МАЙ 1994 г., ТОМ 30, № 5

УДК 517.926

А. Б. АНТОНЕВИЧ, А. В. ТУРЛО

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ МНЕМОФУНКЦИЙ

1. Дифференциальные уравнения, коэффициенты которых являются обобщенными функциями, представляют как теоретический, так и прикладной интерес. Функции, которые естественно считать решениями уравнений, в таких ситуациях оказываются разрывными или обобщенными функциями и в рамках классической теории обобщенных функций не могут быть подставлены в уравнения, так как не определено произведение обобщенных функций [1, с. 37]. Среди задач такого характера можно указать, например, ряд задач оптимального управления, где оптимальные управления имеют импульсный характер и описываются с помощью δ-функции [2]. Различные подходы к преодолению возникающих сложностей разрабатывались рядом авторов, обзор результатов содержится в [2—6]. Один из подходов заключается в построении вместо обобщенных функций пространств из новых объектов, называемых новыми обобщенными функциями, для которых определено ассоциативное умножение. Общий метод построения таких пространств предложен в [7]. По своему построению новые обобщенные функции сохраняют информацию о способе их получения из гладких, т. е. в определенном смысле обладают памятью, в связи с чем их было предложено [8] называть мнемофункциями (от греческого μνήμη — память).

Именно в таких пространствах естественно искать решения уравнений с обобщенными коэффициентами, в связи с чем необходимо развить в соответствующем направлении теорию дифференциальных уравнений.

Отмеченные в начале статьи сложности возникают уже в случае простейшего дифференциального уравнения — линейного скалярного уравнения первого порядка

$$X'(t) = A(t) X(t) + F(t), \tag{1}$$

если A является обобщенной функцией. Известная формула общего решения

$$X(t) = C \exp\Big(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\Big) + \exp\Big(\int_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau\Big)\int_{t_0}^{t} F(\tau)\exp\Big(-\int_{t_0}^{\tau} A(\xi)\,d\xi\Big)d\tau \tag{2}$$

не имеет смысла в классических пространствах обобщенных функций, так как входящие в нее операции умножения и вычисления экспоненты в этих пространствах не определены.

В настоящей работе рассмотрена задача Коши для уравнения (1) в одном из пространств мнемофункций и по ходу обнаружены некоторые новые эффекты. Достаточные условия существования решения задачи Коши были получены ранее в работах [4,9—12].

2. Введем новое пространство мнемофункций, полученное некоторой модификацией конструкции Коломбо на основе метода [7].

Обозначим через $G_m(\mathbf{R})$ векторное пространство комплекснозначных функций $u_{q,\varepsilon}(x)$, $q=1, 2, \dots, \varepsilon\in(0, 1)$, $x\in\mathbf{R}$, обладающих следующими свойствами:

1) при фиксированных q, ε бесконечно дифференцируемы по x;

2) для любого компакта $K\subset\mathbf{R}$ и любого $k\in\{0, 1, 2, ..\}$ $\exists C, m, \eta>0$ такие, что $\max_K|u^{(k)}_{q,\varepsilon}(x)|\leqslant C/\varepsilon^m$ для $0<\varepsilon<\eta$.

Пусть Γ — множество неубывающих последовательностей m таких, что $m(q)\to+\infty$ при $q\to+\infty$.

Выделим в $G_m(\mathbf{R})$ подпространство $\mathcal{N}(\mathbf{R})=\{u_{q,\varepsilon}(x)\,|\,\forall K\subset\mathbf{R},\ \forall k\in\{0, 1, 2, \dots\},\ \exists C_q>0\ \exists m(q)\in\Gamma,\ \exists\eta>0\colon\ \max_K|u^{(k)}_{q,\varepsilon}(x)|\leqslant C_q\varepsilon^{m(q)},\ 0<\varepsilon<\eta\}$.

Пространство мнемофункций определим как фактор-пространство $G(\mathbf{R})=G_m(\mathbf{R})/\mathcal{N}(\mathbf{R})$.

Теорема 1. *Пространство* $G_m(\mathbf{R})$ *с операцией поточечного умножения является алгеброй с дифференцированием,* $\mathcal{N}(\mathbf{R})$ *— идеалом в этой алгебре, и фактор-пространство* $G(\mathbf{R})$ *обладает естественной структурой алгебры с дифференцированием D.*

Зафиксируем последовательность $\phi=(\varphi_q)$ основных функций из пространства Шварца $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ [1, с. 17] таких, что

$$\int_{\mathbf{R}}\varphi_q(t)\,dt=1;\quad \int_{\mathbf{R}}\varphi_q(t)\,t^k dt=0,\quad k=1, 2, \dots, q. \tag{3}$$

Множество таких последовательностей обозначим $\mathcal{R}$. Обозначим $\varphi_{\varepsilon,q}(t)=(1/\varepsilon)\varphi_q(t/\varepsilon)$. Обобщенной функции $v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ поставим в соответствие семейство гладких функций

$$\tilde{R}_\phi v=v_\phi=v_{q,\varepsilon}=v*\varphi_{\varepsilon,q},\quad 0<\varepsilon<1,\ q=1, 2, \dots, \tag{4}$$

где $*$ — операция свертки [1, с. 66].

Теорема 2. *Для любых $\phi\in\mathcal{R}$ отображение $R_\phi v\to v_\phi$ порождает линейное вложение R_ϕ пространства $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ в $G(\mathbf{R})$, при котором*

$$R_\phi(v')=D(R_\phi v),\quad v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}) \tag{5}$$

и

$$R_\phi(u\cdot v)=R_\phi u\cdot R_\phi v,\ u,\ v\in C^\infty(\mathbf{R}), \tag{6}$$

т. е. $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ вкладывается в $G(\mathbf{R})$ вместе с дифференцированием, а $C^\infty(\mathbf{R})$ — вместе с умножением.

Доказательство этих теорем по существу повторяет доказательство аналогичных утверждений из [4].

Определение. Говорят, что мнемофункция $u=(u_{q,\varepsilon})$ и обобщенная функция $v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ассоциированы, если для любого $\psi\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$ и $\forall q$

$$\int_{\mathbf{R}}u_{q,\varepsilon}(x)\,\psi(x)\,dx\to\langle v, \psi\rangle,\ \varepsilon\to0.$$

Для $v\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ мнемофункция $R_\phi v$ ассоциирована с v. Заметим, что если взять другой набор функций $\tilde{\phi}$, $\tilde{\phi}\in\mathcal{R}$, то мнемофункция $R_{\tilde{\phi}}v$ также ассоциирована с v. Таким образом, с каждой обобщенной функцией ассоциировано целое семейство мнемофункций, среди которых есть как вида $R_\phi v$, так и других видов.

Определение. Мнемофункции u и v называются слабо эквивалентными (обозначаем $u\sim v$), если разность $u-v$ ассоциирована с 0.

Естественное с точки зрения пространства $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ отношение слабой эквивалентности не согласовано с умножением: если $u\sim u_1$, $v\sim v_1$, то, вообще говоря, $u\cdot v\not\sim u_1\cdot v_1$.

Среди мнемофункций существуют такие, которые не ассоциированы ни с какими обобщенными функциями из $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Однако любой мнемофункции можно поставить в соответствие линейный функционал на $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ со значениями в алгебре мнемочисел $\tilde{\mathbf{C}}$.

Алгебра $\tilde{\mathbf{C}}$ определяется аналогично $\mathrm{G}(\mathbf{R})$: полагаем

$$\mathrm{G}_m=\{a_{q,\varepsilon}\in\mathbf{C}:\exists C,\ m,\ \eta>0 \text{ такие, что } |a_{q,\varepsilon}|\leqslant C/\varepsilon^m,\ 0<\varepsilon<\eta\},$$

$$\mathscr{K}=\{a_{q,\varepsilon}\in\mathbf{C}:\ \exists C_q>0,\ \exists m(q)\in\Gamma,\ \exists\eta>0, \text{ что } |a_{q,\varepsilon}|\leqslant C_q/\varepsilon^{m(q)},\ 0<\varepsilon<\eta\}.$$

Тогда $\tilde{\mathbf{C}}\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{G}_m/\mathscr{K}$.

Алгебра $\tilde{\mathbf{C}}$ естественно вкладывается в $\mathrm{G}(\mathbf{R})$, если $a_{q,\varepsilon}$ рассматривать как постоянные функции. В частности, определено произведение λu, где $u\in C(\mathbf{R})$, $\lambda\in\tilde{\mathbf{C}}$.

Определение. $\tilde{C}$-функционалом на $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ будем называть отображение f из $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ в $\tilde{\mathbf{C}}$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $f(u+v)=f(u)+f(v)$, u, $v\in\mathrm{G}(\mathbf{R})$; 2) $f(\lambda u)=\lambda f(u)$, $u\in\mathrm{G}(\mathbf{R})$, $\lambda\in\tilde{\mathbf{C}}$.

Пространство $\tilde{C}$-функционалов на $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ будем обозначать $\widetilde{\mathscr{D}'(\mathbf{R})}$. Каждой мнемофункции u ставится в соответствие $\tilde{C}$-функционал из $\widetilde{\mathscr{D}'(\mathbf{R})}$ по формуле

$$\langle u,\psi\rangle=\int_{\mathbf{R}} u_{q,\varepsilon}(x)\psi(x)\,dx. \tag{7}$$

Пример 1. Отображение $\psi\to\varepsilon\psi(0)$ задает $\tilde{C}$-функционал, который естественно обозначить $\varepsilon\delta$, т. е. это δ-функция с бесконечно малым коэффициентом.

Пример 2. Отображение $\psi\to(1/\varepsilon)\psi(0)$ является $\tilde{C}$-функционалом, который будем обозначать δ/ε, это δ-функция с бесконечно большим коэффициентом.

Пример 3. Пусть ϕ — семейство функций вида (4) и δ_ϕ — мнемофункция, соответствующая δ при вложении R_ϕ, т. е. $\delta_\phi=\{(1/\varepsilon)\varphi_q(x/\varepsilon)\}$. Тогда $\delta_\phi^2=\{(1/\varepsilon^2)\varphi_q^2(x/\varepsilon)\}$.

Рассмотрим, какой $\tilde{C}$-функционал ассоциирован с δ_ϕ^2. Имеем $\langle\delta_\phi^2,\psi\rangle=\int_{\mathbf{R}}(1/\varepsilon^2)\varphi_q^2(x/\varepsilon)\psi(x)\,dx=(1/\varepsilon)\int_{\mathbf{R}}\varphi_q^2(t)\psi(\varepsilon t)\,dt$.

Используя формулу Тейлора для $\psi(\varepsilon t)$, получим представление $\langle\delta_\phi^2,\psi\rangle$ через обычные обобщенные функции, т. е. линейные функционалы на $\mathscr{D}(\mathbf{R})$ с коэффициентами из $\tilde{\mathbf{C}}$:

$$\langle\delta_\phi^2,\psi\rangle=(1/\varepsilon)a_{q,0}\psi(0)+a_{q,1}\psi'(0)+(1/2!)a_{q,2}\varepsilon\psi''(0)+\cdots$$
$$\cdots+(1/n!)a_{q,n}\varepsilon^{n-1}\psi^{(n)}(0)+\cdots,$$

где $a_{q,j}=(-1)^j\int_{\mathbf{R}}\varphi_q^2(t)t^j\,dt$, таким образом, $\delta_\phi^2=(1/\varepsilon)a_{q,0}\delta+a_{q,1}\delta'+(1/2!)a_{q,2}\varepsilon\delta''+\cdots$ Здесь равенство понимается в смысле асимптотического разложения.

В ряде задач представляют интерес только первые члены разложения, в частности, главная часть от δ_ϕ^2 есть $(1/\varepsilon)a_{q,0}\delta$, т. е. это δ-функция с бесконечно большим коэффициентом $1/\varepsilon$ и конечным множителем $a_{q,0}$, зависящим от функции φ_q.

Заметим, что $\tilde{C}$-функционал, соответствующий мнемофункции u, не определяет однозначно u. Например, семейство гладких функций $u_{q,\varepsilon}=\sin(x/\varepsilon)$ задает ненулевую мнемофункцию u. Но для любой функции $\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ при $\varepsilon\to0$ интегралы $\int_{\mathbf{R}}\sin(x/\varepsilon)\psi(x)\,dx$ стремятся к нулю быстрее любой степени ε, т. е. соответствующий $\tilde{C}$-функционал нулевой. При этом мнемофункция $(\sin(x/\varepsilon))^2$ ассоциирована с постоянной $1/2$. Из этого вытекает, в частности, что по ассоциированным $\tilde{C}$-функционалам и тем более по ассоциированным обычным функционалам нельзя определить функционал, ассоциированный с произведением.

Формула $G(\mathbf{R})\ni u\to\{u_{q,\varepsilon}(x_0)\}\in\tilde{\mathbf{C}}$ определяет значение мнемофункции u в точке x_0, являющееся мнемочислом. Заметим, однако, что мнемофункция u не определяется своими значениями во всех точках, а является более сложным объектом.

В пространстве $G(\mathbf{R})$ определена операция интегрирования и справедлива формула Ньютона — Лейбница

$$u(t)=u(t_0)+\int_{t_0}^{t}u'(t)\,dt. \tag{8}$$

Корректно определено сужение u на отрезки $[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}$. По этим сужениям u определяется однозначно. Через $G[\alpha,\beta]$ будем обозначать пространство мнемофункций на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Операция вычисления экспоненты от мнемофункции определяется через представителей, она не определена на всем пространстве $G(\mathbf{R})$. Введем подмножество

$$\mathrm{Exp}^+[t_0,t_1]=\{u\in G(\mathbf{R}):\exists C>0,\ \eta>0 \text{ такие, что для некоторого представителя } (u_{q,\varepsilon})\ \mathrm{Re}\,u_{q,\varepsilon}(x)\leqslant L+C\ln(1/\varepsilon),\ 0<\varepsilon<\eta,\ t_0\leqslant x\leqslant t_1\}. \tag{9}$$

Пусть T — некоторое связное подмножество в $\mathbf{R}$.

Предложение. *Для того чтобы для $u\in G(T)$ была корректно определена мнемофункция* exp u, *необходимо и достаточно, чтобы u принадлежало* $\mathrm{Exp}^+(T)$.

Через $\mathrm{Exp}^-(T)$ обозначим область определения отображения $\exp(-u)$. Очевидно, что $\mathrm{Exp}^-(T)=\{a:-a\in\mathrm{Exp}^+(T)\}$. Обозначим также $\mathrm{Exp}(T)=\mathrm{Exp}^+(T)\cap\mathrm{Exp}^-(T)$.

В частности, чтобы мнемофункция exp u была определена и обратима, необходимо и достаточно, чтобы $u\in\mathrm{Exp}(T)$.

Выделим также в $G(\mathbf{R})$ подмножество

$$\mathrm{Exp}^s[t_0,t_1]=\{u\in\mathrm{Exp}[t_0,t_1]:\ \exists m>0,\ C\in\mathbf{C} \text{ такие, что } \int_{t_0}^{t_1}|\exp(-u_{q,\varepsilon})|\,d\tau\leqslant C/\varepsilon^m\}. \tag{10}$$

Для элементов из $\mathrm{Exp}^s(t_0,t_1]$ определена $\exp u$, но обратный, вообще говоря, не существует, т. е. для таких мнемофункций определена операция $u\to\int_{t_0}^{t}\exp(-u(\tau))\,d\tau$.

Очевидно, что принадлежность мнемофункции u указанным множествам зависит только от вещественной части этой функции.

3. Перейдем к рассмотрению дифференциальных уравнений в пространствах мнемофункций. Если $a_k\in C^\infty(\mathbf{R})$, $f\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, то общее решение линейного дифференциального уравнения $\sum_{k=0}^{m}a_k(t)u^{(k)}(t)=f$ в $\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ имеет вид $u=u_0+\sum_{k=1}^{m}C_ku_k$, где $u_0\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ — частное решение, u_k, $k=1,\ldots,m$, — фундаментальная система решений однородного уравнения, C_k — произвольные постоянные.

Теорема 3. *Для любого $\phi\in[\psi]$ мнемофункция $R_\phi u$ является решением уравнения*

$$\sum_{k=0}^{m}a_kD^ku=R_\phi f \tag{11}$$

в пространстве мнемофункций, а общее решение уравнения (11) в пространстве мнемофункций имеет вид $u = R_\phi u_0 + \sum_{k=1}^{m} C_k u_k$, *где* C_k — *произвольные постоянные из* $\tilde{\mathbf{C}}$.

Эта теорема, вытекающая из теоремы 2, выражает принцип соответствия: при вложении R_ϕ пространства $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ в $\mathrm{G}(\mathbf{R})$ решения дифференциального уравнения с гладкими коэффициентами переходят в решения соответствующих уравнений.

В значительной мере для справедливости этой теоремы была подобрана достаточно сложная конструкция пространства $\mathrm{G}(\mathbf{R})$.

Рассмотрим теперь уравнение первого порядка, коэффициенты которого являются мнемофункциями.

Теорема 4. *Если* $\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau \in \mathrm{Exp}^+[t_0, t_1]$, *то задача Коши для однородного уравнения*

$$Du = au, \qquad (12_1)$$

$$u(t_0) = b \qquad (12_2)$$

имеет решение в $\mathrm{G}[t_0, t_1]$ *вида* $u = b\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)$ *для любого* $b \in \tilde{\mathbf{C}}$.

Если $\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau \in \mathrm{Exp}^s[t_0, t_1]$, *то задача Коши для неоднородного уравнения*

$$Du = au + f, \qquad (13_1)$$

$$u(t_0) = b \qquad (13_2)$$

имеет и притом единственное решение в $\mathrm{G}[t_0, t_1]$ *для любых* $f \in \mathrm{G}[t_0, t_1]$, $b \in \tilde{\mathbf{C}}$; *и это решение имеет вид*

$$u = b\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right) + \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau\right)\int_{t_0}^{t} f(\tau)\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)\,d\xi\right)d\tau.$$

Доказательство. По условию теоремы все операции, входящие в формулы решений уравнений, осуществимы в $\mathrm{G}[t_0, t_1]$, поэтому существование решений проверяется непосредственно. Докажем единственность. Достаточно доказать, что при $f=0$ и $b=0$ задача (13_1), (13_2) имеет только нулевое решение в $\mathrm{G}[t_0, t_1]$. Пусть u — решение такой задачи и $u_{q,\varepsilon}$ — представитель этой мнемофункции, $a_{q,\varepsilon}$ — представитель a. Тогда $u'_{q,\varepsilon}(t) = a_{q,\varepsilon}(t)u_{q,\varepsilon}(t) + v_{q,\varepsilon}(t)$, $u_{q,\varepsilon}(t_0) \in \mathcal{K}$, где $(v_{q,\varepsilon}) \in \mathcal{N}[t_0, t_1]$.

Имеем

$$u_{q,\varepsilon}(t) = u_{q,\varepsilon}(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{q,\varepsilon}(\tau)\,d\tau\right) + $$

$$+\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{q,\varepsilon}(\tau)\,d\tau\right)\int_{t_0}^{t} v_{q,\varepsilon}(\tau)\exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} a_{q,\varepsilon}(\xi)\,d\xi\right)d\tau.$$

По определению имеем оценки:

$$|u_{q,\varepsilon}(t_0)| \leqslant C_{1,q}\varepsilon^{m(q)},\ \text{где}\ m(q) \in \Gamma;\ \left|\exp\int_{t_0}^{t} a_{q,\varepsilon}(\tau)\,d\tau\right| \leqslant C_{2,q}/\varepsilon^{K_1},\ t \in [t_0, t_1];$$

$$\left|\exp\int_{t_0}^{\tau}(-a_{q,\varepsilon}(\xi))\,d\xi\right| \leqslant C_{3,q}/\varepsilon^{K_2},\ \tau \in [t_0, t_1];\quad |v_{q,\varepsilon}(\tau)| \leqslant C_{4,q}\varepsilon^{\nu(q)},$$

$$\nu(q) \in \Gamma,\quad \tau \in [t_0, t_1];\ |a_{q,\varepsilon}(t)| \leqslant C_{5,q}\varepsilon^{K_3},\ t \in [t_0, t_1].$$

Поэтому получаем

$$|u_{q,\varepsilon}(t)|\leqslant C_{1,q}C_{2,q}\varepsilon^{m(q)-K_1}+C_{2,q}(t_1-t_0)\,C_{4,q}\,C_{3,q}\,\varepsilon^{-K_1+\nu(q)-K_2},\ t\in[t_0,t_1].$$

Положив $\mu(q)=\min(m(q)-K_1,\ \nu(q)-K_1-K_2)$, видим, что $\mu(q)\in\Gamma$ и что для достаточно малых ε выполнена оценка вида $|u_{q,\varepsilon}(t)|\leqslant C_q\varepsilon^{\mu(q)}$. Из уравнения (13_1) следует оценка $|u'_{q,\varepsilon}(t)|\leqslant C_{5,q}C_q\varepsilon^{\mu(q)-K_3}+C_{4,q}\varepsilon^{\nu(q)}$. Аналогичные оценки получаем для производных высших порядков. Таким образом, $(u'_{q,\varepsilon})\in\mathcal{N}[t_0,t_1]$, т. е. $u=0$ в $\mathrm{G}[t_0,t_1]$.

4. **Примеры.** Рассмотрим на примерах некоторые эффекты, возникающие при рассмотрении уравнений вида (13_1) в пространствах мнемофункций.

1. Наиболее известное линейное уравнение с обобщенным коэффициентом имеет следующий вид:

$$Du=b\delta u+f, \tag{14}$$

где $b\in\mathbf{C}$, $f\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

Чтобы придать этому уравнению смысл в пространстве $\mathrm{G}(\mathbf{R})$, по обобщенным функциям δ и f нужно выбрать некоторые мнемофункции, ассоциированные с δ и f. Само уравнение (14) не дает никакой информации о том, как осуществить такой выбор. Основанием для такого шага должны служить соображения из предметной области, в которой возникло рассматриваемое уравнение. Во многих случаях достаточно разумно поставить в соответствие обобщенной функции f мнемофункцию $R_\varphi f$. Разумеется, возникает вопрос, в какой мере произвол в выборе ассоциированной мнемофункции сказывается на решении.

Возьмем простейшую мнемофункцию δ_φ, ассоциированную с δ, заданную представителем, не зависящим от q, т. е. $\delta_\varphi=(1/\varepsilon)\varphi(t/\varepsilon)$, где $\varphi\in\in\mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\int\limits_{\mathbf{R}}\varphi(t)\,dt=1$. Так как $\delta_\varphi\in\mathrm{Exp}^s(\mathbf{R})$, то по теореме 4 решение задачи Коши с начальным условием $u(-1)=1$ существует и единственно.

Пусть $f=0$. Тогда представитель этого решения задается формулой

$$u_\varepsilon(t)=\exp\Big(b\int\limits_{-1}^{t}(1/\varepsilon)\varphi(\tau/\varepsilon)\,d\tau\Big)=\exp\Big(b\int\limits_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon}\varphi(\xi)\,d\xi\Big).$$

При $\varepsilon\to0$ эта функция точечно сходится к функции

$$u_0(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t<0,\\ b\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(\xi)\,d\xi \text{ при } t=0,\\ \exp b \text{ при } t>0.\end{cases}$$

Кроме того, имеем $\int\limits_{\mathbf{R}}u_\varepsilon(t)\psi(t)\,dt\to\int\limits_{\mathbf{R}}u_0(t)\psi(t)\,dt=\langle u_0,\psi\rangle$, т. е. с мнемофункцией u ассоциирована регулярная обобщенная функция u_0, не зависящая от выбора φ, или, точнее, u_0 зависит от φ только на множестве меры нуль. Так как u_0 разрывна в точке 0, то произведение δu_0 в классических пространствах обобщенных функций не определено и u_0 нельзя даже подставить в уравнение. Формально если считать, что $\int\limits_{-1}^{t}\delta(\tau)\,d\tau=\Theta(t)$, где $\Theta(t)$ — функция Хевисайда, то решение u_0 получено по стандартной формуле (2) и имеет вид $u_0=1+(\exp b-1)\Theta(t)$. Подставив u_0 в уравнение (14), получаем $(\exp b-1)\delta=b\delta+b\delta(\exp b-1)\Theta(t)$, откуда

$$\delta\Theta=\frac{\exp b-1-b}{b(\exp b-1)}\,\delta. \tag{15}$$

Обратим внимание на то, что правая часть в (15) зависит от коэффициента b и тем самым для каждого значения b произведение $\delta\Theta$ определено по-разному. Это показывает, что невозможно определить однозначно произведение $\delta\Theta$ в рамках теории распределений — для разных уравнений эти произведения должны быть различными. В рамках теории мнемофункций противоречий не возникает, так как в представлении решения при разных значениях b участвуют различные мнемофункции, ассоциированные с Θ.

Если взять в качестве коэффициента другую мнемофункцию, ассоциированную с δ, то обобщенная функция, ассоциированная с решением, может оказаться другой. Для упрощения записи будем полагать здесь и далее $b=1$. Возьмем, например, мнемофункцию, заданную представителем $(1/\varepsilon)\varphi(t/\varepsilon)+(1/\varepsilon)\cos((t+1)/\varepsilon)$. Тогда для решения u представитель имеет вид

$$u_\varepsilon(t)=\exp\Big(\int_{-1}^{t}(1/\varepsilon)\varphi(\tau/\varepsilon)\,d\tau\Big)\exp\sin((t+1)/\varepsilon).$$

Некоторые вычисления, опускаемые нами, позволяют показать, что эта мнемофункция ассоциирована с другой регулярной обобщенной функцией

$$v(t)=\begin{cases}\lambda & \text{при } t\in[-1,0],\\ \lambda e & \text{при } t\in(0,+\infty),\end{cases}\qquad \text{где } \lambda=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\sin t\,dt.$$

Пусть теперь $f=\delta$. Рассмотрим случай, когда ассоциированная мнемофункция имеет вид δ_{φ_2}. Тогда для представителя решения задачи Коши (13_1), (13_2) имеем

$$u_\varepsilon(t)=\exp\Big(\int_{-1}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}\Big)d\tau\Big)\Big(1+$$
$$+\int_{-1}^{t}\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2\Big(\frac{\tau}{\varepsilon}\Big)\exp\Big(-\int_{-1}^{\tau}\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1\Big(\frac{\xi}{\varepsilon}\Big)d\xi\Big)d\tau\Big). \tag{16}$$

В данном случае в формулу решения входит выражение вида $w(t)=\delta(t)\exp(-\Theta(t))$, где функция w имеет разрыв в точке 0, и здесь существенно участвует операция умножения, определенная в пространстве $G(\mathbf{R})$ и не определенная в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Покажем, что мнемофункция (16) ассоциирована с некоторой регулярной обобщенной функцией.

Действительно, обозначим

$$h(t)=\int_{-\infty}^{t}\varphi_1(\tau)\,d\tau,\quad h_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\varphi_2(\tau)\exp(-h(\tau))\,d\tau,$$

$$h_2(t)=\begin{cases}\mu & \text{при } t\leqslant 0;\\ \mu & \text{при } t>0,\end{cases}\qquad \text{где } \mu=h_1(+\infty).$$

Пусть $\operatorname{supp}\varphi_0\in[-1,1]$, $\operatorname{supp}\varphi_1\in[-1,1]$. Тогда $u_\varepsilon(t)=\exp h(t/\varepsilon)\times\times(1+h_1(t/\varepsilon))$. Так как $u_\varepsilon(t)=1$ при $t\leqslant-1/\varepsilon$ и $u_\varepsilon(t)=\mu$ при $t\geqslant 1/\varepsilon$, то разность $u_\varepsilon(t)-h_2(t)=\varphi_3(t/\varepsilon)$, где $\varphi_3\in\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Таким образом, $u_\varepsilon(t)=h_2(t)+\varphi_3(t/\varepsilon)$, а поскольку $\varphi_3(t/\varepsilon)$ ассоциирована с нулем, решение (16) ассоциировано с функцией $h_2(t)$. Подчеркнем, что число μ, входящее в h_2, достаточно сложным образом зависит от φ_1 и φ_2 и, в частности, решение уравнения (14) зависит от выбора мнемофункций, представляющих δ-функции.

2. Рассмотрим задачу Коши $Du=b\delta' u$, $u(-1)=1$.

Обобщенную функцию δ' заменим мнемофункцией $\delta'_\varphi=(1/\varepsilon^2)\varphi'(t/\varepsilon)$, где $\varphi\in D(\mathbf{R})$, $\int_{\mathbf{R}}\varphi(t)\,dt=1$. Тогда $\int_{-1}^{t}\delta'_\varphi(\tau)\,d\tau=(1/\varepsilon)\varphi(t/\varepsilon)=\delta_\varphi$, учитывая $b=b_1+ib_2$, $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, имеем $|\exp b\delta_\varphi|=\exp((1/\varepsilon)(b_1\varphi_1(t/\varepsilon)-$

$-b_2\varphi_2(t/\varepsilon)))$. Поэтому для выполнения оценки из (9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$b_1\varphi_1(t)-b_2\varphi_2(t)\leqslant 0. \tag{17}$$

В частности, если $b\in\mathbf{R}$ и $\varphi(t)\geqslant 0$, то условие (17) совпадает с $b\leqslant 0$. Таким образом, у задачи

$$Du=-\delta'_\varphi u, \tag{18_1}$$

$$u(-1)=1 \tag{18_2}$$

существует решение $u=\exp(-\delta_\varphi)$, ассоциированное с функцией, тождественно равной 1. Более наглядное представление о ней дает второй член в разложении соответствующего $\tilde{C}$-функционала

$$\langle u,\psi\rangle=\int_{\mathbf{R}}\psi(t)\,dt+C_1\varepsilon\psi(0)+\cdots,$$

где $C_1=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1-\exp(-\varphi(y)/\varepsilon))\,dy$.

Таким образом, найденное решение отличается от 1 на δ-функцию с бесконечно малым коэффициентом.

Однако условие (10) в этом случае не выполнено, т. е.

$$|\exp(-b\delta_\varphi)|=\exp((1/\varepsilon)(b_1\varphi_1(t/\varepsilon)-b_2\varphi_2(t/\varepsilon))),$$

и интеграл от этой функции растет быстрее любой степени ε.

Покажем, что решение этой задачи в $\mathrm{G}(\mathbf{R})$ не единственно, откуда, в частности, следует, что условие на поведение коэффициента в теореме 4 существенно.

Пусть, как и выше, $h(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi(\tau)\,d\tau$. Возьмем $w_\varepsilon(t)=C\exp\Big(-\dfrac{1}{\varepsilon}\times$ $\times\varphi\Big(\dfrac{t}{\varepsilon}\Big)\Big)h\Big(\dfrac{t}{2\varepsilon}\Big)$. Тогда

$$w'_\varepsilon(t)+\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi'\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)w_\varepsilon(t)=C\exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big)\varphi\Big(\frac{t}{2\varepsilon}\Big)=v_\varepsilon(t). \tag{19}$$

Функция $v_\varepsilon(t)$ и все ее производные убывают при $\varepsilon\to 0$ быстрее любой степени ε. Поэтому, переходя от представителей к мнемофункциям, получаем, что $w\in\mathrm{G}(\mathbf{R})$ является решением уравнения (18_1), и при этом однородная задача имеет ненулевые решения, а задача (18_1), (18_2) имеет много различных решений, в частности, решениями будут все мнемофункции вида $u+Cw$, где C — произвольный элемент из $\tilde{\mathbf{C}}$.

Еще один эффект, связанный с уравнениями (18_1), заключается в следующем. Если рассмотреть задачу Коши с начальным условием при $t_0=0$, то условие (9) не выполнено. Действительно,

$$-\int\limits_0^t(1/\varepsilon^2)\varphi'(\tau)\,d\tau=-(1/\varepsilon)\varphi(t)+(1/\varepsilon)\varphi(0)=(1/\varepsilon)(\varphi(0)-\varphi(t))$$

и оценка (9) не выполнена, если $\varphi(0)\neq 0$. Таким образом, задача Коши с условием в точке $t_0=-1$ разрешима при любом начальном условии, а при $t_0=0$ задача Коши неразрешима.

3. Рассмотрим уравнение

$$u'=u/t. \tag{20_1}$$

Обычными решениями этого уравнения являются функции вида

$$u(t)=\begin{cases} C_1 t, & t<0, \\ C_2 t, & t>0. \end{cases}$$

При $t=0$ все решения обращаются в нуль, имеем особую точку. Поэтому классическое решение задачи Коши с условием

$$u(-1)=C \tag{20_2}$$

определено при $t<0$ и имеет вид $u(t)=-Ct$, $t<0$. «Естественность» продолжения этого решения той же формулой при $t\geqslant 0$ проблематична. Еще яснее непродолжимость решений через особую точку при классической постановке видна в случае уравнения

$$u'=-u/t, \tag{21}$$

общее решение которого имеет вид

$$u(t)=\begin{cases} C_1/t, & t<0, \\ C_2/t, & t>0. \end{cases} \tag{22}$$

В рамках теории обобщенных функций функции вида (22) не могут быть подставлены в уравнение (21), и вопрос о том, являются ли они решениями в окрестности точки 0, не возникает. Рассмотрим уравнение (20_1) в пространстве $G(\mathbf{R})$. Чтобы придать этому уравнению смысл в пространстве $G(\mathbf{R})$, прежде всего поставим функции $1/t$ в соответствие обобщенную функцию, а затем для обобщенной функции выберем ассоциированную с ней мнемофункцию. Неоднозначность возникает уже на первом шаге: функции $1/t$ естественно соответствует целое семейство обобщенных функций вида $a_\lambda=\mathscr{P}\dfrac{1}{t}+\lambda\delta$, где $\mathscr{P}\dfrac{1}{t}=(\ln|t|)'$ — главное значение интеграла от функции $1/t$ [1, с. 33], λ — произвольная постоянная. Возьмем $\phi\in\mathscr{R}$ и уравнению (20_1) поставим в соответствие уравнение

$$Du=(R_\phi a_\lambda)u. \tag{23}$$

Для мнемофункции $R_\phi a_\lambda$ условия (9), (10) выполнены и в силу теоремы 4 решение задачи Коши (20_1), (20_2) существует и единственно. Представителем $R_\phi a_\lambda$ является семейство гладких функций $\varphi_{q,\varepsilon}*\mathscr{P}\dfrac{1}{t}+\lambda\varphi_{q,\varepsilon}$, а представителем решения — семейство

$$u_{q,\varepsilon}(t)=C\exp\left(\int_{-1}^{t}\left(\varphi_{q,\varepsilon}*\mathscr{P}\frac{1}{\tau}\right)(\tau)\,d\tau\right)\exp(\lambda h_{q,\varepsilon}(t/\varepsilon)),$$

где $h_q(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\varphi_q(\tau)\,d\tau$.

Вычисления, которые здесь не приводим, показывают, что мнемофункция u ассоциирована с обычной мнемофункцией $u(t)=\begin{cases} -Ct, & t<0, \\ C(\exp\lambda)t, & t>0. \end{cases}$ Таким образом, переход к рассмотрению уравнения (20_1) в пространстве мнемофункций позволил однозначно определить продолжение решения через особенность, причем это продолжение зависит от способа регуляризации $1/t$.

В случае уравнения (21) аналогично имеем

$$u_{q,\varepsilon}(t)=C\exp\left(-\int_{-1}^{t}\left(\varphi_{q,\varepsilon}*\mathscr{P}\frac{1}{\tau}\right)(\tau)\,d\tau\right)\exp(\lambda h_{q,\varepsilon}(t/\varepsilon)).$$

Эта мнемофункция ассоциирована с обобщенной функцией, являющейся регуляризацией функции вида

$$u(t)=\begin{cases} -C/t, & t<0,\\ C(\exp\mu)/t, & t>0.\end{cases}$$

В заключение сделаем следующие выводы.

1. В рамках теории мнемофункций решение уравнения с обобщенными коэффициентами корректно определено.

2. Для трактовки уравнения с обобщенными коэффициентами как уравнения в пространстве мнемофункций нужна дополнительная информация о происхождении коэффициента и правой части. Таким образом, каждому дифференциальному уравнению с обобщенными коэффициентами соответствует целое семейство уравнений в пространстве мнемофункций.

3. Для линейных дифференциальных уравнений в пространстве мнемофункций возможны новые свойства и явления, отсутствующие в случае обычных дифференциальных уравнений, в том числе: нарушение единственности решения задачи Коши; явление слипания решений (эквивалентно неединственности решения обратной задачи Коши); однозначное продолжение решений через особые точки (конечные и через бесконечность).

Естественно предположить, что при дальнейшем исследовании будут обнаружены новые особенности теории дифференциальных уравнений в пространствах мнемофункций.

Литература

1. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М., 1979.
2. Завалищин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: Модели и приложения. М., 1991.
3. Егоров Ю. В.// Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 5. С. 3—40.
4. Colombeau J. -F. Elementary introduction to new generalized functions. Amsterdam, 1985.
5. Христо Я. Христов, Благовест Дамянов. Умножение на обобщени функции. София, 1989.
6. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М., 1985.
7. Антоневич А. Б., Радыно Я. В.// Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, вып. 2. С. 267—270.
8. Antonevitch A. V., Radyno Ya. V. On the mnemofunctions speces: Тези міжнародної математичної конференції, присвяченої 100-річчю народження С. Банаха (6—8 травня 1992 року). Львів, 1992. С. 3.
9. Радыно Я. В., Нгуен Хой Нгиа // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 6. С. 489—492.
10. Нго Фу Тхань. Дифференциальные уравнения в алгебре новых обобщенных функций: Тез. докл. конф., посвященной памяти академика М. Ф. Кравчука. Киев; Луцк, 1992.
11. Нго Фу Тхань, Сабра Рамадан. Слабые решения дифференциальных уравнений в алгебре новых обобщенных функций: Тез. докл. конф. математиков Беларуси (29 сент.—2 окт. 1992 г., Гродно). Гродно, 1992. С. 112.
12. Радыно Я. В., Нго Фу Тхань.// Докл. АН Беларуси. 1993. Т: 37, № 4. С. 5—9.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 9 июля 1993 г.