

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

**О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ  
О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ**

А. Б. АНТОНЕВИЧ, В. Б. РЫВКИН

Пусть  $L_2(\omega)$  — пространство  $\omega$ -периодических комплекснозначных функций, квадратично суммируемых на отрезке  $[0, \omega]$  с нормой

$$\|x\| = \left( \int_0^{\omega} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Обозначим через  $W_2^m(\omega)$  пространство  $\omega$ -периодических комплекснозначных функций, имеющих абсолютно непрерывные производные до порядка  $m-1$  и имеющих производную порядка  $m$ , принадлежащую  $L_2(\omega)$ , с нормой

$$\|x\|_{W_2^m(\omega)} = \left( \sum_{k=0}^m \int_0^{\omega} |x^{(k)}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Для линейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом вида

$$Lx \equiv \sum_{k=0}^m [a_k(t) x^{(k)}(t) + b_k(t) x^{(k)}(t+h)] = f(t), \quad (1)$$

где  $a_k(t)$ ,  $b_k(t)$  — комплекснозначные  $\omega$ -периодические функции,  $f \in L_2(\omega)$ , ставится вопрос о существовании  $\omega$ -периодических решений, принадлежащих пространству  $W_2^m(\omega)$ .

В настоящей работе получены эффективные необходимые и достаточные условия нормальной разрешимости этого уравнения и показано, что его индекс равен нулю. Говорят, что уравнение (1) нормально разрешимо в пространстве  $W_2^m(\omega)$ , если

1) однородное уравнение (1) ( $f \equiv 0$ ) имеет конечное число  $n_1$  линейно независимых решений из  $W_2^m(\omega)$ ;

2) существует конечное число  $n_2$  линейно независимых функций  $y_i(t) \in L_2(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, n_2$ , таких, что неоднородное уравнение (1) имеет решение  $x \in W_2^m(\omega)$  тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\omega} f(t) \overline{y_i(t)} dt = 0, \quad i = 1, \dots, n_2. \quad (2)$$

Число  $n_1 - n_2$  называется индексом уравнения. Если уравнение (1) нормально разрешимо, то оператор  $L: W_2^m(\omega) \rightarrow L_2(\omega)$ , определенный левой частью уравнения (1), называется фредгольмовым, а число  $n_1 - n_2$  называется его индексом и обозначается  $\text{ind } L$ . Отметим, что множество значений фредгольмова оператора всегда замкнуто.

Задача о существовании периодических решений уравнений с отклоняющимся аргументом изучалась в работах [1 — 7].

Справедливость альтернативы Фредгольма для уравнений с запаздывающим аргументом доказана А. Халанаем [1] и другими методами — Е. А. Лифшицем [2] и П. П. Рыбиным [3]. Для уравнений нейтрального типа В. Р. Носовым [4] получены условия справедливости альтернативы Фредгольма, аналогичные лемме 1 настоящей работы. В случае постоянных коэффициентов Д. Векслером [5—6] изучены периодические решения в пространстве обобщенных функций и получены условия, при которых уравнение разрешимо, если правая часть ортогональна ко всем решениям однородного сопряженного уравнения. В случае, когда отклонение  $h$  соизмеримо с периодом  $\omega$  и для некоторых переменных отклонений, условия нормальной разрешимости уравнения (1) получены А. Б. Антоневицем [7].

Для применения результатов работы [7] к уравнению (1) будем рассматривать это уравнение как уравнение на окружности длины  $\omega$ . Если  $h/\omega = p/q$ , где  $p$  и  $q$  — целые, отображение  $t \rightarrow t + h$  порождает конечную группу преобразований окружности и применима теорема 1 из [7]. Условие эллиптичности вспомогательного оператора  $\tilde{A}$  в случае уравнения (1) имеет вид

$$\prod_{k=0}^{q-1} a_m(t + kh) \neq \prod_{k=0}^{q-1} b_m(t + kh).$$

Условие (3) из теоремы 1 настоящей работы является предельным случаем этого условия при  $q \rightarrow \infty$ . В случае рационального  $h/\omega$  спектр оператора  $P$  лежит в кольце, которое сужается при увеличении  $q$  и в пределе обращается в окружность, являющуюся спектром оператора  $P$  при иррациональном  $h/\omega$  (если  $p(t) \neq 0$ ).

В векторном случае в недавно вышедшей работе Э. Мухамадиева и Б. Н. Садовского [8] получена оценка спектрального радиуса оператора  $P$  и вытекающие из нее достаточные условия фредгольмовости оператора  $L$ . В настоящей работе в скалярном случае найден спектр оператора  $P$ , из вида которого вытекает, что в скалярном случае оценка из [8] дает точное значение спектрального радиуса и если  $p(t)$  обращается в нуль, условия из работы [8] являются необходимыми.

Сформулируем основной результат.

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты  $a_r(t)$  и  $b_r(t)$  — непрерывные функции,  $a_m(t) \neq 0$ ,  $b_m(t) \neq 0$ , и пусть  $h$  несоизмеримо с  $\omega$ . Для того чтобы уравнение (1) было нормально разрешимо в пространстве  $W_2^m(\omega)$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^\omega \ln |a_m(t)| dt \neq \int_0^\omega \ln |b_m(t)| dt, \quad (3)$$

причем индекс уравнения всегда равен нулю.

Докажем несколько лемм.

**Лемма 1.** Для того чтобы оператор  $L$  был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы фредгольмовым был оператор

$$A = I + \frac{b_m(t)}{a_m(t)} T_h,$$

действующий в пространстве  $L_2(\omega)$ , где  $I$  — тождественный оператор, а  $T_h$  — оператор сдвига на  $h$ , действующий по формуле

$$T_h x(t) = x(t + h).$$

Кроме того,  $\text{ind } L = \text{ind } A$ .

Доказательство. Оператор

$$L_1 x = \sum_{k=0}^{m-1} [a_k(t) x^{(k)}(t) + b_k(t) x^{(k)}(t + h)]$$

является вполне непрерывным как оператор, действующий из пространства  $W_2^m(\omega)$  в  $L_2(\omega)$ . В силу теорем об устойчивости свойства оператора быть фредгольмовым и устойчивости индекса при вполне непрерывных возмущениях [9] оператор  $L$  фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор

$$L_0 x = a_m(t) x^{(m)}(t) + b_m(t) x^{(m)}(t + h),$$

причем

$$\text{ind } L = \text{ind } L_0.$$

Оператор  $L_0$  представляется в виде произведения

$$L_0 = a_m(t) A \frac{d^m}{dt^m},$$

причем оператор дифференцирования фредгольмов и имеет индекс нуль, а оператор умножения на функцию  $a_m(t)$  обратим. Поэтому оператор  $L_0$  фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор  $A$ , причем  $\text{ind } L_0 = \text{ind } A$ .

*Лемма 2. Если  $f(t)$  — непрерывная  $\omega$ -периодическая функция и  $h/\omega$  иррационально, то последовательность*

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t + kh)$$

*равномерно по  $t$  стремится к постоянной  $C = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(t) dt$ .*

Доказательство содержится в [8].

*Лемма 3. Пусть  $p(t)$  — непрерывная  $\omega$ -периодическая функция,  $p(t) \neq 0$ ,  $h/\omega$  иррационально. Тогда спектр оператора  $P = p(t) T_h$  в гильбертовом пространстве  $L_2(\omega)$  является окружность*

$$|\lambda| = \exp \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \ln |p(t)| dt.$$

Доказательство. Вычислим спектральный радиус оператора  $P$  [10]

$$\begin{aligned} r(P) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|P^n\|)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_t (p(t) p(t+h) \dots p(t+(n-1)h))^{1/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_t \exp \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln |p(t+kh)| = \exp \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \ln |p(t)| dt. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления для обратного оператора  $P^{-1}$  дают

$$r(P^{-1}) = \exp \left( - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \ln |p(t)| dt \right).$$

Таким образом, спектральные значения оператора  $P$  удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda| \leq \exp \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \ln |p(t)| dt,$$

$$\left| \frac{1}{\lambda} \right| \leq \exp \left( -\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \ln |p(t)| dt \right),$$

откуда  $|\lambda| = \exp \left( \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \ln |p(t)| dt \right)$ .

Покажем, что спектр заполняет всю окружность. Так как спектр ограниченного оператора не пуст, на этой окружности существует  $\lambda_0$  такое, что оператор  $P_{\lambda_0} = -\lambda_0 I + P$  не имеет ограниченного обратного. Пусть  $U_k$  — оператор умножения на функции  $\exp \frac{i2\pi kt}{\omega}$  и  $P_{\lambda_0}^k = U_k P_{\lambda_0} U_k^{-1}$ . Тогда  $P_{\lambda_0}^k$  тоже не имеет ограниченного обратного. Так как

$$P_{\lambda_0}^k = -\lambda_0 I + \exp \left( -\frac{i2\pi kh}{\omega} \right) P,$$

условие, что оператор  $P_{\lambda_0}^k$  не имеет ограниченного обратного, равносильно утверждению, что числа  $\lambda_k = \lambda_0 \exp \frac{i2\pi kh}{\omega}$  принадлежат спектру оператора  $P$ . Так как  $h/\omega$  иррационально, спектральные значения  $\lambda_k$  образуют всюду плотное множество на окружности, и в силу замкнутости спектра вся окружность  $|\lambda| = \exp \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \ln |p(t)| dt$  принадлежит спектру оператора  $P$ .

Доказательство теоремы 1. Достаточность. Пусть  $\int_0^{\omega} \ln |a_m(t)| dt \neq \int_0^{\omega} \ln |b_m(t)| dt$ . Тогда в силу леммы 3 число  $\lambda = -1$  не является спектральным значением для оператора  $P = \frac{b_m(t)}{a_m(t)} T_h$ , оператор  $A = I + P$  имеет ограниченный обратный, и в силу леммы 1 оператор  $L$  фредгольмов и  $\text{ind } L = 0$ .

Необходимость. Пусть оператор  $L$  фредгольмов. Предположим, что условие (3) нарушено. У оператора  $L$  существует такая окрестность в равномерной операторной топологии, что все операторы из этой окрестности фредгольмовы и имеют индекс, равный индексу оператора  $L$  [9]. В эту окрестность попадет хотя бы один оператор вида (1), для которого выполнено условие (3), имеющий в силу первой части теоремы нулевой индекс. Следовательно,  $\text{ind } L = 0$  и в силу леммы 1 оператор  $A$  фредгольмов и  $\text{ind } A = 0$ . Согласно предположению,  $\int_0^{\omega} \ln \left| \frac{b_m(t)}{a_m(t)} \right| dt = 0$ , спектр оператора  $P$  заполняет всю окружность  $|\lambda| = 1$  и  $\lambda = -1$  является спектральным зна-

чением. Если  $\lambda = -1$  не является собственным значением, то оператор  $A$  как фредгольмов оператор с нулевым ядром и нулевым индексом имеет ограниченный обратный, что противоречит тому, что  $\lambda = -1$  принадлежит спектру. Значит,  $\lambda = -1$  является собственным значением оператора  $P$ , т. е. существует функция  $x(t) \in L_2(\omega)$ ,  $\|x\| \neq 0$ , такая, что  $x + Px = 0$ . Заметим, что

$$\int_0^{\omega} \cos \frac{2\pi n t}{\omega} |x(t)|^2 dt \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$  как коэффициенты Фурье интегрируемой функции. Значит, существует  $N$ , что для  $n > N$  имеем

$$\left| \int_0^{\omega} \cos \frac{2\pi n t}{\omega} |x(t)|^2 dt \right| < \frac{1}{2} \|x\|^2. \quad (4)$$

Так как  $h/\omega$  иррационально, существует последовательность целых чисел  $n_k$  такая, что  $n_{k+1} - n_k > N$  и  $\lambda_k = \exp \frac{i2\pi n_k h}{\omega} \rightarrow -1$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Функции  $x_k(t) = \exp \frac{i2\pi n_k t}{\omega} x(t)$  являются собственными функциями оператора  $P$  с собственными значениями  $\lambda_k$ . Поэтому

$$Ax_k = (1 + \lambda_k) x_k \rightarrow 0$$

при  $k \rightarrow \infty$ . В силу неравенства (4) при  $k \neq p$

$$\|x_k - x_p\|^2 = 2\|x\|^2 - 2 \int_0^{\omega} \cos \frac{2\pi(n_k - n_p)t}{\omega} |x(t)|^2 dt \geq \|x\|^2$$

и, следовательно, последовательность  $x_k$  не компактна. Поэтому множество значений оператора  $A$  не замкнуто [11], что противоречит фредгольмовости оператора  $A$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.** Пусть  $a_k(t)$  и  $b_k(t)$  — непрерывные функции,  $a_m(t) \neq 0$ , а  $b_m(t)$  обращается в нуль,  $h/\omega$  иррационально. Справедливы утверждения:

а) если  $b_m(t) = 0$  на множестве ненулевой меры или если  $\int_0^{\omega} \ln |b_m(t)| dt$  расходится, то уравнение (1) нормально разрешимо;

б) если  $\int_0^{\omega} \ln |b_m(t)| dt$  конечен, то уравнение (1) нормально разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\omega} \ln |a_m(t)| dt > \int_0^{\omega} \ln |b_m(t)| dt. \quad (5)$$

**Доказательство.** Для доказательства нормальной разрешимости достаточно в силу леммы 1 доказать обратимость оператора

$$A = I + \frac{b_m(t)}{a_m(t)} T_h = I + P.$$

Оценим спектральный радиус оператора  $P$ . По функции  $p(t) = \frac{b_m(t)}{a_m(t)}$  построим функцию

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} |p(t)|, & \text{если } |p(t)| \geq \varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{если } |p(t)| < \varepsilon, \end{cases}$$

и оператор  $P_\varepsilon = p_\varepsilon(t)T_h$ . Так как  $p_\varepsilon(t) \geq |p(t)|$ , спектральные радиусы связаны неравенством  $r(P_\varepsilon) \geq r(P)$  и, значит,  $r(P) \leq \inf_{\varepsilon > 0} r(P_\varepsilon)$ . В силу леммы 3

$$r(P_\varepsilon) = \exp \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \ln |p_\varepsilon(t)| dt.$$

Тогда в случае а) имеем  $\inf_{\varepsilon > 0} r(P_\varepsilon) = 0$ ,  $\lambda = -1$  не принадлежит спектру оператора  $P$ , и оператор  $A$  обратим. В случае б) имеем

$$\inf_{\varepsilon > 0} r(P_\varepsilon) = \exp \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \ln \left| \frac{b_m(t)}{a_m(t)} \right| dt < 1,$$

и по-прежнему  $\lambda = -1$  не принадлежит спектру оператора  $P$ .

Нам понадобится

Лемма 4. Пусть  $p(t)$  — непрерывная  $\omega$ -периодическая функция, обращающаяся в нуль. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  и любого  $M \leq \int_0^\omega \ln |p_\varepsilon(t)| dt$  существует непрерывная  $\omega$ -периодическая функция  $q(t)$  такая, что  $q(t) \neq 0$ ,  $|p(t) - q(t)| < \varepsilon$  и  $\int_0^\omega \ln |q(t)| dt = M$ .

Доказательство. Пусть  $p(t_0) = 0$  и пусть  $\delta > 0$  таково, что при  $|t - t_0| < \delta$  выполняется  $|p(t)| < \varepsilon$ . Зададим непрерывную  $\omega$ -периодическую функцию  $q(t)$ , положив, что на отрезке длины  $\omega$ , содержащем внутри себя интервал  $|t - t_0| < \delta$ ,

$$|q(t)| = \begin{cases} |p(t)|, & \text{если } |p(t)| \geq \varepsilon/2, \\ \varepsilon/2, & \text{если } |p(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |t - t_0| \geq \delta, \\ \frac{\varepsilon}{2} \exp[-C(t - t_0 + \delta)(t - t_0 - \delta)], & \text{если } |t - t_0| < \delta, \end{cases}$$

и что  $\arg q(t)$  есть непрерывная функция, такая, что  $\arg q(t) = \arg p(t)$ , если  $|p(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ . Тогда  $q(t) \neq 0$ , для любого  $C \geq 0$  выполняется

$$|q(t) - p(t)| < \varepsilon.$$

При  $C = 0$  имеем

$$\int_0^\omega \ln |q(t)| dt = \int_0^\omega \ln |p_\varepsilon(t)| dt.$$

При  $C \rightarrow +\infty$  имеем

$$\int_0^\omega \ln |q(t)| dt \rightarrow -\infty$$

и при некотором  $C_0 \geq 0$   $\int_0^{\omega} \ln |q(t)| dt = M$ .

Продолжим доказательство теоремы. Пусть уравнение (1) нормально разрешимо. Тогда оператор  $A$  фредгольмов и существует  $\varepsilon$ -окрестность оператора  $A$ , в которой все операторы фредгольмовы [10]. Предположим,

что условие (5) нарушено, т. е.  $\int_0^{\omega} \ln |p(t)| dt \geq 0$ . В силу леммы 4 суще-

ствует  $q(t)$ , что  $|p(t) - q(t)| < \varepsilon$  и  $\int_0^{\omega} \ln |q(t)| dt = 0$ . В силу теоремы 1

оператор  $I + q(t)T_h$  не является фредгольмовым. Но он попадает в  $\varepsilon$ -окрестность оператора  $A$ , в которой все операторы фредгольмовы. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Теорема 2 остается справедливой, если в формулировке  $a_m(t)$  и  $b_m(t)$  поменять местами.

Теорема 3. Если коэффициенты  $a_m(t)$  и  $b_m(t)$  непрерывны и оба обращаются в нуль, то уравнение (1) не является нормально разрешимым.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) нормально разрешимо. Тогда оператор  $A = a_m(t)I + b_m(t)T_h$  является фредгольмовым и у него существует  $\varepsilon$ -окрестность, состоящая из фредгольмовых операторов. Согласно лемме 4, существуют  $a(t)$  и  $b(t)$  такие, что  $a(t) \neq 0$ ,  $|a_m(t) -$

$-a(t)| < \varepsilon/2$ ,  $b(t) \neq 0$ ,  $|b_m(t) - b(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , и  $\int_0^{\omega} \ln |a(t)| dt = \int_0^{\omega} \ln |b(t)| dt$ .

Тогда оператор  $A_1 = a(t)I + b(t)T_h$  попадает в  $\varepsilon$ -окрестность оператора  $A$  и является фредгольмовым. С другой стороны, в силу теоремы 1 оператор  $A_1$  не является фредгольмовым. Теорема доказана.

Замечание. Функции  $y_i(t) \in L_2(\omega)$ , участвующие в условии (2), являются решениями однородного сопряженного уравнения

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [\bar{a}_h(t) y(t) + \bar{b}_h(t-h) y(t-h)] = 0, \quad (6)$$

где дифференцирование понимается в смысле обобщенных функций. Если коэффициенты  $a_h(t)$  и  $b_h(t)$  имеют  $k$  непрерывных производных, то  $y_i(t) \in W^m(\omega)$  и при решении уравнения (6) можно ограничиться обычными (не обобщенными) решениями.

## Литература

1. H a l a n a y A. Revue de math. pure et appl., 6, № 1, 1961.
2. Лифшиц Е. А. Альтернатива Фредгольма для задачи о периодических решениях дифференциальных уравнений с распределенным аргументом. Проблемы математического анализа сложных систем. 1. Изд. ВГУ, 1967.
3. Рыбин П. П. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, т. VII. М., УДН им. П. Лумумбы, 1969.
4. Носов В. Р. Дифференц. уравнения, 7, № 4, 1971.
5. Wexler D. C. R. Acad. Sci. Paris, 265, 56—58, 1967.
6. Wexler D. J. Diff. Eq., 5, № 1, 1969.
7. Антонович А. Б. ДАН СССР, 190, № 4, 1970.
8. Мухамадиев Э., Садовский Б. Н. Матем. заметки, 13, № 1, 1973.
9. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. УМН, 12, вып. 2, 1957.
10. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. М., «Мир», 1966.
11. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963.

Поступила в редакцию  
28 февраля 1973 г.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина,  
Научно-исследовательский институт  
электронных вычислительных машин