мерованные в порядке невозрастания их модулей, а через $\{\mu_i\}$ — собственные значения оператора A.

Теорема 3. *При выполнении условий* $\|A\| < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} |\mu_i^{-1}| < \infty$, *имеет место соотношение*

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right| < \infty.$$

Доказательство. Уравнение $(J—A)\,u=\lambda Bu$ перепишем в виде $u=\lambda\,(J—A)^{-1}Bu$ и обозначим оператор $(J-A)^{-1}B$ через K.

Пусть $\{f_i\}$ — полная ортонормированная система собственных и присоединенных функций оператора A. Тогда имеем

$$K = \sum_{pq} (\cdot,\, f_p)\,(Kf_p,\, f_p)\, f_q,$$

так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \sum_{p=1}^{\infty} (Kf_p,\, f_p),$$

то достаточно показать, что

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} (Kf_p,\, f_p)\right| < \infty.$$

Для этого вычислим $(Kf_p,\, f_p)$, так как

$$Kf_p = \sum \frac{(Bf_p,\, f_p)}{1-\mu_j} f_j,$$

то

$$(f_p,\, Kf_p) = \left(f_p,\, \left(\sum \frac{(Bf_p,\, f_j)}{1-\mu_j} f_j\right)\right) = \frac{(Bf_p,\, f_p)}{1-\mu_p}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty} (Kf_p,\, f_p)\right| = \left|\sum \frac{(Bf_p,\, f_p)}{1-\mu_p}\right| < \infty.$$

Следствие. *Для собственных значений* $\{\lambda_i\}$ *задачи* (*1*), (*2*), *пронумерованных в порядке не возрастания их модулей, справедливо соотношение* $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty$.

Литература

1. Алероев Т. С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными в младших членах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1983.

2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.

Грозненский нефтяной институт им. акад. М. Д. Миллионщикова, Чечено-Ингушский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 4 декабря 1987 г.

УДК 517.9

А. Б. АНТОНЕВИЧ, И. ХОДЖАЙ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$ рассматриваются интегро-разностные уравнения типа свертки вида

$$bu(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\, u(x+\omega_k) + \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}(x) \int_{\mathbf{R}^n} \Phi_j(x-y)\, u(y+w_k)\, dy = f(x), \quad (1)$$

где ω_k, w_k — заданные векторы из $\mathbf{R}^n$; a_k, a_{kj}, Φ_j — заданные функции, $\Phi_j \in L_1(\mathbf{R}^n)$. Основной задачей является получение условий нётеровости рассматриваемых уравнений. Сложность задачи определяется поведением коэффициентов a_k и a_{kj}. Случай постоянных коэффициентов легко исследуется с помощью преобразования Фурье. Для переменных коэффициентов явные условия нётеровости были известны в случае, когда разностные члены в уравнении отсутствуют, а коэффициенты a_{kj} стабилизируются на бесконечности, т. е. существуют пределы на бесконечности у этих функций. При более сложном поведении коэффициентов условия нётеровости интегральных уравнений типа свертки оказываются неэффективными [1, 2]. Задача еще более усложняется, если в уравнении присутствуют разностные члены.

В работе выделен класс коэффициентов, для которых удается получить явные условия нётеровости уравнения (1). Предполагаем, что коэффициенты имеют следующий вид:

$$a_k(x) = a_k^0 + a_k^1 \exp[i\langle h, x\rangle], \; a_{kj}(x) = a_{kj}^0(x) + a_{kj}^1(x)\exp[i\langle h, x\rangle], \tag{2}$$

где $a_k^0, a_k^1 \in \mathbf{C}$, $h \in \mathbf{R}^n$, $\langle h, x\rangle = h_1x_1 + h_2x_2 + \ldots + h_px_p$, функции a_{kj}^0 и a_{kj}^1 измеримы, ограничены и имеют на бесконечности пределы $a_{kj}^0(\infty)$ и $a_{kj}^1(\infty)$ соответственно. Характерной особенностью указанного класса коэффициентов является то, что они не имеют пределов на бесконечности, но осциллируют около некоторого среднего положения. Заметим, что при более сложном поведении коэффициентов исследование уравнений вида (1) даже в частных случаях сводится к задачам, для которых не существует эффективного решения в отличие от рассматриваемого случая, когда полученные условия имеют явный вид.

Введем вспомогательные объекты, с помощью которых ниже будут сформулированы условия нётеровости.

Векторы $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ называются рационально независимыми, если равенство $q_1\tau_1 + q_2\tau_2 + \ldots + q_s\tau_s = 0$, где $q_j \in Q$, возможно только при $q_j = 0$. Пусть p — максимальное число рационально независимых среди векторов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. Тогда существуют такие рационально независимые векторы $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$, что

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{p} C_{kj}\tau_j, \; k = 1, 2, \ldots, m,$$

где $C_{kj} \in \mathbf{Z}$. Пусть $\mathbf{T}^p = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_p) : z_j \in \mathbf{C}, |z_j| = 1\}$ — p-мерный тор. По оператору b построим две функции на торе:

$$d_\nu(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k^\nu z_1^{C_{k1}} z_2^{C_{k2}} \ldots z_p^{C_{kp}}, \; \nu = 0, 1.$$

С помощью векторов h и $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ зададим отображение α тора $\mathbf{T}^p$ в себя: $\alpha(z) = (\exp[i\langle h, \tau_1\rangle] z_1, \exp[i\langle h, \tau_2\rangle] z_2, \ldots, \exp[i\langle h, \tau_p\rangle] z_p)$.

Пусть $\beta_\eta = \overline{\{\alpha^k(\eta) : k = 0, \pm 1, \ldots\}}$ — замыкание траектории точки η из $\mathbf{T}^p$ при действии отображения α. Каждое из множеств β_η является подмногообразием размерности s тора $\mathbf{T}^p$ и гомеоморфно либо тору $\mathbf{T}^s$, либо конечному объединению торов. Размерность s подмногообразий β_η определяется равенством $s = s_1 - 1$, где s_1 — число рационально независимых среди чисел 2π, $\langle h, \tau_1\rangle, \ldots, \langle h, \tau_p\rangle$. Эта размерность в зависимости от конкретных векторов h, τ_j может принимать значения от 0 до p. На каждом из множеств β_η существует единственная нормированная мера μ_η, инвариантная относительно отображения α.

Средним геометрическим функции $a \in C(\mathbf{T}^p)$ по мере μ_η называется число

$$S_\eta(a) = \exp \int_{\beta_\eta} \ln |a(z)|\, d\mu_\eta(z).$$

Построим по оператору b еще две функции, определенные на $\mathbf{R}^n$:

$$b_\nu(\xi) = \sum_{k=1}^{m} a_k^\nu \exp[i\langle \omega_k, \xi\rangle] + \sum_{k=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{l} a_{kj}^\nu(\infty)\,\hat{\Phi}_j(\xi)\exp[i\langle w_k, \xi\rangle], \; \nu = 0, 1,$$

где $\hat{\Phi}_j$ — преобразование Фурье функции Φ_j.

Теорема 1. *Оператор b вида (1) с коэффициентами вида (2) нётеров в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

а) $d_0(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{T}^p$; $b_0(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbf{R}^n$; $S_\eta(d_0) > S_\eta(d_1)$, $\eta \in \mathbf{T}^p$

или

б) $d_1(z) \neq 0$, $z \in \mathbf{T}^p$; $b_1(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbf{R}^n$; $S_\eta(d_0) < S_\eta(d_1)$, $\eta \in \mathbf{T}^p$.

Если в уравнении (1) чисто разностные члены отсутствуют, то уравнение можно исследовать при более общем виде коэффициентов. Рассмотрим уравнение вида

$$bu(x) \equiv a(x)u(x) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}(x) \int_{\mathbf{R}^n} \Phi_j(x-y)\,u(y+w_k)\,dy = f(x), \qquad (3)$$

считая, что коэффициенты имеют вид

$$a(x) = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu \exp[i\langle h_\nu, x\rangle], \quad a_\nu \in \mathbf{C},$$
$$a_{kj}(x) = \sum_{\nu=1}^{p} a_{kj}^{\nu}(x) \exp[i\langle h_\nu, x\rangle], \qquad (4)$$

где $h_1, \ldots, h_p$ — заданные векторы из $\mathbf{R}^n$; функции a_{kj}^{ν} измеримы, ограничены и имеют на бесконечности пределы.

Система векторов $h_1, h_2, \ldots, h_p$ называется выпуклой, если все точки h_ν являются вершинами некоторого выпуклого многогранника в $\mathbf{R}^n$.

По оператору b построим p функций на $\mathbf{R}^n$:

$$d_\nu(\xi) = a_\nu + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} a_{kj}^{\nu}(\infty)\,\hat{\Phi}_j(\xi) \exp[i\langle w_k, \xi\rangle], \quad \nu = 1, 2, \ldots, p.$$

Теорема 2. *Пусть у оператора b вида (3) коэффициенты имеют вид (4), система векторов $h_1, h_2, \ldots, h_p$ выпукла и векторы $h_2-h_1, h_3-h_1, \ldots, h_p-h_1$ рационально независимы. Многомерный оператор типа свертки вида (3) нётеров в пространстве $L_2(\mathbf{R}^n)$ тогда и только тогда, когда существует номер ν_0, $0 \leqslant \nu_0 \leqslant p$, такой, что*

1) $|a_{\nu_0}| > \sum_{\nu \neq \nu_0} |a_\nu|$;

2) $d_{\nu_0}(\xi) \neq 0$.

Сформулированные теоремы доказываются с помощью сведения к рассмотрению вспомогательных функциональных уравнений, при исследовании которых применяется общая теория, построенная в [3—5].

Литература

1. Speck F. O. // Math. Ann. 1977. Vol. 228, N 2. P. 93—100.
2. Штейнберг Б. Я. // Функц. анализ и его прилож. 1981. Т. 15, вып. 3. С. 95—96.
3. Антоневич А. Б., Лебедев А. В. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 5. С. 915—941.
4. Антоневич А. Б. // Мат. сб. 1984. Т. 124, № 1. С. 3—23.
5. Антоневич А. Б. // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 1. С. 11—14.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина,
Социалистическая Федеративная Республика Югославия

Поступила в редакцию 28 марта 1988 г.

УДК 517.925

В. А. БОЙЧЕНКО, Г. А. ЛЕОНОВ

О ХАУСДОРФОВОЙ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

В настоящей заметке на основании теоремы Дуади—Оэстерле [1, 2] и оценок расположения в фазовом пространстве аттракторов системы Лоренца [3—5] получена весьма простая оценка их хаусдорфовой размерности. Эта оценка в ряде случаев улучшает известную оценку Смита [2].

Напомним используемый ниже результат Дуади—Оэстерле, позволяющий оценить сверху хаусдорфову размерность аттрактора K автономной n-мерной системы вида $\dot{\xi} = f(\xi)$, где $f(\xi)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция.

Пусть $\lambda_1(\xi) \geqslant \lambda_2(\xi) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(\xi)$ — собственные значения симметризованной матрицы Якоби $(\partial f^*/\partial\xi + \partial f/\partial\xi)/2$. Тогда, если существуют целое число $k \in [0, n-1]$ и число $s \in [0, 1]$ такие, что $\lambda_1(\xi) + \cdots + \lambda_k(\xi) + s\lambda_{k+1}(\xi) < 0 \ \forall \xi \in K$, то $\dim K < k + s$.