СЕНТЯБРЬ 1975 г., ТОМ XI, № 9

УДК 517.937

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ НА ТОРЕ

А. Б. АНТОНЕВИЧ

На торе T^m, реализованном как пространство R^m, приведенное по mod 1 по каждой переменной, рассмотрим псевдодифференциальный оператор с отклоняющимся аргументом вида

$$Au \equiv A_0(x, D)u - A_1(x, D)Tu, \tag{1}$$

где $A_i(x, D)$, $i = 0, 1$, — псевдодифференциальные операторы порядка r на торе T^m, T — оператор сдвига, действующий на функцию $u(x)$ по формуле $Tu(x) = u(h(x))$, где $h(x) = x + h$, h — заданный вектор. Требуется найти условия, при которых оператор A фредгольмов в соответствующих пространствах Соболева. Аналогичная задача для произвольного отображения $h(x)$ изучалась в работах [1—3] при условии, что отображение $h(x)$ имеет конечный порядок (некоторая его итерация есть тождественное отображение).

В случае окружности ($m = 1$) для оператора вида (1) в работах [4—6] получены достаточные, а в работах [7—8] необходимые и достаточные условия, при которых оператор A фредгольмов. В работе [5] получены также достаточные условия фредгольмовости одномерного сингулярного интегрального оператора в случае произвольного отображения $h(x)$.

В настоящей работе показано, что принадлежность оператора A классу фредгольмовых операторов зависит от того, является ли $\lambda = 1$ спектральным значением некоторого вспомогательного оператора $P = p(x)T$, найден спектр этого оператора и вытекающие отсюда необходимые и достаточные условия фредгольмовости оператора A. Полученные результаты обобщают результаты работ [7—8], относящихся к случаю $m = 1$.

Орбитой β на торе T^m назовем замыкание множества точек вида $\{x+kh, k = 0, \pm 1, \ldots\}$, где x фиксировано. Орбиты являются подмногообразиями, размерность которых равна числу рационально независимых среди чисел $h_1, \ldots, h_m$. Тор T^m расслаивается на орбиты, на каждой из которых определена естественная мера, инвариантная относительно сдвига $h(x)$. Множество B орбит β обладает естественной структурой компактного связного многообразия размерности $m - k$.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на T^m. Тогда последовательность* $f_N(x) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} f(x + kh)$ *равномерно по x стремится к функции*

$$F(\beta) = \frac{1}{|\beta|}\int\limits_{\beta} f(x)\, d\mu(x),$$

постоянной на орбитах, где β — орбита, содержащая точку x, $|\beta|$ — ее мера.

Доказательство. Пусть $q(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant p} a_\alpha \exp i2\pi(\alpha, x)$ — тригонометрический многочлен такой, что $|f(x)-q(x)|<\varepsilon$ $\left(\text{здесь } \alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\right.$ — целочисленный вектор, $\left.|\alpha|=\sum_{j=1}^{m}|\alpha_j|\right)$. Рассмотрим

$$q_N(x)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} q(x+kh)=\frac{1}{N}\sum_{\exp i2\pi(\alpha,h)\neq 1} a_\alpha \frac{1-\exp i\,2\pi N(\alpha, h)}{1-\exp i\,2\pi(\alpha, h)}\times$$

$$\times \exp i\,2\pi(\alpha, x)+\sum_{\exp i\,2\pi(\alpha,h)=1} a_\alpha \exp i\,2\pi(\alpha, x).$$

Так как первая сумма равномерно стремится к нулю, получаем

$$q_N(x)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} Q(x)=\sum_{\exp i\,2\pi(\alpha,h)=1} a_\alpha \exp i\,2\pi(\alpha, x).$$

Очевидно, так как $Q(x+h)=Q(x)$, т. е. $Q(x)$ постоянна на орбитах, что

$$\frac{1}{|\beta|}\int_\beta Q(x)\,d\mu(x)=Q(x)\equiv Q(\beta).$$

Если $\exp i\,2\pi(\alpha, h)\neq 1$, то $\frac{1}{|\beta|}\int_\beta \exp i\,2\pi(\alpha, x)\,d\mu(x)=(\exp i\,2\pi(\alpha, x), 1)=$ $=[1-\exp i\,2\pi(\alpha, h)]^{-1}((I-T)\exp i\,2\pi(\alpha, x), 1)=[1-\exp i\,2\pi(\alpha, h)]^{-1}\times$ $\times(\exp i\,2\pi(\alpha, x), (I-T^*)\,1)=0$. Поэтому $\frac{1}{|\beta|}\int_\beta q(x)\,d\mu(x)=Q(\beta)$.

Для $\varepsilon>0$ выберем N_0 так, что для $N>N_0$, $|q_N(x)-Q(x)|<\varepsilon$. Тогда для $N>N_0$ получаем неравенство

$$|f_N(x)-F(\beta)|\leqslant|f_N(x)-q_N(x)|+|q_N(x)-Q(\beta)|+$$

$$+|Q(\beta)-F(\beta)|\leqslant 3\varepsilon,$$

которое доказывает лемму.

Замечание. Сходимость в среднем $f_N(x)\to F(x)$ утверждается в статистической эргодической теореме Неймана [9].

Определение. Средним геометрическим непрерывной функции $p(x)\geqslant 0$ на орбите β назовем число

$$M_\beta[p(x)]=\begin{cases}\exp\dfrac{1}{|\beta|}\displaystyle\int_\beta \ln p(x)\,d\mu(x), & \text{если интеграл существует,}\\[2ex] 0, & \text{если интеграл расходится.}\end{cases}$$

Лемма 2. *Если $p(x)$ — непрерывная функция на торе, то спектральный радиус* $\operatorname{spr}[P(\beta)]$ *оператора $P(\beta)=p(x)T$ в пространстве $L_2(\beta)$ равен среднему геометрическому модуля коэффициента* $p(x)$, т. е. $\operatorname{spr}[P(\beta)]=$ $=M_\beta[|p(x)|]$.

Доказательство. Для вычисления спектрального радиуса применим формулу Гельфанда [10]

$$\operatorname{spr}[P(\beta)]=\lim_{N\to\infty}\|P^N(\beta)\|^{1/N}.$$

В нашем случае

$$\|P^N(\beta)\| \max_{x\in\beta} \left| \prod_{k=0}^{N-1} p(x+kh) \right| .$$

Рассмотрим сначала случай $p(x) \neq 0$. Применяя лемму 1, получаем

$$\operatorname{spr}[P(\beta)] = \lim_{N\to\infty} \max_{x\in\beta} \prod_{k=0}^{N-1} |p(x+kh)| = \lim_{N\to\infty} \max_{x\in\beta} \times$$

$$\times \exp \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln|p(x+kh)| = \exp \frac{1}{|\beta|} \int_{\beta} \ln|p(x)\, d\mu(x) = M_\beta[\,|p(x)|\,] .$$

Если $p(x)$ обращается в нуль, рассмотрим функции

$$p_n(x) = \begin{cases} |p(x)|, & \text{если} \quad |p(x)| \geqslant \dfrac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если} \quad |p(x)| < \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

$$p_0(x) = |p(x)|,$$

и операторы $P_n(\beta) = p_n(x)T$. Так как $p_0(x) \leqslant p_n(x)$, то

$$\operatorname{spr}[P_0(\beta)] \leqslant \operatorname{spr}[P_n(\beta)]. \tag{2}$$

При $n \to \infty$ последовательность $\operatorname{spr}[P_n(\beta)]$ монотонно убывает, и так как она ограничена снизу, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{spr}[P_n(\beta)]$.

По доказанной части леммы $\operatorname{spr}[P_n(\beta)] = M_\beta[p_n(x)]$. Так как $P_n(\beta) \to P_0(\beta)$ при $n \to \infty$, из полунепрерывности сверху спектрального радиуса $\operatorname{spr}[P_n(\beta)]$ [10] и неравенства (2) получаем

$$\lim_{n\to\infty} M_\beta[p_n(x)] \leqslant \operatorname{spr}[P_0(\beta)] \leqslant \lim_{n\to\infty} M_\beta[p_n(x)\,].$$

Отсюда следует утверждение леммы

$$\operatorname{spr}[P(\beta)] = \operatorname{spr}[P_0(\beta)] = \lim M_\beta[p_n(x)] = M_\beta[|p(x)|\,].$$

Лемма 3. *Если хотя бы одно из чисел h_j иррационально, то спектр оператора $P(\beta)$ инвариантен относительно вращения вокруг точки $\lambda = 0$.*

Доказательство. Пусть λ_0 — спектральное значение оператора $P(\beta)$, т. е. $\lambda_0 I - P(\beta)$ не имеет обратного. Обозначив через U оператор умножения на функцию $\exp(i2\pi x_{j_0})$, получим, что оператор

$$\lambda_0 \exp(i2\pi k h_{j_0})\, I - P(\beta) = \exp(i2\pi k h_{j_0})\, U^k [\lambda_0 I - P(\beta)]\, U^{-k}$$

не имеет обратного, т. е. число $\lambda_0 \exp(i2\pi k h_{j_0})$ принадлежит спектру оператора $P(\beta)$. В силу иррациональности числа h_{j_0} эти значения плотны на окружности радиуса $|\lambda_0|$ и, значит, вся окружность принадлежит спектру.

Теорема 1. *Пусть $p(x)$ — непрерывная функция на торе, и пусть среди чисел h_j есть хотя бы одно иррациональное. Спектром оператора $P(\beta) = p(x)T$ в пространстве $L_2(\beta)$ является окружность радиуса $M_\beta[\,|p(x)|\,]$, если $p(x) \neq 0$ на орбите β, и круг радиуса $M_\beta[\,|p(x)|\,]$, если $p(x)$ обращается в нуль на орбите β.*

Доказательство. Пусть $p(x) \neq 0$ на орбите β. Тогда существует обратный оператор $P^{-1}(\beta) = [p(x+h)]^{-1} T^{-1}$. Применяя к оператору $P^{-1}(\beta)$ лемму 2, получаем

$$\operatorname{spr}[P^{-1}(\beta)] = \exp\left[-\frac{1}{|\beta|}\int_{\beta} \ln|p(x)|\,dx\right] = \{\operatorname{spr}[P(\beta)]\}^{-1},$$

откуда вытекает, что весь спектр оператора $P(\beta)$ расположен на окружности радиуса $\operatorname{spr}[P(\beta)]$. Так как спектр ограниченного оператора не пуст, в силу леммы 3 вся окружность принадлежит спектру.

Пусть теперь $p(x_0) = 0$, $x_0 \in \beta$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что $|p(x)| < \varepsilon$, если $|x - x_0| < \delta$. Возьмем функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x - x_0| > \delta, \\ \dfrac{|x - x_0|}{\delta}, & \text{если } |x - x_0| \leqslant \delta. \end{cases}$$

Построим операторы

$$P_c(\beta) = p(x)\,[\psi(x)]^c\, T.$$

Если $\operatorname{spr}[P(\beta)] = 0$, то $\lambda = 0$ является единственной точкой спектра. Пусть $\operatorname{spr}[P(\beta)] > 0$. Возьмем λ, $|\lambda| \leqslant \operatorname{spr}[P(\beta)]$, и предположим, что λ — регулярное значение оператора $P(\beta)$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, что все операторы Q, удовлетворяющие условию

$$\|\lambda I - P - Q\| < \varepsilon, \tag{3}$$

имеют обратные. При $c \gg 0$ все операторы $Q = \lambda I - P_c\ (\beta)$ удовлетворяют условию (3) и λ является регулярным значением оператора $P_c(\beta)$. Если

$$0 < |\lambda| \leqslant \operatorname{spr}[P(\beta)], \tag{4}$$

то можно выбрать $c \gg 0$ так, что $\operatorname{spr}[P_c(\beta)] = |\lambda|$. На окружности радиуса $\operatorname{spr}[P_c(\beta)]$ есть хотя бы одно спектральное значение оператора $P_c(\beta)$ и в силу леммы 3 λ является спектральным значением. Полученное противоречие доказывает, что все λ, удовлетворяющие условию (4), принадлежат спектру оператора $P(\beta)$, и теорема доказана в силу замкнутости спектра.

Теорема 2. *Пусть $p(x, \xi)$ — непрерывная функция на $T^m \times S^{m-1}$. Спектром оператора $P = p(x, \xi)\, T$ в пространстве $L_2(T^m \times S^{m-1})$ является кольцо*

$$\min_{\beta,\xi} \operatorname{spr}[P(\beta, \xi)] \leqslant |\lambda| \leqslant \max_{\beta,\xi} \operatorname{spr}[P(\beta, \xi)] \tag{5}$$

в случае $p(x, \xi) \neq 0$, и круг

$$|\lambda| \leqslant \max_{\beta,\xi} \operatorname{spr}[P(\beta, \xi)] \tag{6}$$

если $p(x, \xi)$ обращается в нуль.

Доказательство. Оператор P разлагается в прямой интеграл [11]:

$$P = \int_{B \times S^{m-1}} P(\beta, \xi)\, d\mu(\beta, \xi).$$

Поэтому оператор $\lambda I - P$ имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, когда почти для всех (β, ξ) существуют обратные $[\lambda I - P(\beta, \xi)]^{-1}$ и существует постоянная C, что

$$\|[\lambda I - P(\beta, \xi)]^{-1}\| \leqslant C.$$

Пусть для некоторого λ не выполнены условия (5), (6). Покажем, что λ — регулярное значение оператора P. В силу теоремы 1 число λ является регулярным значением для всех операторов $P(\beta, \xi)$ и, значит, все операторы $\lambda I - P(\beta, \xi)$ имеют обратные в соответствующих пространствах $L_2(\beta)$. Так как существует естественный изоморфизм пространств $L_2(\beta)$ с различными β, все эти операторы можно рассматривать в одном фиксированном пространстве $L_2(\beta)$. Это множество операторов компактно, как непрерывный образ компактного многообразия $B\times S^{m-1}$. Так как переход к обратному является непрерывной операцией на группе обратимых операторов, множество обратных компактно и, следовательно, ограничено. В силу ранее сделанного замечания отсюда вытекает, что λ является регулярным значением оператора P. Покажем теперь, что если λ является спектральным значением для одного из операторов $P(\beta, \xi)$, то оно является спектральным и для оператора P. Если оператор $\lambda I - P(\beta, \xi)$ не имеет обратного, то в окрестности радиуса $1/2C$ этого оператора любой обратимый оператор A удовлетворяет условию $\|A^{-1}\| \geqslant 2C$. Если предположить, что λ — регулярное значение для оператора P, то в этой окрестности найдется оператор вида $\lambda I - P(\beta', \xi')$ такой, что $\|[\lambda I - P(\beta', \xi')]^{-1}\| \leqslant C$, и получаем противоречие.

Нам осталось доказать, что множества, указанные в условии теоремы, являются объединением спектров операторов $P(\beta, \xi)$. Если $p(x, \xi) \neq 0$, то спектральные радиусы этих операторов непрерывно зависят от параметров (β, ξ). Из компактности пространства параметров вытекает, что минимум и максимум в условии (5) достигаются, а из связности, —что все промежуточные значения также являются спектральными. Если $p(x, \xi)$ обращается в нуль, то имеется лишь полунепрерывная сверху [10] зависимость спектрального радиуса от параметров (β, ξ). Пусть $\tau = \sup\limits_{\beta, \xi} \operatorname{spr}[P(\beta, \xi)]$ и $|\lambda| \leqslant \tau$. Из полунепрерывности сверху вытекает, что верхняя грань достигается на некоторой паре (β_0, ξ_0). Если $p(x, \xi_0)$ обращается в нуль на β_0, то λ является спектральным значением для оператора $P(\beta_0, \xi_0)$. Если $p(x, \xi_0) \neq 0$ на орбите β_0, то найдется кривая (β_t, ξ_t) в пространстве пар $B\times S^{m-1}$, что на орбитах β_t, $0 \leqslant t < 1$, $p(x, \xi_t) \neq 0$, а на орбите β_1 функция $p(x, \xi_1)$ обращается в нуль. Рассмотрим функцию $f(t) = \operatorname{spr}[P(\beta_t, \xi_t)]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Если $|\lambda| \leqslant f(1)$, то λ является спектральным значением для оператора $P(\beta_1, \xi_1)$. Пусть $|\lambda| > f(1)$. Если существует t_1, $0 \leqslant t_1 < 1$, что $f(t_1) \leqslant f(1)$, то на отрезке $[0, t_1]$ функция $f(t)$ непрерывна и принимает в некоторой точке промежуточное значение $|\lambda|$. Если же для всех t, $0 \leqslant t < 1$, выполнено $f(t) > f(1)$, то из полунепрерывности в точке $t=1$ следует непрерывность функции $f(t)$ на отрезке $[0, 1]$ и она принимает промежуточное значение $|\lambda|$. Теорема доказана.

Теперь можно исследовать псевдодифференциальные операторы с отклоняющимся аргументом вида (1). Будем рассматривать следующие три случая: I) операторы $A_0(x, D)$ и $A_1(x, D)$ эллиптические; II) оператор $A_0(x, D)$ эллиптический, оператор $A_1(x, D)$ неэллиптический; III) оператор $A_0(x, D)$ неэллиптический, оператор $A_1(x, D)$ эллиптический. Символы операторов будем считать бесконечно гладкими.

Теорема 3. *Пусть среди чисел h_j есть хотя бы одно иррациональное. Оператор A вида (1) является фредгольмовым оператором из пространства Соболева $H_l(T^m)$ в $H_{l-r}(T^m)$ тогда и только тогда, когда на каждой орбите для каждого $\xi \neq 0$ выполнено условие в каждом из случаев соответственно*

I) $M_\beta[|A_0(x, \xi)|] \neq M_\beta[|A_1(x, \xi)|]$;

II) $M_\beta[|A_0(x, \xi)|] > M_\beta[|A_1(x, \xi)|]$;

III) $M_\beta[|A_0(x, \xi)|] < M_\beta[|A_1(x, \xi)|]$.

Здесь через $A_0(x, \xi)$ *и* $A_1(x, \xi)$ *обозначены главные символы псевдодифференциальных операторов* $A_0(x, D)$ *и* $A_1(x, D)$. *Если* $m \geqslant 2$, *то во всех трех случаях* $\operatorname{ind} A = 0$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $A_0(x, D)$ — эллиптический оператор и $M_\beta[|A_0(x, \xi)|] > M_\beta[|A_1(x, \xi)|]$. Пусть $R(x, D)$ — регуляризатор для оператора $A_0(x, D)$. Через $\Lambda(D)$ обозначим псевдодифференциальный оператор с символом $\Lambda(\xi) = |\xi|$, изоморфно отображающий пространство $H_l(T^m)$ на $H_{l-1}(T^m)$ при всех l [12]. Достаточно доказать, что оператор $\Lambda^l R A \Lambda^{-l}$, действующий в пространстве $H_0(T^m) = L_2(T^m)$, фредгольмов. Так как оператор Λ перестановочен с оператором T, получаем, что

$$B \overset{\text{def}}{=} \Lambda^l R A \Lambda^{-l} = I - P(x, D)T,$$

где $P(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор порядка нуль, и его символ $p(x, \xi) = A_1(x, \xi)[A_0(x, \xi)]^{-1}$.

Из условия теоремы получаем, что

$$\max_{\beta, \xi} M_\beta[|p(x, \xi)|] = q < 1.$$

В пространстве $L_2(T^m \times S^{m-1})$ рассмотрим оператор $P_1 = p(x, \xi)T$. Согласно теореме 2, $\operatorname{spr}[P_1] = q$. Отметим также, что

$$\| P_1^N \|^{1/N} = \left[\max_{x, \xi} \prod_{k=0}^{N-1} |p(x + kh, \xi)|\right]^{1/N} \to q$$

при $n \to \infty$.

Рассмотрим образы $\tilde{B}$, $\widetilde{P(x, D)}$ операторов B и $P(x, D)$ в фактор-алгебре ограниченных линейных операторов в $L_2(T^m)$ по подалгебре вполне непрерывных операторов. Согласно теореме из [12],

$$\|[\widetilde{P(x, D)}]^N\| = \max_{x, \xi} \prod_{k=0}^{N-1} |p(x + kh, \xi)|,$$

и, следовательно,

$$\operatorname{spr}[\widetilde{P(x, D)}] = \operatorname{spr}[P_1] = q.$$

Поэтому элемент $\tilde{B}$ обратим в фактор-алгебре, откуда вытекает, что оператор B фредгольмов.

Случай, когда оператор $A_1(x, D)$ эллиптический и $M_\beta[|A_1(x, \xi)|] > M_\beta[|A_0(x, \xi)|]$, сводится к предыдущему умножением справа на оператор T^{-1}.

При выполнении условий теоремы оператор A гомотопен в классе фредгольмовых операторов тому из слагаемых $A_0(x, D)$, $A_1(x, D)T$, у которого среднее геометрическое символа больше. Такой оператор имеет при $m \geqslant 2$ нулевой индекс и, значит, $\operatorname{ind} A = 0$.

Необходимость. Пусть оператор A фредгольмов. Без ограничения общности можем считать, что операторы $A_0(x, D)$ и $A_1(x, D)$ имеют нулевой порядок и действуют в пространстве $L_2(T^m)$. Предположим, что условия теоремы нарушены при некотором ξ_0. Рассуждая аналогично теореме 2, получаем, что оператор

$$C = A_0(x, \xi_0) - A_1(x, \xi_0)T$$

необратим в $L_2(T^m)$. Тогда существует последовательность $u_n \in L_2(T^m)$, $\|u_n\| = 1$, что $Cu_n \to 0$, либо такая последовательность существует для сопряженного оператора. В последнем случае все дальнейшие рассуждения проводим для сопряженных операторов. Без ограничения общности можем считать, что функции u_n являются тригонометрическими многочленами:

$$u_n(x) = \sum_{|\alpha|<p_n} a_{\alpha n} \exp[i2\pi(\alpha, x)].$$

Возьмем последовательность ξ_n векторов с рациональными координатами такую, что $|\xi_n - \xi_0| \to 0$, и последовательность целых чисел λ_n такую, что а) $\lambda_n \xi_n$ — целочисленный вектор; б) $\exp[i2\pi\lambda_n(\xi_n, h)] \to 1$ при $n \to \infty$; в) $|\lambda_n \xi_n| > |\lambda_{n-1}\xi_{n-1}| + p_{n-1} + p_n$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \exp[i2\pi\lambda_n(\xi_n, x)]\, u_n(x).$$

Эта последовательность ограничена и некомпактна (вытекает из условия в). Используя теорему из работы Хёрмандера [13], получаем, что

$$\Delta = |\exp[i2\pi\lambda(\xi_n, x)]\, A \exp[-i2\pi\lambda(\xi_n, x)]\, u_n(x) -$$
$$- \{A_0(x, \xi_n)\, u_n(x) - \exp[-i2\pi\lambda(\xi_n, h)]\, A_1(x, \xi_n)\, Tu_n(x)\}| \to 0$$

при $\lambda \to \infty$ равномерно по x. Возьмем $\varepsilon > 0$ и выберем n настолько большим, чтобы, кроме условий а) — в), выполнялось $\Delta < \varepsilon$ при $\lambda = \lambda_n$. Тогда получаем цепочку неравенства

$$|A\varphi_n| \leqslant |A_0(x, \xi_n)\, u_n(x) - \exp[i2\pi\lambda_n(\xi_n, h)]\, A_1(x, \xi_n)\, Tu_n(x)| +$$
$$+ \varepsilon \leqslant |[A_0(x, \xi_0) - A_0(x, \xi_n)]\, u_n(x)| + |[A_1(x, \xi_0) - A_1(x, \xi_n)]\, Tu_n(x)| +$$
$$+ |\{1 - \exp[i2\pi\lambda_n(\xi_n, h)]\}\, A_1(x, \xi_0)\, Tu_n(x)| + |A_0(x, \xi_0)\, u_n(x) -$$
$$- A_1(x, \xi_0)\, Tu_n(x)| + \varepsilon.$$

Для достаточно больших n получаем

$$|A\varphi_n| \leqslant \varepsilon |u_n(x)| + \varepsilon |u_n(x)| + \varepsilon |u_n(x)| + |Cu_n(x)| + \varepsilon,$$

откуда следует, что $\|A\varphi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, мы построили некомпактную ограниченную последовательность φ_n, для которой $A\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$. Это противоречит условию, что A — фредгольмов оператор [14]. Теорема доказана.

В матричном случае, когда операторы A и P действуют в пространствах вектор-функций, с помощью аналогичных рассуждений получаем лишь оценку спектрального радиуса оператора P и достаточные условия фредгольмовости оператора A. Через $|p(x, \xi)|$ обозначим норму матрицы $p(x, \xi)$ в q-мерном комплексном пространстве C^q. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $P = p(x, \xi)\, T$ — *оператор, действующий в пространстве вектор-функций* $[L_2(T^m \times S^{m-1})]^q$. *Для спектрального радиуса оператора* P *справедлива оценка*

$$\operatorname{spr} P \leqslant \sup_{\beta, \xi} M_\beta[|p(x, \xi)|].$$

Теорема 5. *Пусть* $A = A_0(x, D) - A_1(x, D)\, T$ — *псевдодифференциальный оператор с отклоняющимся аргументом, действующий из пространства вектор-функций* $[H_l(T^m)]^q$ *в* $[H_{l-r}(T^m)]^q$. *Если выполнено одно из условий*

а) $A_0(x, D)$ — эллиптический, $\sup_{\beta, \xi} M_\beta[|A_0(x, \xi)^{-1} A_1(x, \xi)|] < 1$;

б) $A_1(x, D)$ — эллиптический, $\sup\limits_{\beta,\xi} M_\beta[|A_0(x, \xi) A_1(x, \xi)^{-1}|] < 1$, то оператор A фредгольмов.

Доказательство теорем 4 и 5 заключается в повторении рассуждений из предыдущих теорем, справедливых в векторном случае.

Замечание. Если все числа h_j рациональны, отображение имеет конечный порядок q, равный наименьшему общему знаменателю чисел h_j. Поэтому к оператору A применимы результаты работы [3], и условие фредгольмовости оператора A имеет вид

$$\prod_{k=0}^{q-1} A_0(x+kh, \xi) \neq \prod_{k=0}^{q-1} A_1(x+kh, \xi) \tag{7}$$

для всех x и $\xi \neq 0$. Условия I) — III) теоремы 3 получаются из условий (7) предельным переходом при приближении чисел h_j рациональными.

Литература

1. Зверович Э. И., Литвинчук Г. С. УМН, **23**, вып. 3, 1968.
2. Литвинчук Г. С. Изв. АН СССР, сер. матем. **31**, № 3, 1967, **32**, № 6, 1968.
3. Антоневич А. Б. ДАН СССР, **190**, № 4, 1970.
4. Носов В. Р. Дифференц. уравнения, **7**, № 4, 1971.
5. Кравченко В. Г. Укр. матем. журнал, **24**, № 6, 1972.
6. Мухамадиев Э., Садовский Б. Н. Матем. заметки, **13**, вып. 1, 1973.
7. Антоневич А. Б., Рывкин В. Б. Дифференц. уравнения, **10**, № 8, 1974.
8. Антоневич А. Б., Рывкин В. Б. ДАН БССР, **19**, № 1, 1975.
9. Халмош П. Р. Лекции по эргодической теории. М., 1950.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
11. Наймарк М. А. Нормированные кольца. М., 1968.
12. Сили Р. Т. Математика, **11**, № 2, 1967.
13. Хёрмандер Л. Псевдодифференциальные операторы. М., 1967, стр. 63—87.
14. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М., 1963.

Поступила в редакцию
26 декабря 1973 г.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина