

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

А. Б. АНТОНЕВИЧ, А. В. ЛЕБЕДЕВ

О НЁТЕРОВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО  
ОПЕРАТОРА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ,  
СОДЕРЖАЩЕГО ЛИНЕЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АРГУМЕНТА

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение с частными производными вида

$$Lu \equiv Au + BU_{du} + Ku = f, \quad (1)$$

где  $Au = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ;  $Bu = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $n > 1$ ,  $U_{du} = \Delta^{-\frac{1}{2}} u(dx)$ ,  $d$  — заданная матрица,  $\Delta$  — определитель матрицы  $d$ ;  $K$  — вполне непрерывный оператор в рассматриваемых ниже пространствах.

Цель настоящей статьи — найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых оператор  $L$  нётеровский как оператор из пространства Соболева  $H_2(R^n)$  в  $H_0(R^n)$  [1]. Результат существенно зависит от вида матрицы  $d$ . Сформулируем результат для матрицы  $d$  общего положения.

Обозначим  $a(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ ,  $b(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \xi_j$ , где  $(x, \xi) \in R^n \times R^n$ .

Пусть  $a_{ij}(x) = a_{ij}(\infty) + \hat{a}_{ij}(x)$ , где  $\hat{a}_{ij}(x) \in S$ ,  $S$  — пространство функций, убывающих вместе со всеми их производными быстрее любой степени  $|x|^{-1}$ . (Используя результаты В. В. Грушина [2], можно ослабить условия на коэффициенты, и, более того, аналогичные результаты верны для случая, когда  $A$  и  $B$  — псевдодифференциальные операторы. Отметим также, что условия нётеровости для сингулярных интегральных операторов со сдвигом на контуре для некоторых видов сдвигов (случай  $n = 1$ ) изучены в [3]. Задача Коши для уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом в случае, когда отклонение имеет вид  $x \rightarrow dx + h$  (где  $d$  — матрица,  $h$  — вектор), рассматривалась в [4].)

Оператор  $A$  называется эллиптическим, если  $a(x, \xi) \neq 0$  для  $(x, \xi) \in R^n \times R^n$ ,  $|\xi| = 1$ , и  $a(\infty, \xi) \neq 0$  при  $|\xi| = 1$ , где  $a(\infty, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\infty) \xi_i \xi_j$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , — собственные значения матрицы  $d$ ,  $l_k$  — соответствующие им собственные векторы, и выполнено  $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n|$ ,  $|\lambda_i| \neq 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Для того чтобы оператор  $L$  был нётеровским оператором, из пространства  $H_2(R^n)$  в  $H_0(R^n)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

- 1)  $A$  — эллиптический оператор и  $|a(0, l_i)| > |\lambda_i|^2 |b(0, l_i)|$ ,  $|a(\infty, l_i)| > |\lambda_i|^2 |b(\infty, l_i)|$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;
- 2)  $B$  — эллиптический оператор и  $|b(0, l_i)| > |\lambda_i|^2 |a(0, l_i)|$ ,  $|b(\infty, l_j)| > |\lambda_i|^2 |a(\infty, l_i)|$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

В кокасательном расслоении  $TR^n = R^n \times R^n = \{(x, \xi)\}$  определим отображение  $d^*(x, \xi) = (dx, d'^{-1}\xi)$ . Так как это отображение линейно на слоях, оно индуцирует отображение  $\alpha$  единичных кокасательных векторов  $SR^n = R^n \times S^{n-1}$ . Пусть  $\bar{R}^n$  — компактификация  $R^n$  бесконечно удаленной точкой. Тогда  $\alpha$  продолжается до отображения  $\bar{R}^n \times S^{n-1}$  в себя. Траекторией точки  $(x, \xi) \in \bar{R}^n \times S^{n-1}$  будем называть множество  $\{\alpha^k(x, \xi)\}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Действие  $\alpha$  на  $\bar{R}^n \times S^{n-1}$  имеет при сделанных предположениях простую структуру.

1) Существует конечное число периодических точек:  $(0, l_k), (0, -l_k), (\infty, l_k), (\infty, -l_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,

$$\begin{cases} \alpha(0, \pm l_k) = (0, \pm l_k) \\ \alpha(\infty, \pm l_k) = (\infty, \pm l_k) \end{cases}, \text{ если } \lambda_k > 0,$$

$$\begin{cases} \alpha(0, \pm l_k) = (0, \mp l_k) \\ \alpha(\infty, \pm l_k) = (\infty, \mp l_k) \end{cases}, \text{ если } \lambda_k < 0.$$

Любая непериодическая точка при действии степени отображения  $\alpha$  либо притягивается к одной из неподвижных точек, либо колеблется, приближаясь к паре периодических точек.

2) Для любой окрестности  $v$  множества периодических точек существует число  $n_v$  такое, что для любой точки  $(x, \xi) \in \bar{R}^n \times S^{n-1}$  траектория  $\{\alpha^k(x, \xi)\}$  содержит не более  $n_v$  точек, лежащих вне  $v$ .

3) У отображения  $\alpha$  существует фундаментальная область, т. е. открытое множество  $U \subset \bar{R}^n \times S^{n-1}$  такое, что  $\alpha^k(U) \cap U = \emptyset$  при  $k \neq 0$  и

$\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k(U) = \bar{R}^n \times S^{n-1}$ , причем  $\mu(\bar{R}^n \times S^{n-1} \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k(U)) = 0$ , где  $\mu$  — мера, являющаяся произведением меры Лебега на  $R^n$  на меру Лебега на  $S^{n-1}$ . Например, в качестве фундаментальной области можно взять множество вида  $W \times S^{n-1}$ , где  $W$  — множество в  $\bar{R}^n$ , заданное условием  $W = \{x_1, \dots, x_n\}$  и  $1 < |x_n| < |\lambda_n|$ , если  $|\lambda_n| > 1$ ;  $1 > |x_n| > |\lambda_n|$ , если  $|\lambda_n| < 1$ .

Лемма 1. Пусть  $A$  — эллиптический оператор. Тогда определен оператор

$$Q = q(x, \xi) U_\alpha \quad (2)$$

в пространстве  $L^2(R^n \times S^{n-1})$ , где  $q(x, \xi) = \frac{b(x, \xi)}{a(dx, d'^{-1}\xi)}$ ,  $U_\alpha u(x, \xi) =$

$$= \alpha^{-\frac{1}{2}}(x, \xi) u(\alpha(x, \xi)) \quad (\alpha' \text{ — якобиан } \alpha).$$

Если спектральный радиус  $r(Q) < 1$ , то оператор  $L$  нётеровский.

Доказательство.  $B U_\alpha = U_\alpha B_1(x, D)$ , где  $B_1(x, D)$  — однородный сингулярный интегродифференциальный оператор с символом  $b(d^{-1}x, d'\xi)$  [5]. Так как  $A$  — эллиптический, то он удовлетворяет условиям теоремы 3.4 [2], и оператор  $p(x, D)$  [2] с символом  $p(x, \xi) = \varphi(x, \xi) a^{-1}(x, \xi)$  (где  $\varphi(x, \xi) \in C_0^\infty(R^n \times R^n)$ ,  $\varphi(x, \xi) = 0$  при  $x^2 + \xi^2 < 1$ ,  $\varphi(x, \xi) = 1$  при  $x^2 + \xi^2 > 2$ ) является регуляризатором для него. Тогда оператор  $L$  представляется в виде  $L = (I + Q_1)A + K_1$ , где  $Q_1 = U_\alpha B_1(x, D)p(x, D)$ ,  $Q_1: H_0(R^n) \rightarrow H_0(R^n)$ ,  $K_1: H_2(R^n) \rightarrow H_0(R^n)$  — вполне непрерывный оператор.

Рассмотрим фактор-алгебру алгебры  $L(H_0(R^n))$  линейных непрерывных операторов в  $H_0(R^n)$  по идеалу  $K$  вполне непрерывных операторов:  $L(H_0(R^n))/K = \mathcal{L}(H_0(R^n))$ .

Класс эквивалентности элемента  $b$  в фактор алгебре  $\mathcal{L}(H_0(R^n))$  обозначим  $\tilde{b}$ .

Из условия  $r(\tilde{Q}_1) < 1$  ( $r(\tilde{Q}_1)$  — спектральный радиус  $\tilde{Q}_1$  в алгебре  $\mathcal{L}(H_0(R^n))$ ) следует обратимость элемента  $I + \tilde{Q}_1$  в алгебре  $\mathcal{L}(H_0(R^n))$ , а

из обратимости  $I + \widetilde{Q}_1$  следует нётеровость  $I + Q_1$ . Таким образом, достаточно показать, что  $r(\widetilde{Q}_1) < 1$ .

Так как  $U_d$  — унитарный оператор, то  $\|\widetilde{Q}_1\| = \|B_1(x, D)p(x, D)\|$ , но из теоремы 3.3. [2], теоремы 6 [1] и из того факта, что  $I - \varphi(x, D)$  — вполне непрерывный оператор [2] ( $\varphi(x, D)$  — оператор с символом  $\varphi(x, \xi)$  [2]), следует, что

$$\|B_1(x, D)p(x, D)\| = \max_{(x, \xi) \in \overline{R}^n \times S^{n-1}} \frac{|b(d^{-1}x, d'\xi)|}{|a(x, \xi)|} = \max_{(x, \xi) \in \overline{R}^n \times S^{n-1}} |g(x, \xi)|,$$

$$\text{где } g(x, \xi) = \frac{b(d^{-1}x, d'\xi)}{a(x, \xi)}.$$

Известно, что  $r(\widetilde{b}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widetilde{b}^n\|^{1/n}$ . Применяя теорему о композиции псевдодифференциальных операторов [2], получаем  $\widetilde{Q}_1^n = U_d^n g_n(x, D)$ , где  $g_n(x, D)$  — оператор с символом  $g_n(x, \xi) = \prod_{k=0}^{n-1} g(d^{-k}x, d'\xi)$  и, значит,  $\|\widetilde{Q}_1^n\| = \max_{\overline{R}^n \times S^{n-1}} |g_n(x, \xi)|$ .

Рассмотрим

$$\|Q^n\| = \max_{\overline{R}^n \times S^{n-1}} \left| \prod_{k=0}^{n-1} q(d^k x, d^{-k'} \xi) \right| = \max_{\overline{R}^n \times S^{n-1}} |g_n(x, \xi)| = \|\widetilde{Q}_1^n\|.$$

Следовательно,

$$r(\widetilde{Q}_1) = r(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\overline{R}^n \times S^{n-1}} |q_n(x, \xi)|. \quad (3)$$

Так как по условию  $r(Q) < 1$ , то и  $r(\widetilde{Q}_1) < 1$ . Лемма доказана.

Обозначим для непрерывной функции  $q(x, \xi)$  на  $\overline{R}^n \times S^{n-1}$

$$\widetilde{q}(0, \pm l_k) = \begin{cases} |q(0, \pm l_k)|, & \text{если } \lambda_k > 0, \\ |q(0, +l_k) q(0, -l_k)|^{1/2}, & \text{если } \lambda_k < 0, \end{cases}$$

и аналогично  $\widetilde{q}(\infty, \pm l_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Теорема 2. Пусть  $q(x, \xi)$  — непрерывная функция на  $\overline{R}^n \times S^{n-1}$ ,  $n > 1$ , и пусть,

$$M = \max_{k=\overline{1, n}} \{\widetilde{q}(0, \pm l_k), \widetilde{q}(\infty, \pm l_k)\},$$

$$m = \min_{k=\overline{1, n}} \{\widetilde{q}(0, \pm l_k), \widetilde{q}(\infty, \pm l_k)\}.$$

Тогда спектром  $\sigma(Q)$  оператора  $Q$ , действующего в пространстве  $L^2(\overline{R}^n \times S^{n-1})$  по формуле (2) является 1)  $\sigma(Q)$  — кольцо  $m \leq |\lambda| \leq M$ , если  $q(x, \xi) \neq 0$ ,  $(x, \xi) \in \overline{R}^n \times S^{n-1}$ ; 2)  $\sigma(Q)$  — круг  $|\lambda| \leq M$ , если  $q(x_0, \xi_0) = 0$ .

Доказательство. Вычислим спектральный радиус оператора  $Q$  по формуле (3). Возьмем  $\varepsilon > 0$  и для каждой периодической точки  $(x_i, \xi_i)$  такую окрестность  $v(x_i, \xi_i)$ , что  $|q(x, \xi) - q(x_i, \xi_i)| < \varepsilon$  при  $(x, \xi) \in v(x_i, \xi_i)$ . Пусть  $v = \bigcup_i v(x_i, \xi_i)$ ,  $M_0 = \max_{(x, \xi) \in \overline{R}^n \times S^{n-1}} |q(x, \xi)|$ . Тогда, учитывая свойство 2 отображения  $\alpha$ , имеем

$$\|Q^n\|^{1/n} = \max_{(x, \xi) \in \overline{R}^n \times S^{n-1}} |q_n(x, \xi)| \leq (M + \varepsilon)^{\frac{n-n_v}{n}} M_0^{\frac{n_v}{n}} \rightarrow M + \varepsilon$$

и в силу произвольности  $\varepsilon$   $r(Q) \leq M$ .

Так как для одной из периодических точек  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n(x_i, \xi_i)| = M$ , то

$$r(Q) = M. \quad (4)$$

Если  $q(x, \xi) \neq 0$ , то, применяя формулу (4) к обратному оператору  $Q^{-1} = q^{-1}(\alpha^{-1}(x, \xi) U_{\alpha^{-1}})$ , получаем для спектральных значений оценку  $m \leq |\lambda| \leq M$ .

Покажем, что все  $\lambda$  из указанных в формулировке теоремы множеств являются спектральными.

Оператору  $Q$  поставим в соответствие семейство операторов  $Q(x, \xi)$   $((x, \xi) \in \bar{R}^n \times S^{n-1})$  двустороннего взвешенного сдвига в пространстве  $l^2$  двусторонних последовательностей по формуле  $[Q(x, \xi)y]_k = q(\alpha^k(x, \xi))y_{k-1}$ .

Тогда оператор  $Q$  разлагается в прямой интеграл операторов  $Q(x, \xi)$  [6] по фундаментальной области  $Q = \int_U Q(x, \xi) d\mu$ .

Оператор  $\lambda I - Q$  обратим тогда и только тогда, когда существует множество  $U' \subset U$ ,  $\mu(U \setminus U') = 0$  такое, что для всех  $(x, \xi) \in U'$  операторы  $\lambda I - Q(x, \xi)$  обратимы и обратные ограничены в совокупности.

I. Покажем, что для  $\lambda$ , удовлетворяющих условию  $m < |\lambda| < M$  и  $|\lambda| \neq q(\infty, \pm l_n)$ , последнее свойство не выполняется, откуда в силу замкнутости спектра вытекает, что множество  $m \leq |\lambda| \leq M$  принадлежит спектру.

*Лемма 2. Пусть  $(x^+, \xi^+)$   $((x^-, \xi^-))$  — предельная точка положительной (отрицательной) полутраектории точки  $(x, \xi)$ . Тогда  $\sigma(Q(x, \xi)) = \{\lambda : \min[\bar{q}(x^+, \xi^+), \bar{q}(x^-, \xi^-)] \leq |\lambda| \leq \max[\bar{q}(x^+, \xi^+), \bar{q}(x^-, \xi^-)]\}$ , если  $q(\alpha^k(x, \xi)) \neq 0$  для любого  $k$ , и  $\sigma(Q(x, \xi)) = \{\lambda : |\lambda| \leq \max[\bar{q}(x^+, \xi^+), \bar{q}(x^-, \xi^-)]\}$ , если  $q(\alpha^{k_0}(x, \xi)) = 0$  для некоторого  $k_0$ , причем внутренние точки спектра, отличные от нуля, являются собственными значениями для  $Q(x, \xi)$  либо для  $Q^*(x, \xi)$ .*

Лемма 2 вытекает из предложения 15 [7], так как существуют пределы  $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} |q(\alpha^k(x, \xi)) q(\alpha^{k+1}(x, \xi))|^{\frac{1}{2}} = \bar{q}(x^\pm, \xi^\pm)$ .

Пусть  $m < |\lambda| < M$ ,  $|\lambda| \neq \bar{q}(\infty, \pm l_n)$ . Существует точка  $(x', \xi') \in U$  такая, что  $\lambda$  является собственным значением для  $Q(x', \xi')$  либо для  $Q^*(x', \xi')$ , а именно: если  $M > |\lambda| > \bar{q}(\infty, \pm l_n)$  и  $M = \bar{q}(\infty, l_j)$ , то возьмем  $x' \subset U$ ,  $x' \neq \gamma_{l_n}$ , а  $\xi'$  в плоскости, образованной векторами  $l_n$  и  $l_j$ . Если же  $M = \bar{q}(0, l_j)$ , то  $x'$  возьмем на оси  $l_n$ . В силу леммы 2  $\lambda$  является собственным значением для оператора  $Q(x', \xi')$  или его сопряженного. Семейство операторов  $Q(x, \xi)$  и  $Q^*(x, \xi)$  непрерывно зависит от  $(x, \xi)$  в сильной топологии. Поэтому, если существует вектор  $y \in l^2$ ,  $\|y\| = 1$ , такой, что  $(\lambda I - Q(x', \xi'))y = 0$  и  $(x^n, \xi^n) \rightarrow (x', \xi')$ , то  $(\lambda I - Q(x^n, \xi^n))y \rightarrow 0$ . Следовательно, для любой последовательности  $(x^n, \xi^n) \rightarrow (x', \xi')$  обратные к  $\lambda I - Q(x^n, \xi^n)$  не существуют либо нормы  $\|(\lambda I - Q(x^n, \xi^n))^{-1}\|$  не ограничены в совокупности.

Но такую последовательность мы можем выбрать в множестве  $U'$  и, значит, такого  $U'$  не существует. Если существует  $y \in l^2$ ,  $\|y\| = 1$ , такой, что  $(\lambda I - Q^*(x', \xi'))y = 0$ , то рассуждаем аналогичным образом.

II. Пусть  $q(x_0, \xi_0) = 0$  и  $|\lambda| < m$ . Если  $\lambda - Q$  обратим, то  $\lambda - Q'$  должен быть обратим, когда  $\|Q - Q'\| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — достаточно мало. Но для любого  $\varepsilon > 0$  мы можем выбрать функцию  $q'(x, \xi)$  такую, что  $\|qU_\alpha - q'U_\alpha\| = \max_{x, |\xi|=1} |q - q'| < \varepsilon$  и  $q'(x, \xi)$  обращается в нуль в некоторой окрестности  $\omega$  точки  $(x_0, \xi_0)$ . По определению фундаментальной области  $U$  выполняется  $(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n(U)) \cap \omega \neq \emptyset$ . Возьмем некоторую точку  $(x'_0, \xi'_0)$  из этого пересечения. В качестве  $(x', \xi')$  берем точку из траектории точки  $(x'_0, \xi'_0)$ , попада-

ющею в  $U$ . Аналогично предыдущему случаю доказываем, что  $\lambda - q'(x', \xi') U_\alpha$  необратим. Получаем противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1.  $\sigma(Q) = \bigcup_{(x, \xi) \in \bar{R}^n \times S^{n-1}} \sigma(Q(x, \xi))$ .

Следствие 2. Пусть  $a(x, \xi)$  и  $b(x, \xi)$  — непрерывные функции на  $\bar{R}^n \times S^{n-1}$ . Для того чтобы функциональное уравнение  $Pu \equiv a(x, \xi)u(x, \xi) + b(x, \xi) [\alpha']^{-\frac{1}{2}} u(\alpha(x, \xi)) = f(x, \xi)$ , где  $\alpha'$  — якобиан отражения  $\alpha$ , было однозначно разрешимо для любой  $f(x, \xi) \in L^2(\bar{R}^n \times S^{n-1})$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих двух условий:

- 1)  $a(x, \xi) \neq 0$ ,  $\bar{b}(0, l_i) < \bar{a}(0, l_i)$ ,  $\bar{b}(\infty, l_i) < \bar{a}(\infty, l_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,
- 2)  $b(x, \xi) \neq 0$ ,  $\bar{a}(0, l_i) < \bar{b}(0, l_i)$ ,  $\bar{a}(\infty, l_i) < \bar{b}(\infty, l_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Доказательство. Если одна из функций, например  $a(x, \xi)$ , отлична от нуля, то оператор представим в виде  $Pu = a(x, \xi) \left( 1 + \frac{b(x, \xi)}{a(x, \xi)} U_\alpha \right) u$  и результат вытекает из теоремы 2.

Нам достаточно показать, что если  $a(x_0, \xi_0) = 0$ ,  $b(x_1, \xi_1) = 0$ , [то оператор  $B$  необратим.

Лемма 3. Обратимость оператора  $a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha$  равносильна обратимости оператора  $|a(x, \xi)| + |b(x, \xi)| U_\alpha$ .

Доказательство. Как известно, непрерывный оператор  $T$ , действующий в гильбертовом пространстве, необратим тогда и только тогда, когда либо существует последовательность векторов  $\{z_i\}$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ ,  $\|z_i\| = 1$ ,  $\|Tz_i\| \rightarrow 0$ , либо такая последовательность существует для сопряженного оператора  $T^*$ .

Для любого вектора  $z(x, \xi) \in L^2(\bar{R}^n \times S^{n-1})$  положим  $z_k(x, \xi) = \chi_{\alpha^k U}(x, \xi) \times z(x, \xi)$ , где  $\chi_{\alpha^k U}(x, \xi)$  — характеристическая функция множества  $\alpha^k(U)$ ,

$U$  — фундаментальная область. Очевидно  $z(x, \xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k(x, \xi)$ . Построим

векторы  $y_k(x, \xi)$  следующим образом:  $y_k(x, \xi) = \omega_k(x, \xi) z_k(x, \xi)$ , где  $\omega_0(x, \xi) = 1$ , а  $\omega_k(x, \xi)$  определяется рекуррентной формулой

$$\omega_k(x, \xi) = \frac{\omega_{k-1}(\alpha^{-1}(x, \xi))}{c(\alpha^{-1}(x, \xi))}, \quad c(x, \xi) = \begin{cases} \frac{|b(x, \xi)|}{b(x, \xi)}, & \text{если } b(x, \xi) \neq 0, \\ 1, & \text{если } b(x, \xi) = 0. \end{cases}$$

Положим  $y(x, \xi) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k(x, \xi)$ . Отметим, что  $\|z(x, \xi)\| = \|y(x, \xi)\|$ . Тогда

$$\| [a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha] z(x, \xi) \|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \| a(x, \xi) z_k(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha z_{k+1}(x, \xi) \|^2.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \| [a(x, \xi) + b(x, \xi) c(x, \xi) U_\alpha] y(x, \xi) \|^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \| a(x, \xi) y_k(x, \xi) + \\ &+ b(x, \xi) c(x, \xi) U_\alpha y_{k+1}(x, \xi) \|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \| \omega_k(x, \xi) [a(x, \xi) z_k(x, \xi) + \\ &+ b(x, \xi) U_\alpha z_{k+1}(x, \xi)] \|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \| a(x, \xi) z_k(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha z_{k+1}(x, \xi) \|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, если существует последовательность векторов  $\{z_i\}$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ , таких, что  $\|z_i\| = 1$  и  $\| [a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha] z_i \| \rightarrow 0$ , то существ-

ует последовательность векторов  $\{y_i\}$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ , таких, что  $\|y_i\| = 1$  и  $\| [a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha] y_i \| \rightarrow 0$  и наоборот.

Аналогично, если существует последовательность векторов  $\{z_i\}$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ , такая что  $\|z_i\| = 1$  и  $\| [a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha]^* z_i \| \rightarrow 0$ , то существует последовательность векторов  $\{y_i\}$ ,  $i = \overline{1, \infty}$ , такая, что  $\|y_i\| = 1$  и  $\| [a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha]^* y_i \| \rightarrow 0$  и наоборот.

Таким образом, обратимость оператора  $a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha$  равносильна обратимости оператора  $a(x, \xi) + |b(x, \xi)| U_\alpha$ .

Очевидно, что обратимость последнего равносильна обратимости оператора  $a(x, \xi) U_{\alpha^{-1}} + |b(x, \xi)|$ , а обратимость этого оператора в силу предыдущих рассуждений эквивалентна обратимости оператора  $|a(x, \xi)| U_{\alpha^{-1}} + |b(x, \xi)|$  или оператора  $|a(x, \xi)| + |b(x, \xi)| U_\alpha$ . Лемма доказана.

**З а м е ч а н и е.** Так как от функции  $c(x, \xi)$  требуется лишь выполнения условия  $|c(x, \xi)| = 1$  почти всюду (чтобы  $\|y_i\| = \|z_i\|$ ), то мы фактически доказали, что обратимость оператора  $a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha$  равносильна обратимости оператора  $c_1(x, \xi) a(x, \xi) + c_2(x, \xi) b(x, \xi) U_\alpha$ , где  $|c_1(x, \xi)| = |c_2(x, \xi)| = 1$  почти всюду.

Если  $a(x_0, \xi_0) = 0$  и  $b(x_1, \xi_1) = 0$ , покажем, что  $|a(x, \xi)| + |b(x, \xi)| U_\alpha$  необратим. Достаточно провести доказательство необратимости для операторов, у которых коэффициенты не обращаются в нуль в периодических точках, так как операторы такого вида существуют в любой окрестности оператора  $|a(x, \xi)| + |b(x, \xi)| U_\alpha$ .

Пусть в некоторой периодической точке  $(x_k, \xi_k)$  выполняется  $\tilde{b}(x_k, \xi_k) \geq \tilde{a}(x_k, \xi_k)$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим множество  $v_\varepsilon$ , определяемое условием  $v_\varepsilon = \{(x, \xi) : |a(x, \xi)| < \varepsilon\}$ . Ясно, что для достаточно малого  $\varepsilon$  периодические точки лежат вне  $v_\varepsilon$ . Рассмотрим оператор  $P_\varepsilon = a_\varepsilon(x, \xi) + |b(x, \xi)| U_\alpha$ , где

$$a_\varepsilon(x, \xi) = \begin{cases} |a(x, \xi)|, & (x, \xi) \notin v_\varepsilon, \\ \varepsilon, & (x, \xi) \in v_\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно  $\|P - P_\varepsilon\| = \max_{x, \xi} |a(x, \xi) - a_\varepsilon(x, \xi)| = \varepsilon$ . Но оператор  $I - \frac{|b(x, \xi)|}{a_\varepsilon(x, \xi)} U_\alpha$

необратим, так как  $\frac{\tilde{b}(x_k, \xi_k)}{\tilde{a}_\varepsilon(x_k, \xi_k)} \geq 1$  и  $b(x_1, \xi_1) = 0$ . Следовательно, необратим оператор  $a_\varepsilon(x, \xi) + |b(x, \xi)| U_\alpha$ . В силу произвольности  $\varepsilon$  заключаем, что  $|a(x, \xi)| + |b(x, \xi)| U_\alpha$  необратим. Аналогично рассуждаем в случае  $\tilde{b}(x_k, \xi_k) \leq \tilde{a}(x_k, \xi_k)$ . Следствие 2 доказано.

**С л е д с т в и е 3.** Оператор  $P = a(x, \xi) + b(x, \xi) U_\alpha$  обратим тогда и только тогда, когда обратим каждый из операторов  $p(x, \xi)$ , действующих в пространстве  $l^2$  двусторонних последовательностей по формуле  $[p(x, \xi) y]_k = a(\alpha^k(x, \xi)) y_k + b(\alpha^k(x, \xi)) y_{k-1}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если оператор  $P$  обратим, то выполнено одно из условий 1) или 2) следствия 2 и, используя лемму 2, получаем, что операторы  $p(x, \xi)$  обратимы. Если же все операторы  $p(x, \xi)$  обратимы, то по лемме 4 [8] для каждого из них  $\tilde{a}(x^\pm, \xi^\pm) \neq \tilde{b}(x^\pm, \xi^\pm)$ , причем знак неравенства в обеих точках  $(x^+, \xi^+)$  и  $(x^-, \xi^-)$  один и тот же, и тот из коэффициентов, среднее значение которого в периодических точках больше, отделен на траектории точки  $(x, \xi)$  от нуля.

Так как для любой периодической точки существует траектория, соединяющая ее с  $(\infty, \pm l_n)$ , то знак неравенства во всех периодических точках одинаков, и тот из коэффициентов, среднее значение которого в периодических точках больше, отличен от нуля всюду. Что и требовалось доказать.

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.** Если  $A$  — эллиптический оператор, то достаточность вытекает из леммы 1 и теоремы 2 (применяя теорему 2 для вычисления спектрального радиуса оператора  $Q$ , введенного в лемме 1,

учитываем, что  $a(x, \xi) = a(x, -\xi)$  и  $b(x, \xi) = b(x, -\xi)$ . Если  $B$  — эллиптический, то оператор  $A + BU_d$  нётеров тогда и только тогда, когда нётеров оператор  $A(U_d)^{-1} + B = AU_{d^{-1}} + B$ . Соответственно в этом случае применяем лемму 1 и теорему 2. Докажем необходимость условий. Предположим, что условия не выполнены, но  $L$  — нётеровский.

Оператор  $A + U_d B_1(x, D)$  нётеров тогда и только тогда, когда нётеров оператор  $Aq(x, D) + U_d B_1(x, D)q(x, D)$  (где  $q(x, D)$  — оператор с символом  $\varphi(x, \xi)/|\xi|^2$  [2] и  $\varphi(x, \xi) = 0$  при  $x^2 + \xi^2 < 1$ ,  $\varphi(x, \xi) = 1$  при  $x^2 + \xi^2 > 2$ ,  $\varphi(x, \xi) \in C_0^\infty(R^n \times R^n)$ ). В свою очередь последний нётеров тогда и только тогда, когда нётеров оператор  $\frac{A}{|D|^2} + U_d \frac{B_1(x, D)}{|D|^2}$ , так как  $\varphi(x, D)$  — нётеров.

Согласно следствию 2 теоремы 2, оператор  $P = \frac{a(x, \xi)}{|\xi|^2} + \frac{b(x, \xi)}{|d^{-1}\xi|^2} U_\alpha$  необратим, отсюда по следствию 3 один из операторов  $p(x_0, \xi_0)$  необратим. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует последовательность  $y \in l^2$ ,  $\|y\| = 1$  такая, что  $\|p(x_0, \xi_0)y\| < \varepsilon$ , либо такая последовательность  $y$  существует для сопряженного оператора. Во втором случае переходим к рассмотрению сопряженных операторов аналогичным образом. Последовательность  $y = \{y_k\}$ ,  $k = -\infty, +\infty$ , можно выбрать так, чтобы  $y_k = 0$  при  $|k| > N$ . Пусть  $\{x_k, \xi_k\} = \{d^k x, d^{-k}\xi\}$ ,  $k = -\infty, +\infty$ , — траектория точки  $(x, \xi)$ . Пусть  $\varphi_0(x)$  — функция с носителем в окрестности  $V$  точки  $x_0$  такая, что  $\int_{R^n} |\varphi_0(x)| dx = 1$ ;  $\varphi_k(x) = [U_d]^{-k} \varphi_0(x)$ . Мы можем выбрать  $\varphi_0(x)$  так, чтобы

носители  $\varphi_k(x)$  не пересекались, если  $x_0$  — периодическая точка, то выбираем  $\varphi_0(x)$  с достаточно малым носителем, лежащим в  $V$  и не содержащим точку  $x_0$ . Для точек  $x$ , лежащих в достаточно малой окрестности  $V$  точки  $x_0$ , получаем  $\|p(x, \xi_0)y\| < \varepsilon$ . Пусть  $u_k(x, \lambda) = \varphi_k(x) \exp[i\lambda(x, \xi_k^0)]$  и  $u(x, \lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k u_k(x, \lambda)$ . Отметим, что это конечная сумма. Очевидно,

$\|u(x, \lambda)\|_{H_0} = 1$ . Воспользуемся следующим свойством псевдодифференциальных операторов: для любого  $\varepsilon_1 > 0$  существует окрестность  $W$  точки  $x_0$  и  $\lambda_0 > 0$  такие, что для любой функции  $\varphi_0(x)$ , носитель которой содержится в  $W$ , и для  $\lambda > \lambda_0$ ,  $|k| \leq N + 1$

$$\left\| \frac{A}{|D|^2} u_k(x, \lambda) - \frac{a(x_k, \xi_k)}{|\xi_k|^2} u_k(x, \lambda) \right\|_{H_0} < \varepsilon_1,$$

$$\left\| \frac{B_1(x, D)}{|D|^2} u_k(x, \lambda) - \frac{b(d^{-1}x_k, d'\xi_k)}{|\xi_k|^2} u_k(x, \lambda) \right\|_{H_0} < \varepsilon_1.$$

По построению  $U_d u_k(x, \lambda) = u_{k-1}(x, \lambda)$ . Таким образом, для достаточно малой окрестности  $V$  и достаточно больших  $\lambda$  имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A}{|D|^2} u(x, \lambda) + U_d \frac{B_1(x, D)}{|D|^2} u(x, \lambda) \right\| &= \left\| \frac{A}{|D|^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k u_k(x, \lambda) + \right. \\ &+ U_d \frac{B_1(x, D)}{|D|^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k u_k(x, \lambda) \left. \right\| \leq \left\| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k \frac{a(x_k, \xi_k)}{|\xi_k|^2} u_k(x, \lambda) + \right. \\ &+ U_d \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k \frac{b(d^{-1}x_k, d'\xi_k)}{|\xi_k|^2} u_k(x, \lambda) \left. \right\| + 2\varepsilon_1 N = \left\| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ y_k \frac{a(x_k, \xi_k)}{|\xi_k|^2} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y_{k+1} \frac{b(x_k, \xi_k)}{|\xi_{k+1}|^2} \left\| u_k^r(x, \lambda) \right\| + 2\varepsilon_1 N = \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| y_k \frac{a(x_k, \xi_k)}{|\xi_k|^2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + y_{k+1} \frac{b(x_k, \xi_k)}{|\xi_{k+1}|^2} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} + 2\varepsilon_1 N = \|p(x_0, \xi_0) y\| + 2\varepsilon_1 N < \varepsilon + 2\varepsilon_1 N,
\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_1$  — произвольно мало.

Выбирая теперь  $\lambda_n \rightarrow \infty$  и последовательность  $\varphi_{0,n}(x)$ ,  $n = \overline{1, \infty}$ , такую, что носители  $\varphi_{0,n}(x)$  стягиваются к точке  $x_0$  и попарно не пересекаются, и строя соответствующие  $u_n(x, \lambda_n)$ , получаем некомпактную последовательность  $\{u_n(x, \lambda_n)\}$  такую, что

$$\left\| \left[ \frac{A}{|D|^2} + U_d \frac{B_1(x, D)}{|D|^2} \right] u_n(x, \lambda_n) \right\|_{H_0} \rightarrow 0,$$

таким образом, оператор  $\frac{A}{|D|^2} + U_d \frac{B_1(x, D)}{|D|^2}$  не нётеров [9]. Теорема 1 доказана.

Согласно лемме 1, для того чтобы проверить достаточные условия нётеровости оператора  $A + BU_d$  ( $A$  — эллиптический,  $d$  — некоторая матрица), нужно знать спектральный радиус некоторого оператора вида  $Qu(x) = q(x)[\alpha'(x)]^{\frac{1}{2}} u(\alpha(x))$ . Спектральный радиус таких операторов вычисляется с помощью следующей теоремы:

**Теорема 3.** Пусть  $X$  — компактное пространство.  $C(X)$  — алгебра непрерывных функций на  $X$ ,  $\mathcal{A}$  — подалгебра алгебры  $C(X)$ ,  $\pi: \mathcal{A} \rightarrow L(E)$  — ее изометрическое ( $\pi(a) = \max_{x \in X} |a(x)|$ ) представление в алгебру ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве  $E$ , и пусть  $T$  — изометрический обратимый оператор в  $E$  такой, что  $T^{-1}\pi(a)T = \pi(a(\alpha(x)))$ , где  $\alpha: X \rightarrow X$  — некоторый гомеоморфизм.

Тогда спектральный радиус оператора  $\pi(a)T$  вычисляется по формуле  $r(\pi(a)T) = \sup_{\mu \in \Lambda} \left( \exp \int_X \ln |a(x)| d\mu \right)$ , где  $\Lambda$  — множество эргодических мер для  $\alpha: X \rightarrow X$ ; полагаем  $\exp \int_X \ln |a(x)| d\mu = 0$ , если интеграл расходится.

Напомним, что мера  $\mu$  называется эргодической, если  $\mu(A) = 0$  или  $\mu(A) = 1$ , для любого измеримого множества такого, что  $\mu(A \Delta \alpha(A)) = 0$  (символом  $A \Delta B$  обозначаем симметрическую разность  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ).

**Доказательство.** Оператору  $\pi(a)T$  поставим в соответствие оператор  $aU: C(X) \rightarrow C(X)$ , действующий по формуле  $(aU)\varphi(x) = a(x)\varphi(\alpha(x))$ .

Тогда  $r(\pi(a)T) = r(aU) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_X \left[ \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha^i(x))| \right]^{\frac{1}{n}}$ . Пусть

$$\max_X \left[ \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha^i(x))| \right]^{\frac{1}{n}} = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha^i(x_n))| \right]^{\frac{1}{n}}.$$

Рассмотрим последовательность линейных ограниченных функционалов  $f_n$  на  $C(X)$   $f_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha^i(x_n))$ , так как  $\|f_n\| = 1$ , то по теореме Банаха—Алаоглу о слабой компактности шара в сопряженном пространстве из последовательности  $f_n$  можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, т. е.  $f_{n_h}(\varphi) \rightarrow f(\varphi)$  для  $\varphi \in C(X)$ . Так как  $f_n(\varphi(x)) = f_n(\varphi(\alpha(x))) \rightarrow 0$ , то функционал  $f$  инвариантен относительно  $\alpha$ , т. е.  $f(\varphi(x)) = f(\varphi(\alpha(x)))$ . При  $\varphi(x) \geq 0$  имеем  $f(\varphi) \geq 0$  и  $\|f\| = 1$ . Таким об-

разом,  $f$  определяет инвариантную вероятностную меру на  $X$ , т. е.  $f(\varphi) = \int_X \varphi(x) d\mu$ .

I. Если  $a(x) \neq 0$ , то  $r(\pi(a)T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp [f_n(\ln |a(x)|)] = \exp \int_X \ln |a(x)| d\mu$ .

Так как эргодические меры суть крайние точки множества вероятностных мер [10], то

$$\sum_{i=1}^R \beta_i \nu_i(\varphi) \rightarrow f(\varphi), \quad (5)$$

где  $\sum_{i=1}^R \beta_i = 1$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $\nu_i \in \Lambda$ .

Если  $\sup_{\nu \in \Lambda} \nu(\varphi) = k < f(\varphi)$ , то  $\sum_{i=1}^R \beta_i \nu_i(\varphi) \leq \sum_{i=1}^R \beta_i k < f(\varphi)$ , и мы пришли к противоречию с формулой (5). Таким образом,  $f(\varphi) \leq \sup_{\nu \in \Lambda} \nu(\varphi)$  и, значит,

$$r(\pi(a)T) \leq \sup_{\nu \in \Lambda} \exp \left( \int_X \ln |a(x)| d\nu \right).$$

С другой стороны, пусть  $\nu \in \Lambda$ , тогда для почти всех (по мере  $\nu$ )  $x \in X$  средние  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \varphi(\alpha^i(x)) \rightarrow \int_X \varphi(x) d\nu$ , следовательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in X} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha^i(x)) \geq \int_X \varphi(x) d\nu$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} r(\pi(a)T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_X \prod_{i=0}^{n-1} |a(\alpha^i(x))|^{\frac{1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max_X \exp \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |a(\alpha^i(x))| \right] \geq \sup_{\nu \in \Lambda} \exp \int_X \ln |a(x)| d\nu, \end{aligned}$$

и для  $a(x) \neq 0$  доказательство завершено.

II. Пусть  $a(x) = 0$ . Если  $|a_n(x)| \rightarrow |a(x)|$ , монотонно убывая, то  $r(a_n U) \rightarrow r(aU)$ , что вытекает из полунепрерывности сверху спектрального радиуса и его монотонности для операторов вида  $aU$  (из  $|a_1| \geq |a_2|$  следует, что  $r(a_1 U) \geq r(a_2 U)$ ). Такими же свойствами обладает и

$$F(\varphi) = \sup_{\nu \in \Lambda} \exp \int_X \ln |\varphi(x)| d\nu.$$

Для последовательности  $a_n(x) = |a(x)| + 1/n$  получаем  $r(aU) = \lim_{n \rightarrow \infty} r(a_n U) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n) = F(a)$ .

Замечание. Так как любую инвариантную относительно  $\alpha$  меру можно разложить в прямой интеграл эргодических мер [11], то  $\int_X \ln |a(x)| d\mu = \int_R \int_X \ln |a(x)| d\mu_r d\omega$ , где  $R$  — некоторое множество эргодических мер,  $\omega$  — мера на этом множестве такая, что  $\omega(R) = 1$ .

Если  $\int_X \ln |a(x)| d\mu_r < K$  для любой  $\mu_r \in R$ , то  $\int_X \ln |a(x)| d\mu < K$ . Если  $a(x) \neq 0$ , то  $r(\pi(a)T) = \exp \int_X \ln |a(x)| d\mu$ , следовательно, для некоторой меры  $\mu_r$   $\ln r(\pi(a)T) = \int_X \ln |a(x)| d\mu_r$ . Таким образом, в этом случае  $r(\pi(a)T) = \max_{\nu \in \Lambda} \exp \int_X \ln |a(x)| d\nu$ .

Числа  $\tilde{q}(0, \pm l_h)$ ,  $\tilde{q}(\infty, l_h)$  в теореме 2 являются средними по инвариантным мерам, сосредоточенным на периодических точках, причем других инвариантных мер для гомеоморфизма  $\alpha$  вида  $(x, \xi) \rightarrow (dx, d^{-1}\xi)$  нет. Используя теорему 4, можно получить результат, аналогичный теоремам 1 и 2 без ограничения, что собственные значения матрицы  $d$  различны по модулю. Тогда в формулировках теорем вместо чисел  $\tilde{q}(0, \pm l_h)$ ,  $\tilde{q}(\infty, \pm l_h)$  участвуют средние по инвариантным мерам, которые довольно просто могут быть выписаны явно для конкретных матриц.

### Литература

1. Кон Дж. Дж., Ниренберг Л. В сб.: Псевдодифференциальные операторы.— М.: Мир, 1967.
2. Грушин В. В. Функциональный анализ, 1970, т. 7, № 3.
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.— М.: Наука, 1977.
4. Борок В. М., Житомирский Я. И. В кн.: Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом.— Киев: Наукова думка, 1977.
5. Агранович М. С.— УМН, 1965, т. 20, № 5.
6. Dixmier J. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien.— Paris, 1957.
7. Shields A. L.— Top. Oper. Theory Providence, 1974, vol. 13.
8. Антоневич А. Б.— Изв. АН БССР, 1976, № 2.
9. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.
10. Фелпс Р. Лекции о теоремах Шоке.— М.: Мир, 1968.
11. Окстоби Д.— УМН, 1953, т. 8, № 3.

Белорусский государственный университет  
им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию  
6 февраля 1979 г.

УДК 517.95

Н. Я. БЕЗНОЩЕНКО

## О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей работе получены достаточные условия существования «в целом» некоторых задач определения, не зависящих от одной пространственной переменной коэффициентов при старших производных в параболическом уравнении по решению задачи Коши для этого уравнения, известному на множестве  $x_n = \text{const}$ . Эти задачи относятся к некорректным по Адамару задачам для уравнений параболического типа, ряд из которых рассмотрен в работах [1—3] и др. В работах автора [4, 5] для рассматриваемых ниже задач получены теоремы единственности, «условной» устойчивости и «локального» существования, кроме того, в [4] показано, что даже в одномерном случае для существования «глобального» решения необходимо налагать на заданные функции довольно сложные ограничения, поэтому нахождение достаточных условий существования решения для указанных задач в многомерном случае представляет большой интерес.

1°. Всюду в дальнейшем используются обозначения, принятые в [5]. Кроме того, предполагается, что выполнены следующие условия, которые будем называть условиями (C):  $f(X, t) \in H^{l+4, \frac{l+4}{2}}(\bar{R}_{T_0}^n)$ ,  $f_{x_n x_n} \in L_q(R_{T_0}^n)$ ,  $\varphi(X) \in H^{l+4}(\bar{R}^n)$ ,  $\varphi_{x_n x_n} \in W_q^{2-2q-1}(R^n)$ ,  $2q > n + 2$ ,  $h(x, t) \in H^{l+4, \frac{l+4}{2}}(\bar{R}_{T_0}^{n-1})$ ,  $h(x, 0) = \varphi(x, 0)$ ,  $0 \leq l < 1$ .

2°. Рассмотрим следующую задачу:

Задача 1. По заданным функциям  $f$ ,  $\varphi$ ,  $h$  требуется определить функции  $u(X, t) \in H^{l+4, \frac{l+4}{2}}(\bar{R}_T^n)$  и  $a(x, t) \in H^{l+2, \frac{l+2}{2}}(\bar{R}_T^{n-1})$ ,  $a(x, t) \geq \text{const} > 0$ ,