Функциональный анализ и его приложения
2005, т. 39, вып. 1, с. 11–26

УДК 517.9

Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения и существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке

 А. Б. Антоневич

§1. Введение

Пусть X есть отрезок $[0,1]$ и $\alpha\colon X \to X$ — диффеоморфизм, имеющий только две неподвижные точки, 0 и 1. В пространстве вектор-функций $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, со значениями в $\mathbb{C}^m$ рассмотрим оператор взвешенного сдвига вида

$$Bu(x) = a_0(x)u(\alpha^{-1}(x)), \qquad x \in X, \tag{1}$$

где $a_0(x)$ — невырожденная непрерывная матричнозначная функция на X.

Операторы вида (1) составляют один из конкретных классов общих операторов взвешенного сдвига. Линейный ограниченный оператор B, действующий в банаховом пространстве $F(X)$ функций или вектор-функций на произвольном множестве X (в более общей ситуации — в пространстве сечений векторного расслоения над X), называют *оператором взвешенного сдвига* (ОВС), если он может быть представлен в виде

$$Bu(x) = a_0(x)u(\phi(x)), \qquad x \in X, \tag{2}$$

где $\phi\colon X \to X$ — некоторое отображение, а $a_0(x)$ — скалярная или матричнозначная функция на X. В (1) мы предполагаем, что отображение $\phi = \alpha^{-1}$ обратимо, случай необратимого ϕ имеет свои особенности, которые мы здесь не обсуждаем.

Общие ОВС, порожденные ими операторные алгебры и связанные с ними функциональные уравнения вида

$$u(x) - a_0(x)u(\phi(x)) = v(x), \tag{3}$$

в частности так называемое гомологическое уравнение

$$u(x) - u(\phi(x)) = v(x), \tag{4}$$

изучались многими авторами в различных функциональных пространствах как самостоятельный объект и в связи с различными приложениями (теорией динамических систем, интегро-функциональными, дифференциально-функциональными, функциональными и разностными уравнениями, автоморфизмами и эндоморфизмами банаховых алгебр, нелокальными краевыми задачами, неклассическими краевыми задачами для уравнения колебаний струны, общей теорией операторных алгебр и др.) [1–15].

Свойства ОВС зависят в первую очередь от динамики отображения ϕ, т.е. поведения траекторий точек при действии итераций этого отображения. В рассматриваемом конкретном случае диффеоморфизмов отрезка картина поведения траекторий отображения наиболее проста. Поэтому ОВС, порожденные такими диффеоморфизмами α, обычно служат модельными примерами: многие результаты были получены сначала для ОВС вида (1), а затем были перенесены на более общие ситуации. Отметим также, что именно такие отображения возникают в ряде приложений и, например, в теории сингулярных интегро-функциональных уравнений это один из основных объектов исследования [15].

Задача описания спектра общих ОВС в случае обратимого отображения ϕ в классических пространствах принципиально решена в достаточной общности; для этого используются обычно два подхода — гиперболический, использующий связи операторов вида (2) со свойством гиперболичности ассоциированного линейного расширения динамической системы, и траекторный, базирующийся на связи с семейством операторов, порожденных сужениями на траектории динамической системы (см. § 2).

Наряду с получением условий обратимости представляют интерес тонкие свойства оператора $I - B$ в случае, когда он необратим, такие, например, как замкнутость образа этого оператора (вопрос о замкнутости возникает в ряде приложений) или нормальная, фредгольмова или полуфредгольмова разрешимость в соответствующем пространстве функционального уравнения (3) и гомологического уравнения (4). Ранее такие свойства операторов вида $I - B$ изучались только в пространствах скалярных функций и для специальных классов отображений [11, 12, 14].

Напомним, что оператор A называется F^+-*оператором* (F^--*оператором*), если его образ $\operatorname{Im} A$ замкнут, а его ядро $\operatorname{Ker} A$ (ядро сопряженного оператора) конечномерно. F^+-операторы и F^--операторы называют *полуфредгольмовыми.*

В спектральной терминологии вопросы об указанных свойствах оператора $I - B$ суть вопросы о принадлежности числа $\lambda = 1$ одному из существенных спектров оператора B в смысле приведенных ниже определений. Для линейного ограниченного оператора A в банаховом пространстве рассматриваются следующие подмножества его спектра $\sigma(A)$, называемые *существенными спектрами*:

$$\begin{aligned}
\sigma_G(A) &= \{\lambda : \overline{\operatorname{Im}(\lambda I - A)} \neq \operatorname{Im}(\lambda I - A)\} \text{ — спектр Гольдберга,}\\
\sigma_K(A) &= \{\lambda : \lambda I - A \text{ не полуфредгольмов}\} \text{ — спектр Като,}\\
\sigma_{F^+}(A) &= \{\lambda : \lambda I - A \text{ не } F^+\text{-оператор}\} \text{ — } F^+\text{-спектр,}\\
\sigma_F(A) &= \{\lambda : \lambda I - A \text{ не фредгольмов}\} \text{ — фредгольмов спектр.}
\end{aligned}$$

Заметим, что в литературе встречаются другие названия для указанных спектров и выделяются другие виды существенных спектров.

В данной работе впервые получено полное описание указанных существенных спектров для ОВС вида (1) в пространствах $L_p[0,1]$ вектор-функций. Основным результатом, качественно новым по сравнению с известными ранее, является выявление свойств ассоциированного линейного расширения, отвечающих за тонкие спектральные свойства оператора B, и в первую очередь свойства *когерентной локальной гиперболичности* линейного расширения.

Подход, использованный в настоящей работе, представляет собой синтез гиперболического и траекторного подходов. В случае пространства непрерывных функций близкий результат для модельных операторов был анонсирован в [10].

§2. Гиперболический и траекторный подходы к исследованию спектра в случае ОВС вида (1)

В пространстве $L_p[0,1]$ оператор $Tu(x)=\alpha'(\alpha^{-1}(x))^{-1/p}u(\alpha^{-1}(x))$ является изометрическим обратимым оператором. Поэтому оператор (1) в пространстве $L_p[0,1]$ более удобно записывать в виде $B=aT$, где $a(x)=\alpha'(\alpha^{-1}(x))^{1/p}a_0(x)$ есть так называемый *приведенный коэффициент*.

2.1. Гиперболический подход. Ассоциированное линейное расширение отображения α строится следующим образом.

Рассмотрим произведение $E=X\times\mathbb{C}^m$ как векторное расслоение над X с естественной проекцией; его слоем над точкой $x\in X$ является множество

$$E_x=\{(x,\xi):\xi\in\mathbb{C}^m\}=\{x\}\times\mathbb{C}^m.$$

По оператору B зададим отображение $\beta\colon E\to E$ формулой

$$\beta(x,\xi)=(\alpha(x),a(x)\xi),\qquad x\in X,\ \xi\in\mathbb{C}^m.$$

Отображение β непрерывно и отображает слой E_x на слой $E_{\alpha(x)}$ линейно. Это означает, что β является *линейным расширением отображения* α (см., например, [5]).

По функции $a(x)$ строится так называемый *коцикл* $a(x,n)$, порожденный коэффициентом a: $a(x;n)=a(x)a(\alpha(x))\cdots a(\alpha_{n-1}(x))$ при $n>0$, $a(x;n)=[a(\alpha_{n-1}(x))]^{-1}[a(\alpha_{n-2}(x))]^{-1}\cdots[a(x)]^{-1}$ при $n<0$, $a(x,0)=I$.

Тогда для степеней, т. е. итераций, отображения β имеем

$$\beta^n(x,\xi)=(\alpha^n(x),a(x;n)\xi),\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Будем считать, что норма вектора $\xi\in\mathbb{C}^m$ задана стандартным скалярным произведением $\langle\xi,\eta\rangle$, и обозначать ее через $\|\xi\|$ или $|\xi|$. Положим $\|(x,\xi)\|=|\xi|$.

Напомним, что подмножество K расслоения E называется *векториальным* [5], если для любого x множество $K_x:=K\cap E_x$ является векторным подпространством в E_x; векториальное подмножество, у которого подпространства K_x непрерывно зависят от x, называется *подрасслоением.*

Подрасслоение E^s расслоения E называется *устойчивым в положительном направлении* (*неустойчивым в положительном направлении*) для линейного расширения β, если оно инвариантно относительно действия β и существуют постоянная γ_s, $0<\gamma_s<1$ (γ_u, $0<\gamma_u<1$), и постоянная $C>0$, при которых выполнено неравенство

$$\|\beta^n(x,\xi)\|\leqslant C\gamma_s^n\|\xi\|,\qquad x\in[0,1],\ (x,\xi)\in E^s,\ n=1,2,\dots$$
$$(\|\beta^n(x,\xi)\|\geqslant C\gamma_u^{-n}\|\xi\|,\qquad x\in[0,1],\ (x,\xi)\in E^u,\ n=1,2,\dots).$$

Линейное расширение называется *гиперболическим*, если оно разлагается в прямую сумму Уитни устойчивого и неустойчивого подрасслоений [5].

Динамическим спектром $\sigma(\beta)$ линейного расширения β называется множество чисел λ, для которых линейное расширение β_λ из спектрального семейства линейных расширений

$$\beta_\lambda(x,\xi)=(\alpha(x),\lambda^{-1}a(x)\xi),\qquad \lambda\in\mathbb{C},\ \lambda\neq0,\tag{5}$$

не является гиперболическим.

Линейный оператор A называется *гиперболическим*, если его спектр не пересекается с единичной окружностью.

Предложение 1 (теорема о гиперболичности). *Оператор $I-B$ в пространстве $L_p[0,1]$, где B — оператор вида* (1), *обратим тогда и только тогда, когда ассоциированное линейное расширение β является гиперболическим; при выполнении этого условия оператор B является гиперболическим.*

Следствие. *Спектр оператора B совпадает с динамическим спектром линейного расширения β и состоит не более чем из m непересекающихся колец с центром в точке* 0.

2.2. Траекторный подход базируется на следующей конструкции. Пусть l_p есть пространство двусторонних последовательностей $u = (u(k))$, $k \in \mathbb{Z}$, $u(k) \in \mathbb{C}^m$, векторов из $\mathbb{C}^m$ с нормой $\|u\| = (\sum_k |u(k)|^p)^{1/p}$. Обозначим через $B(\tau)$, $\tau \in X$, дискретный оператор взвешенного сдвига, действующий в l_p по формуле

$$(B(\tau)u)(k) = a(\alpha^k(\tau))u(k-1). \tag{6}$$

Оператор $B(\tau)$ построен с помощью сужения коэффициента a на траекторию точки τ, что поясняет название «траекторный подход».

Предложение 2 (теорема о дискретизации). *Оператор $I-B$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы все операторы $I - B(\tau)$, $\tau \in X$.*

Так как $T(I - B(\tau))T^{-1} = I - B(\alpha(\tau))$, операторы $I - B(\tau)$ и $I - B((\alpha(\tau))$ обратимы одновременно и нормы их обратных совпадают. Поэтому, если зафиксировать точку $t \in (0,1)$ и отрезок $\Theta = [\alpha(t), t]$, достаточно потребовать обратимость операторов $I - B(\tau)$ только при $\tau \in \Theta$.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\sigma(B) = \bigcup_{\tau\in\Theta} \sigma(B(\tau))$$

Относительно истории вопроса и развития этих подходов см. монографии [3,9,13,15] и обзорные статьи [4,8].

§3. Когерентная локальная гиперболичность

Рассмотрим некоторые ослабления свойства гиперболичности линейного расширения. Для определенности будем считать, что $\alpha(x) < x$ для $0 < x < 1$, и тогда точка 0 является *притягивающей* — траектория любой точки $x \neq 1$ стремится к точке 0 (случай $\alpha(x) > x$ может быть рассмотрен аналогично).

Определение 1. Подрасслоение $E^{s,0}$ расслоения E, определенное на окрестности $[0,\delta]$ притягивающей точки 0, называется (локально) *устойчивым в положительном направлении* (*неустойчивым в положительном направлении*) в точке 0 для линейного расширения β, если оно инвариантно при действии β и существуют постоянные γ_s, $0 < \gamma_s < 1$ (γ_u, $0 < \gamma_u < 1$), и $C > 0$, при которых для всех x из окрестности $[0,\delta]$ выполнено неравенство

$$\|\beta_n(x,\xi)\| \leqslant C_s\gamma_s^n\|\xi\|, \qquad (x,\xi) \in E^{s,0},\ n = 1,2,\dots$$

$$(\|\beta_n(x,\xi)\| \geqslant C_u\gamma_u^{-n}\|\xi\|, \qquad x \in [0,\delta],\ (x,\xi) \in E^{u,0},\ n = 1,2,\dots).$$

Линейное расширение β будем называть *локально гиперболическим* в точке 0, если E разлагается в прямую сумму устойчивого и неустойчивого подрасслоений в некоторой окрестности точки 0.

Аналогично определяются устойчивое и неустойчивое подрасслоения в отрицательном направлении в окрестности отталкивающей точки 1 — как устойчивое и неустойчивое в положительном направлении для обратного отображения β^{-1} — и локальная гиперболичность в точке 1.

Любое подрасслоение, определенное и инвариантное в окрестности точки 0, может быть однозначно продолжено с окрестности до инвариантного подрасслоения на интервале $[0,1)$. Если исходное подрасслоение устойчиво (или неустойчиво) в положительном направлении, то продолженное подрасслоение также будет устойчивым (неустойчивым) на любом другом отрезке $[0,\delta]$ при $\delta<1$ и соответствующее неравенство выполнено с той же постоянной γ_s, но, вообще говоря, с другой постоянной $C=C(\delta)$.

В общем случае инвариантное подрасслоение (даже устойчивое) не может быть продолжено с окрестности точки 0 до непрерывного инвариантного подрасслоения на всем отрезке $[0,1]$. Заметим, что даже в случае, когда такое продолжение существует, оно может не быть глобально устойчивым, так как может оказаться, что числа $C(\delta)$ неограниченно возрастают при $\delta\to 1$.

Если линейное расширение гиперболическое, то подрасслоение, устойчивое (неустойчивое) в положительном направлении, является неустойчивым (устойчивым) в отрицательном направлении. При локальной гиперболичности такое положение не имеет места и все четыре подрасслоения могут быть различными. При этом локально устойчивые подрасслоения определены однозначно, но существует много различных локально неустойчивых подрасслоений.

Пусть линейное расширение β локально гиперболично в точках 0 и 1; пусть $E^{s,0}$ и $E^{s,1}$ суть соответствующие устойчивые подрасслоения, которые, согласно сделанному выше замечанию, мы можем считать определенными на $[0,1)$ и $(0,1]$ соответственно. Взаимное расположение этих подрасслоений будем описывать с помощью функции

$$d(\tau)=\dim V_\tau,\quad \text{где } V_\tau:=E^{s,0}_\tau\cap E^{s,1}_\tau,\ \tau\in(0,1).$$

Так как в силу инвариантности подрасслоений имеем $d(\tau)=d(\alpha(\tau))$, эту функцию достаточно рассматривать на промежутке $\Theta=[\alpha(t),t]$, где $t\in(0,1)$ есть некоторая произвольно зафиксированная точка. Отметим, что функция $d(\tau)$ может быть разрывной, но она полунепрерывна сверху. Если $d(\tau)$ непрерывна, то она постоянна и подпространства V_τ задают подрасслоение V расслоения E над Θ, а в противном случае множество $V=E^{s,0}\cap E^{s,1}$ является только векториальным множеством.

Сопряженный оператор B^*, действующий при $p<\infty$ в пространстве $L_q[0,1]$, где $1/p+1/q=1$, имеет вид

$$B^*u(x)=a_0^*(\alpha(x))\alpha'(x)u(\alpha(x)),$$

где $a^*(x)$ есть эрмитово сопряженная матрица к $a(x)$; соответствующее ему линейное расширение, действующее по формуле

$$\beta^*(x,\xi)=(\alpha^{-1}(x),(a^*(\alpha(x))\xi),\qquad x\in X,\ \xi\in\mathbb{C}^m,$$

называется *сопряженным* к линейному расширению β [5]. В случае $p = \infty$ оператор B является сопряженным к соответствующему оператору в пространстве $L_1[0,1]$. Изучаемые свойства операторов имеют место одновременно для оператора и сопряженного (с заменой свойства F^+ на F^-), и поэтому достаточно рассмотреть случай $p < \infty$.

Как следует из леммы 1, локальная гиперболичность расширений β и β^* имеет место одновременно; для β^* определена аналогичная функция $d^*(\tau)$ и справедливо равенство $d(\tau) + m = d^*(\tau) + \dim E_\tau^{s,0} + \dim E_\tau^{s,1}$.

Определение 2. Будем говорить, что линейное расширение β *когерентно локально гиперболично* (или что локальные гиперболические структуры в точке 0 и в точке 1*когерентны*), если $d(\tau) = \mathrm{const}$.

Линейное расширение β будем называть *плюс-полугиперболическим* (*минус-полугиперболическим*), если оно локально гиперболическое и $d(\tau) = 0$ ($d^*(\tau) = 0$).

Обозначим через $\lambda_j(0)$ собственные значения матрицы $a(0)$, и пусть $m(0)$ есть количество (с учетом кратности) собственных чисел, удовлетворяющих условию $|\lambda_j(0)| < 1$. Аналогично, пусть $\lambda_j(1)$ суть собственные значения матрицы $a(1)$ и $m(1)$ — число собственных значений, удовлетворяющих условию $|\lambda_j(1)| < 1$.

Лемма 1. *Линейное расширение β является локально гиперболическим в точке* 0 (*в точке* 1) *тогда и только тогда, когда выполнено условие* $|\lambda_j(0)| \neq 1$ (*соответственно* $|\lambda_j(1)| \neq 1$) *для всех* j; *при этом размерность устойчивого подрасслоения* $E^{s,0}$ ($E^{s,1}$) *есть* $m(0)$ (*соответственно* $m - m(1)$).

Заметим, что утверждение леммы 1 является одним из простейших вариантов теорем об устойчивости свойства гиперболичности. Из этой леммы вытекает возможность так называемой «факторизации со сдвигом» коэффициента a. Пусть числа $r_j(0)$, $r_j(0) < r_{j+1}(0)$, $j = 1, 2, \ldots, l(0)$, суть все различные модули собственных значений матрицы $a(0)$, занумерованные в порядке возрастания, и пусть $m_j(0)$ — количество (с учетом кратности) чисел $\lambda_k(0)$, удовлетворяющих неравенству $|\lambda_k(0)| \leqslant r_j(0)$.

Лемма 2. *Для непрерывной матрицы-функции a существует определенная на* $[0,1)$ *непрерывная невырожденная матрица-функция* $S(x)$, *такая, что*

$$S(x)a(x)S^{-1}(\alpha(x)) = d(x), \qquad a(x) = S^{-1}(x)d(x)S(\alpha(x)),$$

где матрица $d(x)$ *является блочно-диагональной с блоками* $d_j(x)$ *размерности* $m_j(0) - m_{j-1}(0)$, *такими, что модули всех собственных значений матрицы* $d_j(0)$ *равны* $r_j(0)$.

Следствие 1. *Укрупнив блоки, матрицу d можно представить в блочно-диагональном виде* $\mathrm{diag}\{d^s(x), d^n(x), d^u(x)\}$, *где у указанных блоков модули собственных значений в точке* 0 *соответственно меньше* 1, *равны* 1 *и больше* 1.

Установим более детально связь между оператором B и семейством операторов $B(\tau)$, $\tau \in \Theta$.

Заметим, что пространство $L_p(\Theta \times \mathbb{Z})$ с нормой

$$\|u\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_\Theta |u(\tau,k)|^p \, d\tau \right)^{1/p}$$

может быть представлено как пространство $L_p(\Theta; l_p)$ измеримых функций $U(\tau)$ на Θ со значениями в l_p и как пространство $l_p(L_p(\Theta))$ двусторонних последовательностей $U = (U(k))$ с элементами из $L_p(\Theta)$.

Лемма 3. 1. *Отображение* $\Pi\colon u \to U$, *где* $U(\tau, k) = (\alpha'(\tau, k)^{1/p} u(\alpha^k(\tau)))$, $k \in \mathbb{Z}$, $\tau \in \Theta$, *и* $\alpha'(x, k)$ — *коцикл, порожденный производной* $\alpha'(x)$, *определяет изометрический изоморфизм между пространством* $L_p[0,1]$ *и пространством* $L_p(\Theta \times \mathbb{Z}) \sim L_p(\Theta; l_p)$. *При этом изоморфизме оператор* B *переходит в оператор* $\widetilde{B}$, *действующий как оператор умножения на операторнозначную функцию* $B(\tau)$, *т. е. по формуле*

$$(\widetilde{B}U)(\tau) = B(\tau)U(\tau). \tag{7}$$

2. *Операторнозначная функция* $B(\tau)$ *непрерывна по операторной норме на* Θ.

В дальнейшем будет удобно отождествлять оператор $\widetilde{B}$ с B.

Операторы $B(\tau)$ действуют в пространствах последовательностей и более доступны для исследования. Мы воспользуемся следующим известным утверждением.

Предложение 3. *Оператор* $I - B(\tau)$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда* $|\lambda_j(0)| \neq 1$ *и* $|\lambda_j(1)| \neq 1$, *т. е. когда выполнены условия локальной гиперболичности в точках* 0 *и* 1.

Множество $K = \{(\tau, u) : u \in \operatorname{Ker}(I - B(\tau))\}$ есть векториальное подмножество в $\Theta \times l_p$. Зададим на нем метрику, индуцированную из произведения:

$$\rho((\tau_1, u_1), (\tau_2, u_2)) = |\tau_1 - \tau_2| + \|u_1 - u_2\|_{l_p}. \tag{8}$$

Определенное выше векториальное множество V будем рассматривать с метрикой, индуцированной из E:

$$\rho((\tau_1, \xi_1), (\tau_2, \xi_2)) = |\tau_1 - \tau_2| + \|\xi_1 - \xi_2\|. \tag{9}$$

Лемма 4. *Если выполнены условия локальной гиперболичности в точках* 0 *и* 1, *то*

(i) *для* $\tau \in \Theta$ *существует линейное биективное отображение* $J(\tau)\colon V_\tau \to \operatorname{Ker}(I - B(\tau))$, *такое, что отображение* $J\colon V \ni (\tau, \xi) \to (\tau, J(\tau)\xi) \in K$ *является гомеоморфизмом между* V *и* K, *причем это отображение и его обратное равномерно непрерывны*;

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(I - B(\tau)) = d(\tau)$, $\dim \operatorname{Ker}(I - B^*(\tau)) = d^*(\tau)$.

Доказательство. Любое решение (в пространстве всех последовательностей) однородного уравнения $u(k) - a(\alpha^k(\tau))u(k-1) = 0$ однозначно определяется своим начальным условием, значением $u(0)$, и имеет вид $u(k) = a(\tau, k)u(0)$, где $a(x, k)$ — коцикл, порожденный коэффициентом a.

Если $u(0) \in E^s_\tau(0)$, то эта последовательность экспоненциально убывает при $k \to +\infty$, а если $u(0) \notin E^s_\tau(0)$, то указанная последовательность растет на $+\infty$. Аналогично если $u(0) \in E^s_\tau(1)$, то эта последовательность экспоненциально убывает при $k \to -\infty$, а если $u(0) \notin E^s_\tau(1)$, то указанная последовательность растет на $-\infty$.

Поэтому построенная последовательность $(u(k))$ принадлежит пространству l_p, т. е. является решением уравнения $(I - B(\tau))u = 0$, тогда и только тогда, когда $u(0) \in V_\tau$. Значит, линейный оператор

$$J(\tau)\colon V_\tau \ni \xi \to (u(k)) = (a(\tau, k)\xi) \in \operatorname{Ker}(I - B(\tau))$$

(ограниченный, поскольку он является отображением конечномерных пространств) является биективным и $d(\tau) = \dim \operatorname{Ker}(I - B(\tau))$.

Аналогично, $d^*(\tau) = \dim \operatorname{Ker}(I - B^*(\tau))$.

Рассмотрим семейство операторов $J^+(\tau)\colon E^{s,0}_\tau \to l_p$, $\tau \in \Theta$, определенное формулой $J^+(\tau)\xi = (U^+(k)) \in l_p$, где $U^+(k) = a(\tau, k)\xi$, если $k \geqslant 0$, и $U^+(k) = 0$, если $k < 0$. Используя приведение матрицы $a(x)$ на $[0, 1)$ к блочно-диагональному виду $d(x) = \operatorname{diag}\{d^s_0(x), d^u_0(x)\}$, мы можем рассматривать эти отображения как отображения из одного пространства (типового слоя расслоения $E^{s,0}_\Theta$) в пространство l_p и получаем, что это семейство операторов непрерывно в смысле нормы, откуда следует равномерная непрерывность отображения $J^+\colon (\tau, \xi) \to J^+(\tau)\xi$ как отображения из $E^{s,0}_\Theta$ в $L(\Theta, l_p)$ с метриками (8) и (9).

Аналогично, семейство операторов, определенное формулой $J^-(\tau)\xi = (U^-(k)) \in l_p$, где $U^-(k) = a(\tau, k)\xi$, если $k < 0$, и $U^-(k) = 0$, если $k \geqslant 0$, задает равномерно непрерывное отображение J^- из $E^{s,1}_\Theta$ в $L(\Theta, l_p)$.

Отображение J определено на пересечении расслоений $E^{s,0}_\Theta$ и $E^{s,1}_\Theta$, задается там формулой $J = J^+ + J^-$ и, следовательно, является равномерно непрерывным.

§4. Основная теорема

Теорема 1. *Пусть $X = [0, 1]$, $\alpha\colon X \to X$ есть C^1-диффеоморфизм, такой, что $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$, $\alpha(x) \neq x$ при $0 < x < 1$, B — оператор вида* (1) *в пространстве $L_p[0, 1]$, где a_0 — невырожденная непрерывная матрица-функция, β — ассоциированное с ним линейное расширение вида* (5) *и $B(\tau)$, $\tau \in \Theta$, — дискретные операторы вида* (6).

Следующие свойства эквивалентны:

(i) *образ оператора $I - B$ замкнут*;

(ii) *линейное расширение β когерентно локально гиперболично*;

(iii) *все операторы $I - B(\tau)$, $\tau \in \Theta$, фредгольмовы и их ядра имеют одинаковую размерность.*

Если выполнены эти условия, то ядро и образ оператора $I - B$ дополняемы.

Следствие. 1. *Оператор $I - B$ является F^+-оператором тогда и только тогда, когда β плюс-полугиперболично*; *в этом случае* $\operatorname{Ker}(I - B) = 0$ *и оператор обратим слева.*

2. *Оператор $I - B$ является F^--оператором тогда и только тогда, когда β минус-полугиперболично*; *в этом случае* $\operatorname{Im}(I - B) = L_p[0, 1]$ *и оператор обратим справа.*

3. *Оператор $I - B$ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда β когерентно локально гиперболично и $d(\tau) = d^*(\tau) = 0$*; *в этом случае оператор $I - B$ обратим.*

Доказательство теоремы 1. Приведем доказательство для $1 < p < \infty$. В случае $p = 1$ доказательство содержит некоторые модификации, которые мы опускаем из-за ограниченности размера статьи. Как и выше, достаточно рассмотреть случай, когда выполнено условие $\alpha(x) \leqslant x$.

Эквивалентность условий (ii) и (iii) доказана в лемме 4.

1. Пусть выполнено (iii). Покажем, что образ оператора $I - B$ замкнут. Согласно лемме 3, оператор $I - B$ представлен в виде непрерывной операторнозначной функции $I - B(\tau)$, все значения которой являются фредгольмовыми операторами, причем их ядра имеют одинаковую размерность. Так как $d(\tau) \equiv d = \text{const}$, векториальное множество V является подрасслоением расслоения E над Θ. Поскольку над отрезком любое расслоение является тривиальным, можно выбрать ортонормированный базис $(e_j(\tau))$, $j = 1, \dots, d$, в каждом слое расслоения V над Θ, непрерывно зависящий от τ. Согласно лемме 4, каждый базисный вектор $e_j(\tau)$ в слое V_τ порождает элемент $w_j(\tau) := J(\tau)e_j(\tau)$ из ядра $\operatorname{Ker}(I - B(\tau))$, причем эти элементы непрерывно зависят от τ в норме l_p. Формула

$$P(\tau)u = \sum_{j=1}^{d} \langle u(0), e_j(\tau)\rangle \, w_j(\tau) \tag{10}$$

задает ограниченный проектор в l_p на $\operatorname{Ker}(I - B(\tau))$, причем это семейство проекторов непрерывно зависит от τ и ограничено по норме в совокупности.

Поэтому семейство $P(\tau)$ задает ограниченный проектор P в пространстве $L_p[\Theta, l_p]$, и этот проектор является проектором на ядро оператора $I - B$. Проектор P порождает разложение в прямую сумму подпространств: $L_p[\Theta, l_p] = \operatorname{Ker}(I - B) \oplus \operatorname{Ker} P$. Обозначим через $(I - B)_P$ сужение оператора $I - B$ на $\operatorname{Ker} P$. Так как $\operatorname{Im}(I - B) = \operatorname{Im}(I - B)_P$, достаточно доказать замкнутость последнего множества. Оператор $(I - B)_P$ по построению инъективен и для него замкнутость образа эквивалентна выполнению неравенства

$$\|(I - B)u\| \geqslant C\|u\|, \qquad C > 0,\ u \in \operatorname{Ker} P. \tag{11}$$

Пусть $m(\tau) = \inf\{\|[I - B(\tau)]u\| : u \in \operatorname{Ker} P(\tau),\ \|u\| = 1\}$. Для каждого τ сужение оператора $I - B(\tau)$ на подпространство $\operatorname{Ker} P(\tau)$ является инъективным оператором с замкнутым образом, откуда следует, что $m(\tau) > 0$. Поскольку функция $m(\tau)$ полунепрерывная снизу, она имеет на отрезке Θ минимум $m(\tau^*) := C > 0$. Тогда в силу представления (7) выполнена оценка (11), из которой следует замкнутость образа.

Применяя те же рассуждения к сопряженному оператору, получаем проектор Q на ядро оператора $I - B^*$. Тогда оператор $(I - Q)^*$ является ограниченным проектором на $\operatorname{Im}(I - B)$, откуда следует дополняемость этого подпространства.

2. Докажем необходимость условия локальной гиперболичности. Пусть образ оператора $I - B$ замкнут. Тогда оператор, индуцированный оператором $I - B$, отображает факторпространство $L_p[0,1]/\operatorname{Ker}(I - B)$ на $\operatorname{Im}(I - B)$ биективно и взаимно непрерывно и, значит, существует постоянная $C > 0$, такая, что $\|(I - B)u\| \geqslant C\|[u]\|$, где $[u]$ есть порожденный u элемент факторпространства и норма в правой части есть норма в факторпространстве. Предположим, что условие локальной гиперболичности нарушено в точке 0, и покажем, что тогда

для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $u \in L_p[0,1]$, $[u] \neq 0$, для которой

$$\|(I-B)u\| \leqslant \varepsilon \|[u]\|, \tag{12}$$

что противоречит предыдущему неравенству.

Запишем в силу следствия 2 леммы 2 матрицу $d(x)$ в виде $d(x) = \mathrm{diag}\{d^s(x), d^n(x), d^u(x)\}$. Такое представление этой матрицы порождает разложение расслоения E в окрестности точки 0 в прямую сумму трех инвариантных относительно действия β подрасслоений E^s, E^n и E^u — локально устойчивого, нейтрального и неустойчивого. Перейдя к эквивалентной норме, можем считать, что эти подрасслоения ортогональны.

Пусть η есть единичный собственный вектор матрицы $d^n(0)$ с собственным значением λ_ν, где $|\lambda_\nu| = 1$. Тогда для $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 > 0$, такое, что при $x < \delta_1$ выполнено неравенство

$$\|\lambda_\nu \eta - d^n(x)\eta\| < \frac{1}{8}\,\varepsilon. \tag{13}$$

Пусть $u_0(x) = h^{-1/p}\eta$ при $x \in \Theta$, $h = t - \alpha(t)$, и $u_0(x) = 0$ при остальных x. Рассмотрим семейство функций, зависящее от параметров N и N_1:

$$u = (N+1)^{-1/p} \sum_{N_1}^{N_1+N} \lambda_\nu^{-k} T^{-k} u_0. \tag{14}$$

Так как носители слагаемых в (14) не пересекаются и оператор T изометрический, то $\|u\| = \|u_0\| = 1$.

Выбрав N_1 достаточно большим, получаем $\alpha^{N_1}(t) < \delta_1$. Поэтому для $x \in \Theta$ и $k > N_1$ имеем $\alpha^k(x) \in [0, \delta_1]$ и выполнено (13). Так как

$$(I-B)u = (N+1)^{-1/p}\Big\{u_0 + BT^{-N}u_0 + \sum_{1}^{N-1} \lambda_\nu^{k-1}[\lambda_\nu \eta - d^n(\alpha^k(x))\eta]\Big\},$$

получаем оценку $\|(I-B)u\| \leqslant \frac{1}{8}\varepsilon(N+1)^{-1/p}[(N-1)^{1/p} + \mathrm{const}]$ и при достаточно большом N имеем

$$\|(I-B)u\| \leqslant \frac{1}{4}\,\varepsilon\|u\|. \tag{15}$$

Это еще не есть требуемая оценка (12), так как в (12) в правой части стоит меньшая величина — норма в факторпространстве: $\|[u]\| = \inf\{\|u - w\| : w \in \mathrm{Ker}(I-B)\}$.

Покажем, что при достаточно большом N_1 для построенной функции выполнено $\|[u]\| \geqslant 1/4$, откуда следует неравенство (12), что и требовалось.

Неравенство (15) означает, что функция u является «почти собственной» функцией оператора B с собственным значением 1. Неравенство $\|[u]\| \geqslant 1/4$ показывает, что она сильно отличается от настоящих собственных функций. Для получения последнего неравенства проанализируем поведение собственных функций в окрестности нуля.

Так как $w \in \mathrm{Ker}(I-B)$ является сечением расслоения E, разложение расслоения E на инвариантные подрасслоения порождает в окрестности нуля разложение $w(x) = w_s(x) + w_n(x) + w_u(x)$, где w_s является сечением расслоения E^s, w_u — сечением расслоения E^u, а w_n — сечением расслоения E^n. Из неустойчивости расслоения E^u следует, что $w_u = 0$ и в действительности всегда $w = w_s + w_n$.

Так как u является по построению сечением расслоения E^n, то в силу предположения об ортогональности подрасслоений $|u(x)-w(x)| = (|u(x)-w_n(x)|^2 + |w_s(x)|^2)^{1/2} \geqslant |u(x)-w_n(x)|$.

Возможны следующие два случая, причем оба эти случая реализуются в примерах.

Пусть выполнено условие типа условия Фавара (см. [5]): для любой точки $(x,\xi) \in E^n$, $\xi \neq 0$, траектория $\beta^k(x,\xi)$ не стремится к нулю при $k \to +\infty$. Тогда траектория точки (τ,ξ) из E^n не может порождать элемент ядра оператора $I - B(\tau)$ — соответствующий ряд расходится, а значит, $w_n = 0$, откуда $\|[u]\| = \|u\|$, и в этом случае утверждение доказано.

Пусть теперь условие типа условия Фавара не выполнено. Тогда могут существовать ненулевые элементы w ядра, являющиеся сечениями нейтрального подрасслоения E^n, и нужно оценить расстояние от u до таких элементов ядра.

Элементу $(\tau,\xi) \in E^n$, $\tau \in \Theta$, поставим в соответствие последовательность $w(\tau,\xi)$, где $w(\tau,\xi)(k) = a(\tau,k)\xi$ при $k \geqslant 0$ и $w(\tau,k) = 0$ при $k < 0$. Пусть S есть множество пар $(\tau,\xi) \in E^n$, таких, что $w(\tau)$ принадлежит l_p. Множество S векториально и формула $G(\tau)\colon S_\tau \ni \xi \to w(\tau) \in l_p$ задает линейное биективное отображение векторного пространства S_τ на некоторое конечномерное подпространство $W(\tau)$ в l_p. Если последовательность w принадлежит $\mathrm{Ker}(I - B(\tau))$, то при $k \geqslant 0$ она совпадает с одной из последовательностей из $W(\tau)$.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций

$$\phi_n(\tau,\xi) = \left(\sum_0^n |a(\tau,k)\xi|^p\right)^{-1/p} |\xi|^{-1}, \qquad \tau \in \Theta,\ \xi \in E^n_\tau,\ \xi \neq 0.$$

Она монотонно возрастает, и в каждой точке существует конечный или бесконечный предел. Тогда S есть множество пар (τ,ξ), для которых этот предел конечен. Обозначим этот предел через $\phi(\tau,\xi)$. Заметим, что $\phi(\tau,\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$. По построению имеем

$$\|G(\tau)\xi\| = \phi(\tau,\xi)\|\xi\|, \tag{16}$$

в частности, при фиксированном τ функция $\phi(\tau,\xi)$ непрерывна по ξ при $\xi \neq 0$, положительно однородна степени 0 и $\|G(\tau)\| = \max\{\phi(\tau,\xi) : \xi \in S_\tau,\ \xi \neq 0\}$.

При фиксированном τ последовательность $\phi_n(\tau,\xi)$ состоит из непрерывных функций, монотонно возрастает и имеет пределом непрерывную функцию $\phi(\tau,\xi)$; по теореме Дини отсюда следует, что эта последовательность сходится равномерно по ξ. Поэтому последовательность функций

$$f_n(\tau) = \max\{[\phi(\tau,\xi) - \phi_n(\tau,\xi)][\phi(\tau,\xi)]^{-1} : \xi \in K_\tau,\ \xi \neq 0\}$$

на множестве Θ точечно сходится к нулю. Эти функции измеримы, так как

$$f_n(\tau) = \lim_{m\to\infty} \max\{[\phi_m(\tau,\xi) - \phi_n(\tau,\xi)][\phi_m(\tau,\xi)]^{-1} : \xi \in S_\tau,\ \xi \neq 0\}.$$

По теореме Егорова существует подмножество Θ_1 с мерой Лебега $\mu(\Theta_1) > h/2$, на котором последовательность $f_n(\tau)$ равномерно стремится к нулю. Выберем число n_0 так, что при $n > n_0$ для $\tau \in \Theta_1$ выполнено неравенство $f_n(\tau) < 1/4$.

При соответствии Π из леммы 3 построенной выше функции u ставится в соответствие семейство последовательностей $U(\tau) \in l_p$, таких, что $U(\tau)(k) =$

$(N+1)^{-1/p}\lambda_\nu^{-k}h^{-1/p}\eta$ при $N_1 \leqslant k \leqslant N_1+N$ и $U(\tau)(k)=0$ при остальных k. При этом $\|U(\tau)\| = h^{-1/p}$.

Отметим, что если $\|w(\tau)\| > 2h^{-1/p}$, то $\|U(\tau)-w(\tau)\| > h^{-1/p}$.

Пусть теперь $\|w\| \leqslant 2h^{-1/p}$. Оценим снизу $\|U(\tau)-w(\tau)\|$ в этом случае. Воспользовавшись тем, что $w(\tau)=w(\tau,\xi)\in W(\tau)$ для некоторого ξ, и равенством (16), получаем, что $|\xi| \leqslant 2(\phi(\tau,\xi))^{-1}h^{-1/p}$.

Пусть $N_1 > n_0$. Тогда для $w(\tau,\xi)\in W(\tau)$ и $\tau\in\Theta_1$

$$\left(\sum_{k>N_1}|w(\tau,k)|^p\right)^{1/p} = [\phi(\tau,\xi)-\phi_{N_1}(\tau,\xi)]|\xi| \leqslant 2f_{N_1}(\tau)h^{1/p} \leqslant \frac{1}{2}\,h^{-1/p}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|U(\tau)-w(\tau)\| &\geqslant \left(\sum_{k>N_1}|U(\tau,k)-w(\tau,k)|^p\right)^{1/p}\\ &\geqslant \left|\left(\sum_{k>N_1}|U(\tau,k))|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{k>N_1}|w(\tau,k)|^p\right)^{1/p}\right| \geqslant \frac{1}{2}\,h^{-1/p}.\end{aligned}$$

Таким образом, для всех $w(\tau,\xi)\in W(\tau)$ выполнено $\|U(\tau)-w(\tau,\xi)\| \geqslant \frac{1}{2}h^{-1/p}$.

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}\|u-w\| &\geqslant \left(\int_\Theta\left(\sum_{k>N_1}|U(\tau,k)-w(\tau,k)|^p\right)d\tau\right)^{1/p}\\ &\geqslant \left(\int_{\Theta_1}\left(\sum_{k>N_1}|U(\tau,k)-w(\tau,k)|^p\right)d\tau\right)^{1/p}\\ &\geqslant \left(\int_{\Theta_1}\|U(\tau)-w(\tau)\|^p\,d\tau\right)^{1/p} \geqslant \frac{1}{2}\,(\mu(\Theta_1))^{1/p}h^{-1/p} \geqslant \frac{1}{4},\end{aligned}$$

а это и требовалось. Утверждение доказано.

3. Пусть образ оператора $I-B$ замкнут и по доказанному выполнено условие локальной гиперболичности. Докажем, что выполнено условие $d(\tau)=\mathrm{const}$.

Для измеримого подмножества $M\subset\Theta$ ненулевой меры пространство $L_p(M;l_p)$ естественно вложено в $L_p(\Theta;l_p)$. Это подпространство и его дополнение $L_p(\Theta\setminus M;l_p)$ инвариантны относительно действия оператора B, и определено сужение $B_M\colon L_p(M;l_p)\to L_p(M;l_p)$ оператора B на это подпространство. Поэтому образ оператора $I-B_M$ является замкнутым.

Предположим, что $d(\tau)\neq\mathrm{const}$. Пусть $d_0=\min d(\tau)$. Так как функция $d(\tau)$ является полунепрерывной сверху, множество $\{\tau : d(\tau)=d_0\}$ открыто. Рассмотрим в качестве M один из интервалов (τ_1,τ_2), составляющих это множество. В граничной точке τ_1 имеем $d(\tau_1)>d_0$.

Выберем ортонормированные базисы $e_j(\tau)$, $j=1,\dots,d_0$, в подпространствах V_τ, $\tau\in M$, непрерывно зависящие от τ, и построим по ним проекторы $P(\tau)$ вида (10). Заметим, что, в отличие от рассуждения из части 1 доказательства теоремы, эти операторы определены не на отрезке, а на интервале M, но в силу утверждения леммы 4 о равномерной непрерывности проекторы $P(\tau)$, $\tau\in M$, ограничены в совокупности и задают ограниченный проектор P_M в $L_p(M, l_p)$ на ядро оператора $I - B_M$.

Выберем также базис в слое V_{τ_1} и построим по нему аналогично проектор $P(\tau_1)$.

Подпространство $\operatorname{Ker} P_M = \operatorname{Im}(I - P_M)$ является дополнением к $\operatorname{Ker}(I - B_M)$, и оператор $I - B_M$ биективно отображает $\operatorname{Ker} P_M$ на замкнутое подпространство $\operatorname{Im}(I - B_M)$. Поэтому существует такая постоянная $C > 0$, что выполнена оценка снизу $\|(I - B_M)u\| \geqslant C\|u\|$, $u \in \operatorname{Ker} P_M$. Тогда аналогичная оценка

$$\|(I - B(\tau)(I - P(\tau))u\| \geqslant C\|(I - P(\tau))u\| \tag{17}$$

выполнена для почти всех $\tau \in M$, а в силу непрерывности по τ — для всех τ.

Векторы базиса $e_j(\tau)$ могут не иметь предела при $\tau \to \tau_1$. Более того, примеры показывают, что может не существовать предел подпространств V_τ при $\tau \to \tau_1$ и соответственно может не существовать предел проекторов P_τ. Однако V_τ можно рассматривать как подпространства одного конечномерного пространства $\mathbb{C}^m$. Из конечномерности следует, что найдется последовательность $t_k \in M$, $t_k \to \tau_1$, такая, что существуют пределы $e_j(t_k)$ при $k \to \infty$, и тогда эти пределы образуют базис в некотором d_0-мерном подпространстве из V_{τ_1}. Из равномерной непрерывности отображения J следует, что при $\tau \to \tau_1$ существует $\lim P(t_k) := \widetilde{P}$, причем $\widetilde{P}$ не совпадает с $P(\tau_1)$, а является проектором на некоторое собственное подпространство в $\operatorname{Ker}(I - B(\tau_1))$. Поэтому существует ненулевой вектор v из $\operatorname{Ker}(I - B(\tau_1))$, такой, что $\widetilde{P}v = 0$. Переходя к пределу при $t_k \to \tau_1$ в (17), получаем оценку $\|(I - B(\tau_1)(I - \widetilde{P})u\| \geqslant C\|(I - \widetilde{P})u\|$ для предельного оператора. Однако для построенного выше ненулевого вектора v имеем $((I - B(\tau_1))(I - \widetilde{P})v = (I - B(\tau_1))v = 0$, что противоречит последней оценке. Теорема доказана.

§ 5. Существенные спектры оператора взвешенного сдвига

Динамические существенные спектры линейного расширения β определим как множества чисел λ, при которых нарушены некоторые из рассмотренных свойств линейного расширения β_λ из спектрального семейства (5), а именно $\sigma_{F^\pm}(\beta)$ есть множество чисел λ, при которых β_λ не является $\pm$-полугиперболическим, $\sigma_K(\beta) = \sigma_{F^+}(\beta) \cap \sigma_{F^-}(\beta)$, $\sigma_F(\beta) = \sigma_{F^+}(\beta) \cup \sigma_{F^-}(\beta)$ и $\sigma_G(\beta)$ — множество чисел λ, при которых β_λ не является когерентно локально гиперболическим.

Из теоремы 1 в такой терминологии вытекает

Теорема 2. *Существенные спектры оператора B совпадают с соответствующими динамическими существенными спектрами линейного расширения β, причем $\sigma(B) = \sigma_F(B)$.*

Можно получить некоторую дополнительную информацию о динамических, а следовательно, и об операторных существенных спектрах. Пусть числа $r_j(0)$ и $m_j(0)$ те же, что в лемме, и пусть $r_k(1)$ и $m_k(1)$, $k = 1, \dots, l(1)$, суть аналогичные числа для матрицы $a(1)$.

Положим $r_0(0) = r_0(1) = 0$, $r_{l(0)+1}(0) = r_{l(1)+1}(1) = +\infty$, и пусть $R_j(x) = \{\lambda : r_{j-1}(x) < |\lambda| < r_j(x)\}$, $x = 0$ или $x = 1$, $R_{j,k} = R_j(0) \cap R_k(1)$. Среди множеств $R_{j,k}$ могут быть пустые, но имеется ровно $\nu - 1$ непустых, где ν — число различных среди чисел $r_j(0)$ и $r_k(1)$, $\nu \leqslant l(0) + l(1)$.

Согласно утверждению теоремы 1, окружности $|\lambda| = r_j(0)$ (*резонансные окружности первого типа*) и $|\lambda| = r_k(1)$ (*резонансные окружности второго типа*) принадлежат существенному спектру $\sigma_G(B)$. Множества $R_{j,k}$ представляют собой компоненты связности дополнения к объединению резонансных окружностей на комплексной плоскости, и для каждого λ, не принадлежащего резонансным окружностям, однозначно определены числа $j = j(\lambda)$ и $k = k(\lambda)$, такие, что $\lambda \in R_{j,k}$.

Множества $R_{0,0}$ (внутренний круг) и $R_{l(0)+1,l(1)+1}$ (внешность относительно резонансной окружности с наибольшим радиусом) принадлежат резольвентному множеству оператора. Остальные (непустые) множества $R_{j,k}$ являются кольцами.

Теорема 3. 1) *Для каждого из (непустых) колец $R_{j,k}$ все его точки имеют один и тот же спектральный тип, т. е. все они принадлежат одним и тем же существенным спектрам либо все являются регулярными значениями.*

2) *Если $m_j(0) \neq m_k(1)$ и кольцо $R_{j,k}$ непусто, то оно принадлежит спектру.*

3) *В крайних кольцах $R_{j,k}$ (когда один из индексов принимает наименьшее или наибольшее значение) оператор $\lambda I - B$ односторонне обратим. А именно, для нерезонансных значений λ при выполнении условия*

$$r_1(0) < |\lambda| < r_1(1) \quad \textit{или} \quad r_{l(0)}(0) < |\lambda| < r_{l(1)}(1)$$

оператор $\lambda I - B$ обратим слева, но необратим, а при выполнении условия

$$r_1(0) > |\lambda| > r_1(1) \quad \textit{или} \quad r_{l(0)}(0) > |\lambda| > r_{l(1)}(1))$$

оператор $\lambda I - B$ обратим справа, но необратим.

Доказательство. 1) Согласно лемме 2, для всех $\lambda \in R_j(0)$ локально устойчивые в точке 0 подрасслоения для линейных расширений β_λ совпадают. Аналогично, для $\lambda \in R_k(1)$ совпадают подрасслоения, локально устойчивые в точке 1. Поэтому для всех $\lambda \in R_{j,k}$ соответствующие функции $d(\tau)$ и $d^*(\tau)$ совпадают и такие λ имеют одинаковый спектральный тип.

2) Так как $\operatorname{ind}(\lambda I - B(\tau)) = m_j(0) - m_k(1) \neq 0$, операторы $\lambda I - B(\tau)$ необратимы и λ является спектральным значением.

3) В указанных кольцах одно из двух устойчивых подрасслоений (в точке 0 и в точке 1) для β или для β^* нулевое и оператор $\lambda I - B$ односторонне обратим.

Пример 1. Для оператора вида (1) с постоянным исходным коэффициентом $a_0(x) \equiv a_0(0)$ локально устойчивые подрасслоения имеют вид произведения (слои не зависят от x) и локальные гиперболические структуры всегда когерентны. Поэтому $\sigma_G(B) = \sigma_K(B)$ и эти спектры состоят только из резонансных окружностей. Кроме того, если в этом примере выполнено условие $\alpha(x) < x$, то для колец, заключенных между резонансными окружностями, $d_\lambda(\tau) = 0$, а $d^*_\lambda(\tau) = r(\lambda) - \nu(\lambda)$, где $r(\lambda)$ есть число (с учетом кратности) собственных значений матрицы a, удовлетворяющих неравенству $|\lambda_j|\alpha'(0) < |\lambda|$, а $\nu(\lambda)$ — число собственных значений, удовлетворяющих неравенству $|\lambda_j|\alpha'(1) < |\lambda|$. Поэтому σ_{F^+} состоит только из резонансных окружностей, а каждое из указанных колец либо принадлежит резольвентному множеству, либо принадлежит σ_{F^-}.

Пример 2. Пусть $m = 1$, т. е. рассмотрим скалярный случай. Тогда спектр состоит из одного кольца с радиусами $|a(0)|$ и $|a(1)|$ и в силу утверждения 3) теоремы 3 для внутренних точек этого кольца оператор $\lambda I - B$ односторонне обратим. Это утверждение было ранее получено Ю. И. Карловичем (см. [15]).

Пример 3. Пусть $m = 2$, $A(x) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(x), \lambda_2(x)\}$ — диагональная матрица, причем $|\lambda_1(0)| < |\lambda_1(1)| < |\lambda_2(0)| < |\lambda_2(1)|$, и пусть при $x \in \Theta$

$$V(x) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi(x-t)/h) & \sin(2\pi(x-t)/h) \\ -\sin(2\pi(x-t)/h) & \cos(2\pi(x-t)/h) \end{pmatrix},$$

где $h = t - \alpha(t)$, и $V(x)$ есть единичная матрица при остальных x. Рассмотрим оператор (1) с приведенным коэффициентом $a(x) = A(x)V(x)$. Тогда спектр $\sigma(B)$ есть кольцо $|\lambda_1(0)| \leqslant |\lambda| \leqslant |\lambda_2(1)|$, причем при $|\lambda_1(0)| < |\lambda| < |\lambda_1(1)|$ образ оператора $\lambda I - B$ замкнут, $\operatorname{Ker}(\lambda I - B) = 0$ и оператор обратим слева, при $|\lambda_1(0)| \leqslant |\lambda| \leqslant |\lambda_2(0)|$ образ этого оператора незамкнут и при $|\lambda_2(0)| < |\lambda| < |\lambda_2(1)|$ образ совпадает со всем пространством и оператор обратим справа.

Приведенный пример 3 показывает, что все логически возможные случаи, описанные в теореме, реализуются для операторов указанного вида с произвольными коэффициентами. Примеры 1 и 2 показывают, что для специальных подклассов, которые рассматривались ранее, имеет место вырождение: число возможных качественно различных вариантов уменьшается, так как некоторые из существенных спектров совпадают.

Литература

1. *Аносов Д. В.* Об аддитивном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности. Изв. АН СССР, сер. матем., **37**, №2, 1259–1274 (1973).
2. *Антоневич А. Б.* Об операторах, порожденных линейными расширениями диффеоморфизмов. ДАН СССР, **243**, №4, 825–828 (1978).
3. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. Университетское, Минск, 1988.
4. *Антоневич А. Б., Лебедев А. В.* Функциональные и функционально-операторные уравнения. C^*-алгебраический подход. Труды С.-Петербург. матем. о-ва, **6**, 34–140 (1998).
5. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. Штиинца, Кишинев, 1984.
6. *Горин Е. А.* Как выглядит спектр эндоморфизма диск-алгебры. Зап. науч. семин. ЛОМИ, **126**, 55–68 (1983).
7. *Китовер А. К.* О спектре автоморфизмов с весом и теореме Камовица–Шейнберга. Функц. анализ и его прил., **13**, вып. 1, 70–71 (1979).
8. *Латушкин Ю. Д., Степин А. М.* Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем. УМН, **46**, вып. 3 (278), 85–143 (1991).
9. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I. C^*-theory. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.
10. *Antonevich A. B., Belitskii G.* The essential spectrums of a weighted shift operator in the spaces of continuous and differentiable functions. In: Spectral and evolutionary problems, Vol. 8, Tavria Publ., Simferopol, 1998, pp. 3–12.
11. *Belitskii G., Bykov N.* Spaces of cohomologies associated with linear functional equations. Ergodic Theory Dynam. Systems, **18**, 343–356 (1998).

12. *Belitskii G., Lyubich Yu.* On the normal solvability of cohomological equations on compact topological spaces. In: Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 103, 1998, pp. 75–87.
13. *Chicone C., Latushkin Yu.* Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
14. *Karlovich A. Yu., Karlovich Y. I.* One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces. Integral Equations Operator Theory, **42**, 201–228 (2002).
15. *Kravchenko V. G., Litvinchuk G. S.* Introduction to the Theory of Singular Integral Operators with Shift. Math. Appl., Vol. 289, Kluwer, 1994.

Белорусский государственный университет
Университет в Белостоке
e-mail: antonevich@bsu.by

Поступило в редакцию
3 мая 2003 г.