \sum\limits_{g\in G} \overset{*}{T}_g w_{1g}^j, \ \dots, \ \sum\limits_{g\in G} \overset{*}{T}_g w_{rg}^j\right)$, w_g^j и w_{kg}^j— компоненты вектор-функции $\bar{w}^j$, $\overset{*}{T}_g$ — оператор, сопряженный к оператору T_g.

Замечание. Функции w^j могут оказаться линейно зависимыми, и число условий, необходимых для разрешимости краевой задачи (1)—(2), может быть меньше, чем для краевой задачи (4)—(5). Таким образом, при переходе от оператора $\tilde{M}$ к оператору M размерности ядра и коядра могут уменьшаться и, вообще говоря, индекс оператора M не равен индексу оператора $\widetilde{M}$.

Переход от оператора A к оператору A_h можно рассматривать как замену переменных $y = h(x)$ и оператор A_h—как оператор A, записанный в координатах y. Значит, оператор A_h является дифференциальным оператором и его характеристический полином получаем по формуле

$$A_h^0(x, \ \xi) = A^0\left(h^{-1}(x), \ L_{h^{-1}}\,\xi\right), \tag{7}$$

где $A^0(x, \ \xi)$ — характеристический полином оператора A, а L_h— матрица, транспонированная к обратной матрице Якоби преобразования $y = h(x)$. Аналогично оператор

$$B_{ikgh} = T_h B_{ik(h^{-1}g)}\, T_h^{-1}$$

является СИД оператором и его символ в локальных координатах задается формулой

$$\sigma(B_{ikgh})\,(x', \ \xi') = \sigma(B_{ik(h^{-1}g)})\left(h^{-1}(x'), \ L'_{h^{-1}}\,\xi\right), \tag{8}$$

где x' — точка границы Γ, $\xi' = (\xi_1, \ \dots, \ \xi_{n-1})$, $\sigma(B_{ik(h^{-1}g)})\ (y, \ \eta)$ — символ оператора $B_{ik(h^{-1}g)}$ в локальных координатах y в окрестности точки $h^{-1}(x)$, $L'_{h^{-1}}$ — транспонированная к обратной матрице Якоби преобразования $y' = h(x')$, рассматриваемого на границе Γ.

Предположим, что преобразования $g_i \in G$ в точках границы Γ переводят единичный вектор нормали в единичный вектор нормали. В локальных системах координат, в которых оси x_n и y_n направлены по внутренней нормали к Γ и преобразование $h \in G$ записано в виде $y = (h^1(x), \ \dots, \ h^n(x))$, это условие имеет вид

$$\left.\frac{\partial h^j}{\partial x_n}\right|_{\Gamma} = \delta_{jn}. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если выполнено условие (9), то оператор сдвига T_h коммутирует с оператором дифференцирования по нормали $\frac{\partial^k}{\partial \nu^k}$ с точностью до оператора порядка $\leqslant k-1$, т. е. справедлива формула*

$$\frac{d^k}{d\nu^k}(T_h u) - T_h\left(\frac{d^k u}{d\nu^k}\right) = Ku,$$

где K — оператор порядка $\leqslant k-1$.

Утверждение леммы следует непосредственно из правила дифференцирования сложной функции и условия (9). В силу леммы 2 краевые условия (5) можем записать в виде

$$\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{m_i} B_{ikgh}\frac{d^k}{d\nu^k}u_g + K_{ih}\bar{u} = \varphi_{ih},$$

где K_{ih} — операторы порядка $\leqslant m_i - 1$, $i = 1, \ldots, r$; $h \in G$. Таким образом задача (4)—(5) есть краевая задача для системы дифференциальных уравнений с СИД краевыми условиями, причем система (4) эллиптична в области V и правильно эллиптична на границе.

3. Эллиптичность и нормальная разрешимость. В точке $x_0 \in \Gamma$ поместим начало ортогональной системы координат так, чтобы ось x_n была направлена по внутренней нормали. Пусть $x = (x', x_n)$, $\xi = (\xi', \xi_n)$, где $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Зафиксировав $\xi' \neq 0$, рассмотрим на полупрямой $t \geqslant 0$ задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$A^0\left(h^{-1}(x', 0),\ L_{h^{-1}}\xi',\ i\frac{d}{dt}\right) v_h(t) = 0,\ t > 0, \tag{10}$$

$$\sum_{k=0}^{m_j}\sum_{g\ni G}\sigma(B_{jk(h^{-1}g)})\left(h^{-1}(x'),\ L_{h^{-1}}\xi'\right)\left(i\frac{d}{dt}\right)^k v_g(t)\big|_{t=0} = b_{jh}, \tag{11}$$

где $j = 1, \ldots, r$; $h \in G$, b_{jh} — заданные числа. Решение $\bar{v}(t) = (v_{g_0}(t), \ldots, v_{g_{N-1}}(t))$ системы (10) называется устойчивым, если $\bar{v}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Будем говорить, что в точке $x_0 \in \Gamma$ выполнено условие Шапиро—Лопатинского, если задача (10)—(11) имеет единственное устойчивое решение при любых b_{jh} и $\xi' \neq 0$.

Определение. Краевую задачу с конечной группой сдвигов на границе будем называть эллиптической, если в каждой точке $x \in \Gamma$ выполнено условие Шапиро—Лопатинского. Оператор M в этом случае также будем называть эллиптическим.

Теорема 1. *Для того чтобы краевая задача с конечной группой сдвигов на границе (1)—(2) была нормальной разрешимой достаточно, а если на каждой компоненте связности границы Γ тождественно действует только преобразование g_0, то и необходимо, чтобы задача (1)—(2) была эллиптической.*

Доказательство. Достаточность. В силу равенств (7) и (8) условие Шапиро—Лопатинского для задачи (1)—(2) совпадает с условием Шапиро—Лопатинского для краевой задачи (4)—(5) без сдвига. Согласно теореме 16.1 из статьи [1], задача (4)—(5) нормально разрешима и остается применить лемму 1.

Необходимость. Пусть оператор M — нетеровский. Тогда для любой функции $u \in H_l(V)$ справедлива априорная оценка ([1], предложение 10.7):

$$\|u\|_l \leqslant C\left(\|Mu\|_l + \|u\|_0\right), \tag{12}$$

где постоянная C не зависит от u. Пусть $x_0 \in \Gamma$, A_g^0 — однородный оператор с постоянными коэффициентами

$$A_g^0 = A_g^0(x_0, D),$$

B_{ikgh}^0 — однородный СИД оператор с постоянным символом

$$\sigma(B_{ikgh}^0)(x', \xi') = \sigma(B_{ikgh})(x_0, \xi'),$$

заданный в окрестности $U \ni x_0$. Обозначим через $S^+(x, \delta)$ пересечение шара радиуса δ с центром в точке x с областью V. Пусть функции u_g бесконечно дифференцируемы и их носители принадлежат $S^+(x_0, \delta)$. Для таких функций известны оценки [1]

$$\|A_g u_g\|_{l-2r} \leqslant \|A_g^0 u_g\|_{l-2r} + C_1(\delta)\|u_g\|_l + C_2\|u_g\|_0, \tag{13}$$

$$\left\|\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{m_i} B_{ikgh}\frac{d^k}{d\nu^k}u_g\right\|_{l-m_i-\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant\left\|\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{m_i} B_{ikgh}^0\frac{d^k}{d\nu^k}u_g\right\|_{l-m_i-\frac{1}{2}} + C_3(\delta)\sum_{g\in G}\|u_g\|_l + C_4\|\bar{u}\|_0, \tag{14}$$

где $C_1(\delta)\to 0$ и $C_3(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Докажем теперь, что выполнено условие Шапиро—Лопатинского в точке x_0. Предположим противное. Тогда при некотором действительном $\xi_0' \neq 0$ существует нетривиальное устойчивое решение $\bar{v}(t)$ системы (1) при $b_{ih} = 0$. Так как на компоненте связности границы, содержащей точку x_0, тождественно действует только тождественное преобразование g_0, в окрестности $S(x_0, \delta)\cap\Gamma$ найдется точка x_1, не являющаяся неподвижной точкой ни для одного из остальных преобразований. Кроме того, найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $S^+(x_1, \delta_1)\subset S^+(x_0, \delta)$ и образы $S^+(x_1, \delta_1)$ при преобразованиях $g\in G$ не будут попарно пересекаться, т. е.

$$g\left(S^+(x_1, \delta_1)\right)\cap h\left(S^+(x_1, \delta_1)\right) = \varnothing, \tag{15}$$

если $g\neq h$, $g\in G$, $h\in G$.

Пусть $\varphi_1(x')$ и $\varphi_2(x_n)$ — скалярные неотрицательные функции, бесконечно гладкие в R^{n-1} и на полупрямой $x_n \geqslant 0$, такие, что функция $\varphi_1(x')\times\varphi_2(x_n)$ равна 1 в $S^+\left(x_1, \frac{\delta_1}{2}\right)$ и имеет носитель в $S^+(x_1, \delta_1)$, если ее рассматривать в локальных координатах в окрестности $S^+(x_0, \delta)$. Положим

$$u_{\lambda g}(x) = \varphi_1(x')\varphi_2(x_n)e^{i\lambda(\xi_0', x')}v_g(\lambda x_n),$$

где λ — положительный параметр. Для функции $\bar{u}_\lambda = (u_{\lambda g_0}, \ldots, u_{\lambda g_{N-1}})$ в статье [1], § 14, получены оценки вида

$$\|u_{\lambda g}\|_l = C_g\lambda^{l-\frac{1}{2}} + o(\lambda^{l-\frac{1}{2}}), \tag{16}$$

$$\|A_g^0 u_{\lambda g}\|_{l-2r} = o(\lambda^{l-\frac{1}{2}}), \tag{17}$$

$$\left\|\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{m_i} B_{ikgh}u_{\lambda g}\right\|_{l-m_i-\frac{1}{2}} = o(\lambda^{l-\frac{1}{2}}), \tag{18}$$

где $\sum_{g\in G} C_g \neq 0$.

Положим теперь

$$u_\lambda = \sum_{g\in G} T_g^{-1}u_{\lambda g}.$$

Применяя неравенства (13), (14) и (16), (17), (18), получаем

$$\|Au_\lambda\|_{l-2r} = \Big\|\sum_{g\in G} T_g^{-1} A_g u_{\lambda g}\Big\|_{l-2r} \leqslant C_5 C_1(\delta) \sum_{g\in G} C_g \lambda^{l-\frac{1}{2}} + o(\lambda^{l-\frac{1}{2}}),$$

$$\|B_i u_\lambda\|_{l-m_i-\frac{1}{2}} \leqslant C_6 C_3(\delta) \sum_{g\in G} C_g \lambda^{l-\frac{1}{2}} + o(\lambda^{l-\frac{1}{2}}),$$

что приводит к оценке правой части неравенства (12):

$$\|Mu_\lambda\|_l + \|u_\lambda\|_0 \leqslant C_7(\delta) \sum_{g\in G} C_g \lambda^{l-\frac{1}{2}} + o(\lambda^{l-\frac{1}{2}}),$$

где $C_7(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. В силу условия (15) функции $T_g^{-1}u_{\lambda g}$ ортогональны в $H_l(V)$. Существует постоянная $C_8>0$ такая, что

$$\|T_g^{-1}u\|_l \geqslant C_8\|u\|_l \tag{20}$$

для всех $u\in H_l(V)$ и из неравенств (16), (20) получаем оценку

$$\|u_\lambda\|_l \geqslant C_8 \sqrt{\sum_{g\in G} C_g^2}\, \lambda^{l-\frac{1}{2}} + o(\lambda^{l-\frac{1}{2}}). \tag{21}$$

Если выбрать δ настолько малым, что

$$C_8 \sqrt{\sum_{g\in G} C_g^2} > C_7(\delta) \sum_{g\in G} C_g,$$

то при достаточно больших λ неравенства (19) и (21) противоречат (12). Теорема доказана.

4. Теоремы об индексе. Символом эллиптического оператора M будем называть систему $\{\sigma(A),\ \sigma(B_{ikg})\}$, составленную из характеристического полинома оператора A и символов операторов B_{ikg}. Порядком оператора M будем называть набор $(2r,\ m_1,\ \ldots,\ m_r)$.

Теорема 2. *Пусть $M_t=(A_t,\ B_{it})$, $0\leqslant t\leqslant 1$ — семейство эллиптических операторов с конечной группой сдвигов на границе порядка $(2r,\ m_1,\ \ldots$ $\ldots,\ m_r)$. Предположим, что символы этих операторов непрерывно зависят от t. Тогда*

$$\operatorname{ind} M_0 = \operatorname{ind} M_1.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы о гомотопической устойчивости индекса эллиптического оператора без сдвига ([1], теорема 17.1).

Нам потребуются некоторые утверждения, относящиеся к СИД операторам с конечной группой сдвигов на граничном многообразии Г. Так мы будем называть операторы вида

$$A = \sum_{g\in G} A_g T_g,$$

где A_g — матричные СИД операторы на Г. Оператору A поставим в соответствие оператор $\tilde{A}$, составленный из блоков, занумерованных парами элементов группы G, по правилу

$$[\tilde{A}]_{g,h} = T_g A_{g^{-1}h} T_g^{-1}.$$

Символ оператора A определим равенством

$$\sigma(A)=\sigma(\tilde{A}).$$

Лемма 3. *Пусть A и B — СИД операторы с конечной группой сдвигов на Γ размерностей $m\times p$ и $p\times k$. Тогда их произведение AB является СИД оператором с конечной группой сдвигов и*

$$\widetilde{AB}=\tilde{A}\cdot\tilde{B}.$$

Если, кроме того, порядки операторов в матрицах A_g не зависят от g и от номера столбца, а порядки операторов в матрицах B_g не зависят от g и от номера строки, то

$$\sigma(AB)=\sigma(A)\cdot\sigma(B).$$

Первая часть утверждения леммы проверяется непосредственно. Утверждение, относящееся к символу, следует из свойств символов СИД операторов.

Матрицы символов СИД операторов с конечной группой сдвигов характеризуются условием инвариантности, позволяющим выражать произвольный блок через блок из строки, занумерованной единичным элементом $g_0\in G$

$$[\sigma(A)]_{gh}(x',\ \xi')=[\sigma(A)]_{g_0(g^{-1}h)}\left(g^{-1}(x'),\ L_g\xi'\right), \tag{22}$$

где $g\in G,\ h\in G$.

Теорема 3. *Пусть M_1 и M_2 — эллиптические операторы вида (3) порядков $(2r,\ m_1^1,\ \ldots,\ m_r^1)$ и $(2r,\ m_1^2,\ \ldots,\ m_r^2)$ с одним и тем же оператором A. Тогда*

$$\operatorname{ind}M_1-\operatorname{ind}M_2=\operatorname{ind}S,$$

где S — некоторый сингулярный интегральный оператор с конечной группой сдвигов на граничном многообразии Γ.

Доказательство. Пусть Λ — СИД оператор на Γ с символом $|\xi'|$ и пусть $m=\max m_i^j$. Построим новые операторы

$$M_j'=\left(A,\ \Lambda^{m-m_1^j}B_1^j,\ \ldots,\ \Lambda^{m-m_r^j}B_r^j\right),\quad j=1,\ 2.$$

Оператор Λ нетеровский, его индекс равен нулю и, значит,

$$\operatorname{ind}M_j'=\operatorname{ind}M_j.$$

Поэтому без ограничения общности будем считать, что все граничные операторы имеют порядок m.

Выберем базис специального вида в пространстве устойчивых решений системы (10). Пусть $\omega_{g_0}^i(y',\ \xi',\ t),\ i=1,\ \ldots,\ r$ — базис устойчивых решений уравнения

$$A^0\left(y',\ \eta',\ i\frac{d}{dt}\right)v(t)=0,$$

где y — локальные координаты в окрестности точки $g^{-1}(x)$. Тогда столбцы матрицы

$$\omega=\omega(x',\ \xi',\ t)=\begin{pmatrix}\omega_{g_0}^1\ \omega_{g_0}^2 & \ldots & \omega_{g_0}^r\ 0 & \ldots & 0\\ 0\ 0 & \ldots & 0\ \omega_{g_1}^1 & \ldots & 0\\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\\ 0\ 0 & \ldots & 0\ 0 & \ldots & \omega_{g_{N-1}}^r\end{pmatrix}$$

будут образовывать базис устойчивых решений системы (10), где

$$\omega_g^i(x', \xi', t) = \omega_{g_0}^i\left(g^{-1}(x'), L'_{g^{-1}}\xi', t\right), \quad i = 1, \ldots, r; \ g \in G.$$

Граничные операторы запишем в виде

$$B_i^j = \sum_{g \in G} \sum_{k=0}^{m} B_{ikg}^j T_g \frac{d^k}{d\nu^k},$$

где B_{ikg}^j — СИД операторы порядка $m-k$, $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, 2$. Пусть N — оператор вычисления нормальных производных, действующий из $H_l(V)$ в пространство $H_{l-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H_{l-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

$$Nu = \left(u|_\Gamma, \left.\frac{du}{d\nu}\right|_\Gamma, \ldots, \left.\frac{d^m u}{d\nu^m}\right|_\Gamma\right).$$

Построим также операторы B^j — операторы с конечной группой сдвигов на Γ, действующие из $H_{l-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H_{l-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ в $\left[H_{l-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right]^r$:

$$B^j = \sum_{g \in G} B_g^j T_g,$$

где $j = 1, 2$; B_g^j — матричные СИД операторы на Γ с r строками и $m+1$ столбцом

$$B_g^j = \begin{pmatrix} B_{10g}^j B_{11g}^j & \cdots & B_{1mg}^j \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \\ B_{r0g}^j B_{r1g}^j & \cdots & B_{rmg}^j \end{pmatrix}.$$

Операторы M_j $(j = 1, 2)$ запишем в виде

$$M_j = (A, B^j N).$$

Обозначим B_{kg}^j $(k = 0, \ldots, m;\ g \in G,\ j = 1, 2)$ столбец матрицы B_g^j с номером k и положим

$$B_k^j = \sum_{g \in G} B_{kg}^j T_g.$$

Тогда, как в [1], условие Шапиро—Лопатинского можно записать в виде

$$\det\left[\sigma(B^j)\,\omega\right](x', \xi') \neq 0 \text{ при } \xi' \neq 0, \tag{23}$$

где

$$\left[\sigma(B^j)\,\omega\right](x', \xi') = \sum_{k=0}^{m} \sigma(B_k^j) \left.\frac{d^k\omega}{dt^k}\right|_{t=0}.$$

Зададим в локальной системе координат матрицу

$$C = \left[\sigma(B^1)\,\omega\right]\left[\sigma(B^2)\,\omega\right]^{-1}(x', \xi').$$

Матрица C имеет размерность $rN \times rN$ и составлена из блоков размерности $r \times r$. Существуют сингулярные интегральные операторы S_g, действующие в пространстве $[H_{l-m-\frac{1}{2}}(\Gamma)]^r$, такие, что символы $\sigma(S_g)$ близки к блокам $[C]_{g_0, g}$. Составим сингулярный интегральный оператор с конечной группой сдвигов на

$$S = \sum_{g \in G} S_g T_g.$$

Символ $\sigma(S)$ близок к матрице C. Действительно, блоки, стоящие в строке с номером g_0, близки по построению, а в остальных строках блоки близки в силу условия инвариантности (22), так как матрица C специально строилась инвариантной.

Так как матрица C невырожденная при $\xi' \neq 0$, символ $\sigma(S)$ также является невырожденным при достаточно точном приближении и, следовательно, оператор S — нетеровский [3]. Рассмотрим оператор

$$M_0(A,\ SB^2N) = (A,\ B^0N).$$

Оператор M_0 — нетеровский и

$$\operatorname{ind} M_0 = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} M_2. \tag{24}$$

Так как оператор S однородный, а операторы B_g^2 имеют однородные столбцы, причем порядки столбцов не зависят от g, применима лемма 3 и

$$\sigma(B^0) = \sigma(S)\cdot\sigma(B^2).$$

Записав условие Шапиро—Лопатинского для оператора M_0 в виде (23), видим, что

$$\left[\sigma(B_0)\,\omega\right] = \sigma(S)\left[\sigma(B^2)\,\omega\right],$$

и что эта матрица мало отличается от

$$\left[\sigma(B^1)\,\omega\right] = \left[\sigma(B^1)\,\omega\right]\left[\sigma(B^2)\,\omega\right]^{-1}\left[\sigma(B^2)\,\omega\right].$$

Поэтому при достаточно точном приближении $\sigma(S)$ к матрице C линейная гомотопия

$$M_t = tM_1 + (1-t)\,M_0,\quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

не выводит из класса эллиптических операторов и в силу теоремы 2

$$\operatorname{ind} M_0 = \operatorname{ind} M_1.$$

Вместе с равенством (24) это дает

$$\operatorname{ind} M_1 - \operatorname{ind} M_2 = \operatorname{ind} S,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Индекс краевой задачи (1)—(2) равен индексу некоторого сингулярного интегрального оператора с конечной группой сдвигов на границе* Г.

Для доказательства достаточно взять в качестве оператора M_2 оператор, соответствующий задаче Дирихле, имеющей нулевой индекс.

Литература

1. Агранович М. С. УМН, 20, вып. 5 (125), 1965, 3—120.
2. Антоневич А. Б. Труды II респ. конференц. матем. БССР. Минск, 1969, стр. 253—255.
3. Антоневич А. Б. ДАН СССР, **190**, № 4, 751—752, 1970.
4. Кордзадзе Р. А. ДАН СССР, **155**, № 4, 739—742, 1964.
5. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. ДАН СССР, **192**, № 3, 511—513, 1970.
6. Beals R. Bull. Amer. Math. Soc., 70, № 5, 1964, 693—696.
7. Browder F. E. Amer. I. Math., 86, № 4. 1964, 735—758.

Поступила в редакцию 23 ноября 1970 г.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина