А. Б. Антоневич, А. В. Кочергин, А. А. Шукур

О поведении сумм Биркгофа, порожденных поворотами окружности

В работе рассмотрены суммы Биркгофа $f(n,x,h)$ для непрерывных функций f с нулевым средним на окружности, порожденные поворотами на углы $2\pi h$, где число h иррациональное. Основной результат утверждает, что единственным ограничением на скорость роста последовательности $\max_x f(n,x,h)$ при $n\to\infty$ является равномерное стремление к нулю средних Биркгофа $\frac{1}{n}f(n,x,h)$. А именно показано, что для любой последовательности $\sigma_k\to 0$ и для любого иррационального h существует такая функция f, что последовательность $\max_x f(n,x,h)$ растет быстрее, чем $n\sigma_n$, а также что для любой функции f, не являющейся тригонометрическим многочленом, существуют иррациональные h, при которых некоторая подпоследовательность $\max_x f(n_k,x,h)$ растет быстрее, чем соответствующая подпоследовательность $n_k\sigma_{n_k}$.

Даны приложения к исследованию операторов взвешенного сдвига, порожденных иррациональными поворотами, и их резольвент; показано, что резольвента такого оператора может возрастать сколь угодно быстро при приближении к спектру.

Библиография: 46 названий.

Ключевые слова: сумма Биркгофа, эргодический поворот окружности, оператор взвешенного сдвига, резольвента.

DOI: https://doi.org/10.4213/sm9356

§ 1. Введение. Суммы Биркгофа

Пусть $\mathbb{T}^m=\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ – m-мерный тор, $h=(h_1,\dots,h_m)\in\mathbb{T}^m$. С помощью вектора h задается сдвиг на торе

$$\alpha_h\colon \mathbb{T}^m\to\mathbb{T}^m,\qquad \alpha_h(x)=x+h. \tag{1.1}$$

Такое отображение задает динамическую систему с дискретным временем (каскад)

$$\alpha_h^n(x)=x+nh,\qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Пусть f – функция на $\mathbb{T}^m$, которую можно интерпретировать как функцию m переменных, периодическую с периодом 1 по каждой переменной.

n-я сумма Биркгофа, построенная по отображению α_h и функции f, задается выражением

$$f(n,x,h)=\begin{cases} f(x)+f(x+h)+\dots+f(x+(n-1)h), & n>0,\\ 0, & n=0,\\ -(f(x-h)+f(x-2h)+\dots+f(x+nh)), & n<0.\end{cases}$$

Отображение (1.1) является эргодическим относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда числа $1, h_1, h_2, \ldots, h_m$ линейно независимы над полем рациональных чисел, и в этом случае оно является строго эргодическим, т.е. существует только одна инвариантная относительно α_h вероятностная мера, и это мера Лебега. В силу строгой эргодичности отображения последовательность биркгофовых средних для $f \in C(\mathbb{T}^m)$ равномерно сходится к среднему значению функции f (см., например, [1], [2]):

$$\frac{1}{n} f(n, x, h) \to \int_{\mathbb{T}^m} f(x)\, dx, \qquad n \to \infty. \tag{1.2}$$

Поэтому для функций с нулевым средним и эргодических α_h средние сумм Биркгофа $\frac{1}{n} f(n, x, h)$ равномерно сходятся к нулю.

С помощью вектора h можно задать линейный поток – динамическую систему с непрерывным временем

$$\alpha_h^t(x) = x + th, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Этот поток эргодичен относительно меры Лебега тогда и только тогда, когда числа $h_1, h_2, \ldots, h_m$ линейно независимы над полем рациональных чисел, и в этом случае он является строго эргодическим.

Аналогом суммы Биркгофа для линейного потока (1.3) является интеграл вдоль траектории

$$\mathscr{I}(t, x, h) = \int_0^t f(x + sh)\, ds.$$

Изучение сумм Биркгофа и интегралов вдоль траектории взаимно дополняют друг друга. А. Пуанкаре в [3] предложил сводить изучение потока к изучению отображения с помощью трансверсального к потоку сечения, на котором индуцируется *отображение первого возвращения* (используются и другие названия). Например, в качестве такого сечения для линейного потока на $\mathbb{T}^m$ при $m \geqslant 2$ можно рассмотреть пересечение гиперплоскости $x_1 = 0$ с тором $\mathbb{T}^m$ (x_1 – первая координата вектора $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{T}^m$). Для $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{T}^m$ обозначим $x' = (x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{T}^{m-1}$ и $h' = (h_2/h_1, \ldots, h_m/h_1) \in \mathbb{T}^{m-1}$. Пусть

$$x' \mapsto x' + h' \text{ – сдвиг на } \mathbb{T}^{m-1},$$
$$\varphi(x') = \int_0^{1/h_1} f(0 + sh_1, x_2 + sh_2, \ldots, x_m + sh_m)\, ds.$$

Так как

$$\alpha_h^{1/h_1}(0, x_2, \ldots, x_m) = \left(0 + 1, x_2 + \frac{h_2}{h_1}, \ldots, x_n + \frac{h_n}{h_1}\right) = (0, x' + h'),$$

то для моментов времени $t_n = n/h_1$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем

$$\mathscr{I}(t_n, x, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(x' + kh'),$$

т.е. это суммы Биркгофа для функции φ, построенные по сдвигу тора $\mathbb{T}^{m-1}$ меньшей размерности.

Основным объектом исследования в настоящей работе являются суммы Биркгофа $f(n,x,h)$, построенные по иррациональному сдвигу h одномерного тора, т.е. окружности, и непрерывной на окружности функции f с нулевым средним:

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx = 0. \tag{1.4}$$

Изучается скорость роста значений сумм Биркгофа $f(n,x,h)$ в фиксированной точке при $n\to\infty$, а также скорость роста максимумов сумм Биркгофа, которые мы обозначим

$$\Phi(n,h;f) := \max_x f(n,x,h).$$

В силу строгой эргодичности иррационального поворота окружности для непрерывных функций с нулевым средним

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Phi(n,h;f)=0,$$

что приводит к ограничению на скорость роста: $\Phi(n,h;f)=o(n)$.

Поведение сумм Биркгофа и интегралов вдоль траекторий в различных задачах рассматривал А. Пуанкаре (см. [3], [4]). В частности, он привел пример линейного потока (1.3) на двумерном торе $\mathbb{T}^2$ и непрерывной, но нигде не дифференцируемой на торе функции f с нулевым средним, для которых

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(sh_1,sh_2)\,ds=+\infty.$$

Анализ этого примера проведен в [5], откуда, в частности, следует, что при $h=\sqrt{2}$ существует непрерывная функция с нулевым средним, для которой суммы Биркгофа в точке 0 стремятся к бесконечности.

С другой стороны, в примерах наблюдался эффект возвращаемости траекторий, заключающийся в том, что на окружности имеются такие точки x, что $f(n_k,x,h)\to 0$ для некоторой подпоследовательности n_k.

В. В. Козловым в [6] для функций класса C^2 была обнаружена более сильная, *синхронная возвращаемость сумм Биркгофа*, заключающаяся в том, что для любого иррационального поворота существует подпоследовательность n_k такая, что последовательность $f(n_k,x,h)$ стремится к нулю равномерно, т.е. $\max_x|f(n_k,x,h)|\to 0$, $k\to\infty$. Затем А. Б. Крыгин в [7] доказал аналогичный факт для функций из C^1, а Е. А. Сидоров в [8] обобщил этот результат на случай абсолютно непрерывных на окружности функций.

Однако для линейных потоков на торах размерности $m\geqslant 3$ и сдвигов на торе размерности $m\geqslant 2$ утверждение о синхронной возвращаемости не имеет места даже для гладких функций. В 1995 г. Н. Г. Мощевитин в [9] (см. также [5]) показал, что для любой непрерывной функции на торе $\mathbb{T}^3$ с нулевым средним общего положения (с ненулевыми коэффициентами Фурье) при специальном выборе h имеет место рост величин

$$J(t)=\sup_{x_1,x_2,x_3}\int_0^t f(sh_1+x_1,sh_2+x_2,sh_3+x_3)\,ds,$$

причем эти величины могут расти сколь угодно быстро в рамках имеющихся ограничений: для любой сколь угодно медленно монотонно убывающей к нулю при $t \to +\infty$ функции $F(t)$ существует набор частот h_1, h_2, h_3, линейно независимых над $\mathbb{Z}$, такой, что, начиная с некоторого t_0,

$$J(t) \geqslant tF(t).$$

Из этого, в частности, следует, что на торе $\mathbb{T}^2$ для любой непрерывной функции общего положения с нулевым средним (в том числе сколь угодно гладкой) и любой монотонно стремящейся к нулю последовательности σ_n существуют $h = (h_1, h_2)$, при которых $\max_x |f(n, x, h)| \geqslant n\sigma_n$ и, в частности, нет синхронной возвращаемости сумм Биркгофа.

Но на окружности $\mathbb{T}$ для гладкой функции f при любом иррациональном повороте имеет место синхронная возвращаемость и аналогичное утверждение о росте сумм Биркгофа неверно. Поэтому в случае окружности вопрос о поведении сумм Биркгофа требует дополнительного исследования, которое проведено в настоящей работе.

Основные результаты, полученные в § 3 и § 4, заключаются в доказательстве следующих утверждений, дополняющих известную информацию о возможном поведении сумм Биркгофа на окружности.

Пусть σ_n есть произвольная монотонно убывающая к нулю числовая последовательность. Тогда:

1) *для любого иррационального h существует непрерывная функция f с нулевым средним, для которой в заданной точке x_0 выполнено неравенство $f(n, x_0, h) \geqslant n\sigma_n$*;

2) *для любой непрерывной функции f с нулевым средним, не являющейся тригонометрическим полиномом, существуют иррациональные h, при которых некоторая подпоследовательность максимумов сумм Биркгофа $\Phi(n_k, h; f)$ растет так, что $\Phi(n_k, h; f) \geqslant n_k\sigma_{n_k}$.*

Утверждение 1) обобщает результат из примера Пуанкаре, так как показывает, что рост сумм Биркгофа возможен не только при $h = \sqrt{2}$, но и при любом иррациональном h. Кроме того, это утверждение описывает возможную скорость роста, т.е. несколько усиливает результат Пуанкаре.

Утверждение 2) уточняет возможное поведение сумм Биркгофа: согласно свойству возвращаемости при гладких f при любом иррациональном h существует такая подпоследовательность m_k, что $f(m_k, x, h) \to 0$, но при этом существуют h, для которых у некоторой другой подпоследовательности n_k имеется рост с заданной скоростью.

Поведение сумм Биркгофа над поворотом окружности тесно связано с динамикой цилиндрических отображений, и в § 2 дан обзор известных результатов, описывающих динамические свойства цилиндрических отображений и приведены подготовительные утверждения.

В теории динамических систем естественно возникают операторы сдвига и операторы взвешенного сдвига, порожденные динамическими системами. В качестве приложения в последующих параграфах показано, что резольвенты операторов взвешенного сдвига, порожденных иррациональными поворотами, могут расти сколь угодно быстро при приближении спектрального параметра к спектру, что является показателем сложной структуры таких операторов. Заметим, что вопрос о возможной скорости роста резольвенты операторов взвешенного сдвига явился одной из мотиваций для настоящей работы.

§ 2. Цилиндрические каскады

Различные варианты поведения сумм Биркгофа наглядно иллюстрируются на примере динамики цилиндрического отображения.

Пусть $\alpha\colon X \to X$ – непрерывное обратимое отображение, $Y = X \times \mathbb{R}$ и f – вещественнозначная непрерывная функция на X. Отображение $\beta\colon Y \to Y$, действующее по формуле

$$\beta(x,t) = (\alpha(x), t + f(x)),$$

задает расширение исходной динамической системы (так называемое *косое произведение*). Итерации этого отображения описываются с помощью биркгофовых сумм:

$$\beta^n(x,t) = (\alpha^n(x), t + f(n,x,\alpha)).$$

В частности, если $X = \mathbb{T}$ и α_h – поворот окружности, то $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ есть цилиндр, а отображение

$$\beta(x,t) = \beta_{h,f}(x,t) = (x+h, t+f(x)) \tag{2.1}$$

называют *цилиндрическим отображением* или, следуя Д. В. Аносову (см. [10]), *цилиндрическим каскадом*. Его итерации имеют вид

$$\beta^n(x,t) = (x+nh, t+f(n,x,h)).$$

Таким образом, динамические свойства цилиндрических каскадов тесно связаны с поведением сумм Биркгофа $f(n,x,h)$.

Цилиндр гомеоморфен плоскости с выколотой точкой, и цилиндрические отображения можно рассматривать как отображения плоскости. Цилиндрические каскады могут иметь, в зависимости от вида f и h, весьма сложные динамические свойства, на что обратил внимание еще А. Пуанкаре в [3], рассматривая их в качестве нетривиальных примеров отображений плоскости. В дальнейшем описанию динамических свойств цилиндрических каскадов были посвящены работы ряда авторов. Основной интерес представляет случай, когда функция f имеет нулевое среднее, так как в противном случае все орбиты стремятся к бесконечности.

Наиболее простую динамику цилиндрический каскад имеет в случае, когда f является кограницей над α_h.

Функция f называется *кограницей* над α_h, если *когомологическое уравнение*

$$u(x+h) - u(x) = f(x) \tag{2.2}$$

имеет непрерывное решение u. В этом случае суммы Биркгофа задаются формулой

$$f(n,x,h) = u(x+nh) - u(x),$$

они ограничены в совокупности, каждая траектория цилиндрического каскада ограничена, причем орбита произвольной точки (x_0, t_0) содержится и всюду плотна в замкнутой инвариантной кривой

$$\bigl\{(x,t)\colon t = t_0 + u(x) - u(x_0),\ x \in \mathbb{T}\bigr\}. \tag{2.3}$$

При этом цилиндр $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$ расслаивается на такие кривые, а цилиндрическое отображение эквивалентно повороту цилиндра вокруг оси. Сопрягающее отображение

$$\psi\colon (\mathbb{T}\times\mathbb{R}) \to (\mathbb{T}\times\mathbb{R}), \qquad \psi(x,t) = (x, t - u(x) + \mathrm{const}) \tag{2.4}$$

задается так, что на каждой образующей цилиндра начало отсчета сдвигается в точку пересечения с некоторой фиксированной инвариантной кривой вида (2.3). В этом случае говорят, что цилиндрическое отображение является интегрируемым.

В [5] показано, что исследование некоторых гамильтоновых систем сводится к анализу когомологического уравнения (2.2), разрешимость которого приводит к появлению дополнительных интегралов для исходной системы.

Заметим, что в случае разрешимости когомологического уравнения имеет место свойство синхронной возвращаемости: если дробные части чисел $n_k h$ стремятся к нулю, то $\max_x |f(n_k, x, h)| \to 0$.

Особые свойства операторов взвешенного сдвига в случае разрешимости соответствующего когомологического уравнения описаны ниже в § 5.

Когомологическое уравнение широко использовали А. Пуанкаре (см. [3]) и другие авторы при решении задач, связанных, например, с небесной механикой. Среди более поздних работ укажем, например, [10]–[14].

Заметим, что для кограниц равенство (1.4) выполняется автоматически, однако оно не достаточно для разрешимости уравнения (2.2).

Множество кограниц есть незамкнутое векторное подпространство, существенно зависящее от числа h и не имеющее явного описания. В целом уравнение (2.2) имеет сложную картину разрешимости.

С одной стороны, тригонометрический многочлен с нулевым средним является "идеальной" кограницей: при любом иррациональном h уравнение (2.2) для него имеет решение в классе тригонометрических многочленов.

С другой стороны, в общем случае решение когомологического уравнения может оказаться измеримой неограниченной функцией или вообще может не существовать измеримых решений (см. [10], [12]). Более того, например, для функции

$$f(x) = \sum_{|k|\geqslant 2} \frac{1}{2ik\sqrt{\ln|k|}}\, e^{i2\pi kx}$$

когомологическое уравнение не имеет решения ни при каком иррациональном h (см. [15], [5]).

Еще Д. Гильберт при постановке пятой проблемы привел это уравнение в качестве примера, когда при гладкой, и даже аналитической функции f решение может не быть дифференцируемым.

Сложности при решении (2.2) связаны с появлением так называемых малых знаменателей (см. [11]). Рассмотрим ряд Фурье функции, удовлетворяющей (1.4):

$$f(x) \sim \sum_{k \neq 0} C_k e^{i2\pi kx}.$$

При иррациональном h формальным решением когомологического уравнения является ряд

$$u(x) \sim -\sum_{k \neq 0} \frac{C_k}{1 - e^{i2\pi kh}} \, e^{i2\pi kx}. \tag{2.5}$$

Здесь числа $1 - e^{i2\pi kh}$, стоящие в знаменателях, отличны от нуля, но некоторые из них могут быть весьма малыми, за счет чего соответствующие коэффициенты ряда (2.5) могут быть существенно бóльшими, чем C_k. В частности, может оказаться, что коэффициенты $C_k/(1 - e^{i2\pi kh})$ не стремятся к нулю, и тогда (2.5) не может быть рядом Фурье интегрируемой функции.

При достаточно гладкой функции f имеются оценки ее коэффициентов Фурье, что позволяет доказать разрешимость уравнения (2.2) при почти всех h.

Типичный результат в этом направлении, приведенный в [5], формулируется следующим образом.

Пусть $\mathbf{K}_2$ есть множество чисел h, которые медленно приближаются рациональными в следующем смысле: для любой рациональной дроби m/n при достаточно больших n выполнено неравенство

$$\left| h - \frac{m}{n} \right| \geqslant \frac{C}{n^{5/2}}.$$

Если $f \in C^2(\mathbb{T})$, то при любом $h \in \mathbf{K}_2$ когомологическое уравнение имеет непрерывное решение и при этом множество $\mathbf{K}_2$ имеет меру 1.

Похожие условия и соображения о малых знаменателях использовал А. Н. Колмогоров в [16] при доказательстве приводимости к линейному гладкого потока с интегральным инвариантом на двумерном торе в типичном случае.

В [14] в терминах коэффициентов Фурье описан более широкий класс функций, для каждой из которых множество h, при которых когомологическое уравнение имеет непрерывное решение, также имеет меру 1. Здесь снижение требования к гладкости f компенсируется сужением множества тех h, для которых доказывается разрешимость уравнения, но это множество все равно имеет полную меру Лебега.

Таким образом, при достаточно гладких f и почти всех (в смысле лебеговской меры) h когомологическое уравнение имеет непрерывное решение, и для таких пар f и h последовательность сумм Биркгофа ограничена.

Вместе с тем заметим, что гладкость функции f и медленное приближение числа h рациональными не являются необходимыми условиями того, чтобы f было кограницей. Это связано с тем, что для сходимости ряда (2.5) необходимо быстрое стремление к нулю не всех коэффициентов Фурье функции f, а только с теми номерами k, при которых знаменатели $1 - e^{i2\pi kh}$ являются малыми.

В случае неразрешимости когомологического уравнения поведение сумм Биркгофа (и траекторий цилиндрического каскада) может быть более сложным и разнообразным.

Л. Г. Шнирельман в [17] (1930 г.) и А. С. Безикович в [18] (1937 г.) построили топологически транзитивные цилиндрические каскады, т.е. каскады, имеющие всюду плотные (транзитивные) орбиты. Транзитивная орбита не ограничена, неограниченность последовательности $\Phi(n, h; f)$ из максимумов сумм Биркгофа является необходимым условием существования транзитивных орбит. С другой стороны, транзитивная орбита обладает свойством возвращаемости, т.е. если точка x имеет транзитивную орбиту, то существует последовательность номеров n_k, для которой $x + n_k h \to x$ и $f(n_k, x, h) \to 0$.

Заметим, что в то время не было известно, каким может быть множество транзитивных орбит, в частности – могут ли все орбиты быть транзитивными. Позднее было установлено (см., например, [10]), что возможны ситуации, когда множество точек окружности $\mathbb{T} \times \{0\}$ с транзитивными орбитами имеет меру нуль или наоборот, полную меру.

В 1955 г. У. Готтшалк и Г. Хедлунд (см. [19]) доказали альтернативу для непрерывной функции f с нулевым средним: если h иррационально, то либо цилиндрический касад (2.1) топологически транзитивен, либо f является когранicей над α_h в классе непрерывных функций.

В 1951 г. А. С. Безикович (см. [20]) обнаружил, что цилиндрический каскад обязательно имеет нетранзитивные орбиты. Кроме того, в этой работе он обобщил пример с убегающей в бесконечность орбитой, фактически построенный А. Пуанкаре в [4], и доказал существование топологически транзитивного каскада, имеющего дискретные орбиты (которые являются минимальными множествами), для любого иррационального поворота окружности. Заметим, что точка (x, t) имеет дискретную орбиту тогда и только тогда, когда суммы Биркгофа для этой точки удовлетворяют условию

$$\lim_{|n| \to \infty} f(n, x, h) = \infty.$$

Множество точек окружности $\mathbb{T} \times \{0\}$, имеющих дискретные орбиты, имеет нулевую меру Лебега, однако это множество для цилиндрических каскадов может быть, в определенном смысле, массивным, в частности, иметь положительную и даже равную единице размерность Хаусдорфа (см., например, [21], [22]).

Поведение сумм Биркгофа зависит от поведения приближений h рациональными числами. Напомним некоторые факты из теории цепных дробей (см. [23]).

Всякое иррациональное число $h \in (0, 1)$ можно разложить в бесконечную *цепную дробь*

$$h = \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots}},$$

где $k_1, k_2, \ldots$ – натуральные числа, которые называются *неполными частными*. Коротко это записывается в виде $h = [k_1, \ldots, k_s, \ldots]$. Несократимая дробь p_s/q_s, которая находится как конечная цепная дробь

$$\frac{p_s}{q_s} = [k_1, \ldots, k_s],$$

называется s-й *подходящей к* h *дробью.* Подходящие дроби определяются рекуррентно:

$$p_{s+1}=k_{s+1}p_s+p_{s-1},\qquad s\geqslant 1,\qquad p_{-1}=1,\qquad p_0=1,$$
$$q_{s+1}=k_{s+1}q_s+q_{s-1},\qquad s\geqslant 1,\qquad q_{-1}=0,\qquad q_0=1.$$

Если положить $\delta_s=|h-p_s/q_s|$, то

$$h=\frac{p_s}{q_s}+(-1)^s\delta_s,\qquad \frac{1}{2q_{s+1}q_s}<\delta_s<\frac{1}{q_{s+1}q_s}.$$

Подходящие дроби обладают свойством наилучшего приближения числа h: любая другая дробь со знаменателем, не превосходящим q_s, отличается от h больше, чем на δ_s. Скорость аппроксимации зависит от скорости роста последовательности знаменателей подходящих дробей.

Если функция f имеет на $\mathbb{T}$ ограниченную вариацию (и может при этом даже быть разрывной), p_s/q_s – подходящая к h дробь, то для любых $x,y\in\mathbb{T}$

$$|f(q_s,x,h)-f(q_s,y,h)|\leqslant \operatorname{Var} f. \tag{2.6}$$

Поскольку $f(q_s,x,h)$ имеет нулевое среднее, то подпоследовательность функций $|f(q_s,x,h)|$ равномерно ограничена числом $\operatorname{Var} f$. Тем самым при действии β имеет место возвращаемость образов окружности $\mathbb{T}\times\{0\}$ в окрестность радиуса $\operatorname{Var} f$ этой же окружности.

Как отмечено в § 1, для гладких функций наблюдается более сильная синхронная возвращаемость орбит в любую окрестность начальной точки (см. [6]–[8]). Точнее, имеется равномерная сходимость к нулю подпоследовательности $f(q_s,x,h)$, где q_s – последовательность знаменателей подходящих к h дробей.

При любом иррациональном h аналогичная (2.6) оценка выполнена не только для знаменателей подходящих дробей. Это было показано в работе [24] при доказательстве отсутствия перемешивания в гладком потоке на двумерном торе. А именно, если для q существует несократимая дробь p/q, удовлетворяющая условию $|h-p/q|<1/q^2$, то справедливо неравенство

$$|f(q,x,h)-f(q,y,h)|\leqslant 3\operatorname{Var} f.$$

Как отметил рецензент, это неравенство может быть получено из известного неравенства Коксмы, но приведенное в [24] доказательство более прямое и наглядное.

Таким образом, бесконечный рост последовательности $\max_x f(n,x,h)$ возможен только для f с бесконечной вариацией, а для гладких f в принципе возможен рост только для некоторых подпоследовательностей n_k, отделенных в некотором смысле от последовательности q_s знаменателей подходящих дробей.

Стремление к бесконечности некоторой подпоследовательности $\Phi(n_k,h;f)$ означает растяжение по вертикали графиков биркгофовых сумм $f(n_k,x,h)$. А появление дискретных орбит, т.е. убегание заданной точки в бесконечность, может иметь место только при более сильном условии – росте значений всех биркгофовых сумм в фиксированной точке.

Построения, приводящие к сформулированным во введении утверждениям, основаны на следующих соображениях. Если f – периодическая функция с периодом $1/N$, то при рациональных сдвигах m/N суммы Биркгофа возрастают линейно: $f(n, x, m/N) = nf(x)$. При этом если число m/N хорошо аппроксимирует иррациональное h, в частности является подходящей дробью для h, то в некотором диапазоне значений n аналогичный почти линейный рост имеют суммы Биркгофа $f(n, x, h)$. При доказательстве утверждения 1) это позволяет при заданном иррациональном h построить функцию f с быстро растягивающимися биркгофовыми суммами в виде суммы ряда с гладкими или липшицевыми слагаемыми f_k, каждое из которых инвариантно относительно сдвига на соответствующую подходящую к h дробь. Каждое слагаемое обеспечивает рост биркгофовых сумм на определенном промежутке значений n, и эти слагаемые удается построить так, что к моменту, когда прекращается рост биркгофовых сумм одного слагаемого, на смену подрастают суммы следующего слагаемого. В результате получаем рост последовательности амплитуд сумм Биркгофа, причем этот рост может быть сколь угодно быстрым. Построенные таким образом функции f не могут быть гладкими, но могут удовлетворять условию Гёльдера и даже быть в определенном смысле почти липшицевыми (см. [25]).

Построение функций, "резонирующих" с отображением, за счет чего возникает рост амплитуды биркгофовых сумм, используется и в других конструкциях. Например, аналогично строятся перемешивающие специальные потоки над эргодическими автоморфизмами довольно общего вида (см. [26]).

При доказательсте утверждения 2) разложение в ряд Фурье заданной функции f позволяет построить такую возрастающую последовательность N_k, что суммы Биркгофа линейно возрастают при рациональных сдвигах вида m_k/N_k. Поэтому при иррациональных h, которые хорошо приближаются рациональными вида m_k/N_k, гарантируется рост амплитуд биркгофовых сумм для f на некотором промежутке значений n, растущем с ростом k. В отличие от первого случая, для гладкой функции f в силу синхроннной возвращаемости среди значений n, при которых суммы $f(n, x, h)$ перестают быть близкими к $f(n, x, m_k/N_k)$, имеются такие n, что суммы $f(n, x, h)$ оказываются малыми и суммы $f(n, x, m_{k+1}/N_{k+1})$ также малы. Но для еще больших значений n рост сумм $f(n, x, m_{k+1}/N_{k+1})$ оказывается существенным и приводит к большим значениям величины $\max_x f(n, x, h)$ для некоторых n. С ростом n суммы $f(n, x, h)$ перестают быть близкими к $f(n, x, m_{k+1}/N_{k+1})$ и появляются такие n, что суммы $f(n, x, h)$ оказываются малыми. Но при дальнейшем росте n начинает влиять рост сумм $f(n, x, m_{k+2}/N_{k+2})$ и т.д.

В результате для иррациональных чисел h, которые достаточно хорошо приближаются рациональными вида m_k/N_k, имеется рост некоторой подпоследовательности $\max_x f(n_k, x, h)$.

§ 3. О росте значений сумм Биркгофа при заданном повороте

Теорема 1. *Для любого иррационального числа h и любой строго убывающей бесконечно малой последовательности $\{\sigma_n : \sigma_1 < 1\}$ найдется непрерывная* *на $\mathbb{T}$ функция f с единичной нормой и нулевым средним такая, что при $x = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется оценка снизу для сумм Биркгофа*:

$$f(n, 0, h) \geqslant n\sigma_n.$$

Доказательство. Пусть h – иррациональное число, p_k/q_k – последовательность подходящих к h дробей. Обозначим $\delta_k = |h - p_k/q_k|$. Напомним, что (см. [23])

$$\frac{1}{2q_k q_{k+1}} < \delta_k < \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

Сначала для каждой подходящей дроби p_k/q_k построим функцию f_k, обладающую свойствами:

i) для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $f_k(n, 0, h) \geqslant 0$;

ii) для любого $n \in [1, q_{k+1}/2]$ справедливо равенство $f_k(n, 0, h) = n$;

iii) $f_k \in C(\mathbb{T})$, $\|f_k\|_C = 1$;

iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} f_k(x)\, dx = 0$.

Покажем, что указанными свойствами обладают функции

$$f_k(x) = F_k(x + h) - F_k(x),$$

где $F_k(x)$ есть функция с периодом $1/q_k$ такая, что

$$F_k(x) = \frac{1}{\delta_k}|x| \quad \text{при} \quad x \in \left[-\frac{1}{2q_k}, \frac{1}{2q_k}\right].$$

Функция $F_k(x)$ может быть задана равносильным выражением

$$F_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta_k}x, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2q_k}\right], \\ \dfrac{1}{\delta_k}\left(\dfrac{1}{q_k} - x\right), & x \in \left[\dfrac{1}{2q_k}, \dfrac{1}{q_k}\right], \end{cases}$$

или

$$F_k(x) = \frac{1}{\delta_k}\left(\frac{1}{2q_k} - \left|x - \frac{1}{2q_k}\right|\right), \qquad x \in \left[0, \frac{1}{q_k}\right].$$

Так как

$$h = \frac{p_k}{q_k} + (-1)^k \delta_k,$$

то в силу периодичности с периодом $1/q_k$ функции F_k получаем, что

$$f_k(x) = F_k(x + h) - F_k(x) = F_k(x + (-1)^k \delta_k) - F_k(x).$$

Функция f_k непрерывна, периодическая с периодом $1/q_k$ и имеет нулевое среднее.

При четном k она задается формулой

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2q_k} - \delta_k\right], \\ -\dfrac{2}{\delta_k}\left(x - \dfrac{1}{2q_k}\right) - 1, & x \in \left[\dfrac{1}{2q_k} - \delta_k, \dfrac{1}{2q_k}\right], \\ -f_k\left(x - \dfrac{1}{2q_k}\right), & x \in \left[\dfrac{1}{2q_k}, \dfrac{1}{q_k}\right]. \end{cases}$$

(Чтобы в этом убедиться, достаточно, например, проверить значения в точках излома.) При нечетном k график симметричен приведенному относительно прямой $x = 0$. В обоих случаях $\|f_k\|_C = 1$.

Нетрудно видеть, что биркгофовы суммы, соответствующие заданному h, для этих функций вычисляются по формуле

$$f_k(n, x, h) = F_k(x + nh) - F_k(x) = F_k(x + (-1)^k n\delta_k) - F_k(x).$$

Поскольку $F_k(0) = 0$ – наименьшее значение функции F_k, из последнего равенства следует выполнение неравенства $f_k(n, 0, h) \geqslant 0$ при всех n.

Если $0 \leqslant n \leqslant q_{k+1}/2$, то

$$0 \leqslant n\delta_k < \frac{q_{k+1}}{2} \frac{1}{q_k q_{k+1}} = \frac{1}{2q_k},$$

откуда следует равенство

$$f_k(n, 0, h) = F_k(0 + (-1)^k n\delta_k) = \frac{1}{\delta_k} n\delta_k = n.$$

Зададим числовой ряд с убывающими положительными членами и единичной суммой

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = 1. \tag{3.1}$$

Пусть теперь задана убывающая бесконечно малая последовательность $\{\sigma_n\}$. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma_1 < a_1$.

Поскольку $a_j > 0$ и $\sigma_n \to 0$, для каждого j существует номер n_j такой, что для любого $n \geqslant n_j$ выполняется неравенство $\sigma_n < a_j$. Без ограничения общности можем считать, что $n_1 = 1$ и последовательность номеров $\{n_j\}$ строго возрастает. Заметим, что если последовательность σ_n убывает медленно, то последовательность номеров $\{n_j\}$ быстро возрастает.

Теперь зададим строго возрастающую последовательность номеров $\{k_j\}$ так, что

$$q_{k_j+1} > 2n_{j+1},$$

и положим

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_{k_j}(x).$$

Этот ряд равномерно сходится, поэтому функция f непрерывна, причем $\|f\| = 1$. Во-первых, поскольку $f_k(0) = 1$ при любом k, то в силу (3.1) $f(0) = 1$, значит, $\|f\| \geqslant 1$. С другой стороны, из (3.1) и равенства $\|f_{k_j}\| = 1$ следует неравенство $\|f\| \leqslant 1$.

Возьмем теперь произвольный номер n и выберем такое m, что $n_m \leqslant n < n_{m+1}$. Так как $n < n_{m+1} < q_{k_m+1}/2$, то по построению $f_{k_m}(n, 0, h) = n$. Учитывая, что $f_k(n, 0, h) \geqslant 0$ при всех k и n, получаем

$$f(n, 0, h) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_{k_j}(n, x, h) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_{k_j}(n, 0, h) > n a_m.$$

С другой стороны, так как $n \geqslant n_m$, то выполнено $a_m > \sigma_n$, и получаем требуемое
$$f(n, 0, h) > n\sigma_n.$$
Теорема 1 доказана.

Для цилиндрического каскада, построенного по h и функции f, из последнего неравенства следует, что траектория точки $(0; 0)$ убегает в бесконечность быстрее, чем $n\sigma_n$.

Замечание 1. Построенная функция существенно связана со знаменателями подходящих к h дробей, числители которых удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и знаменатели. Поэтому попытка построить для данной функции другие углы поворота, при которых быстро растут значения сумм Биркгофа, например изменяя числители дробей, наталкивается на довольно жесткие ограничения. Слагаемые, являющиеся кограницами для заданного h, могут не быть таковыми для других углов, поэтому трудно проконтролировать их биркгофовы суммы с большими номерами.

Замечание 2. Если в заключении теоремы убрать для функции f требование единичной нормы, то, соответственно, можно снять и условие $\sigma_1 < 1$. Действительно, можно умножить полученную выше функцию на подходящее число.

§ 4. О росте максимумов сумм Биркгофа для заданной функции

Следующая теорема содержит некоторое усиление результата, полученного в [27].

Теорема 2. *Пусть непрерывная на $\mathbb{T}$ функция f с нулевым средним не является тригонометрическим многочленом. Тогда для любой убывающей бесконечно малой последовательности σ_n существует континуум иррациональных h, при которых для некоторой подпоследовательности n_k, общей для всех h, имеет место оценка*
$$\max_x f(n_k, x, h) \geqslant n_k \sigma_{n_k}.$$

Прежде чем строить требуемые h, рассмотрим свойства сумм Биркгофа для рационального поворота.

Пусть f – непрерывная на $\mathbb{T}$ функция с нулевым средним, $h = m/N$, где m/N – несократимая дробь. Положим
$$L(f, h) = \frac{1}{N} \max_x f(N, x, h) = \frac{1}{N} \Phi(N, h; f). \tag{4.1}$$

Лемма 1. *Пусть $h = m/N$ – несократимая дробь. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Сумма Биркгофа $f(N, x, h)$ имеет период $1/N$ по x.*

2. *Величина $L(f, h)$ зависит только от знаменателя несократимой дроби $h = m/N$:*
$$L\left(f, \frac{m}{N}\right) = L\left(f, \frac{1}{N}\right).$$

3. *Для любого натурального N выполнено неравенство $L(f,1/N)\geqslant 0$. Кроме того,*

$$\lim_{N\to\infty} L\left(f,\frac{1}{N}\right)=0. \tag{4.2}$$

4. *Если $s\in\mathbb{N}$, то*

$$f(sN,x,h)=sf(N,x,h),$$
$$\Phi(sN,h;f)=sNL(f,h).$$

5. *Если $n=sN+j$, где $s,j\in\mathbb{N}$, $0\leqslant j<N$, то*

$$nL(f,h)\leqslant\Phi(n,h;f)\leqslant nL(f,h)+\min(j,2(N-j))\|f\|. \tag{4.3}$$

Доказательство. 1, 2. В силу взаимной простоты чисел m и N имеем равенство

$$f\left(N,x,\frac{m}{N}\right)=f(x)+f\left(x+\frac{m}{N}\right)+f\left(x+2\frac{m}{N}\right)+\dots+f\left(x+(n-1)\frac{m}{N}\right)$$
$$=f(x)+f\left(x+\frac{1}{N}\right)+f\left(x+\frac{2}{N}\right)+\dots+f\left(x+\frac{n-1}{N}\right)=f\left(N,x,\frac{1}{N}\right),$$

из которого следует периодичность $f(N,x,h)$, равенство

$$\Phi\left(N,\frac{m}{N};f\right)=\Phi\left(N,\frac{1}{N};f\right)$$

и, как следствие, равенство

$$L\left(f,\frac{m}{N}\right)=L\left(f,\frac{1}{N}\right).$$

3. Биркгофова сумма $f(N,x,h)$ имеет нулевое среднее, поэтому ее максимум неотрицателен. Этот максимум достигается в некоторой точке x_0, и число

$$L\left(f,\frac{1}{N}\right)=\frac{1}{N}\left(f(x_0)+f\left(x_0+\frac{1}{N}\right)+f\left(x_0+\frac{2}{N}\right)+\dots+f\left(x_0+\frac{n-1}{N}\right)\right)$$

является интегральной суммой для функции $f(x)$, поэтому

$$\lim_{N\to\infty} L\left(f,\frac{1}{N}\right)=\int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx=0.$$

4. Так как поворот окружности на угол $2\pi h$ имеет период N, то

$$f(sN,x,h)=f(N,x,h)+f((s-1)N,x+Nh,h)=f(N,x,h)+f((s-1)N,x,h),$$

откуда по индукции получаем первое из равенств. Второе следует из первого и определения $L(f,h)$.

5. Сначала для произвольного натурального n приведем доказательство оценки снизу

$$nL(f,h)\leqslant\Phi(n,h;f). \tag{4.4}$$

Действительно, сумма Биркгофа $f(N,x,h)$ имеет период $1/N$ по x, поэтому ее максимум достигается в точках вида $x'+k/N$, $k=0,\dots,N-1$, откуда

$$L(f,h)=\frac{1}{N}\max_x f(N,x,h)=f\left(x'+\frac{k}{N}\right).$$

Найдем среднее значение суммы Биркгофа $f(n,x,h)$ по множеству всех точек вида $x'+k/N$, $k=0,\dots,N-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(n,x'+\frac{k}{N},h\right)&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{n-1} f\left(x'+\frac{k}{N}+\frac{lm}{N}\right)\\ &=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(x'+\frac{lm}{N}+\frac{k}{N}\right)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{n-1} f\left(N,x'+\frac{lm}{N},\frac{1}{N}\right)\\ &=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{N}f(N,x',h)=nL(f,h).\end{aligned}$$

Поэтому среди точек вида $x'+k/N$ найдется точка x'', для которой

$$f(n,x'',h)\geqslant nL(f,h),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

Для получения оценки сверху запишем n в виде $n=sN+j$. Тогда

$$f(n,x,h)=sf(N,x,h)+f(j,x,h)\leqslant\frac{n}{N}f(N,x,h)+j\|f\|.$$

Положив $n=(s+1)N-(N-j)$, можно получить другую оценку:

$$\begin{aligned}f(n,x,h)&=(s+1)f(N,x,h)-\sum_{k=j+1}^{N-1} f(x+kh)\\ &=\frac{n}{N}f(N,x,h)+\frac{N-j}{N}f(N,x,h)-\sum_{k=j+1}^{N-1} f(x+kh)\\ &=\frac{n}{N}f(N,x,h)+\sum_{k=j+1}^{N-1}\left(\frac{f(N,x,h)}{N}-f(x+kh)\right)\\ &\leqslant nL(f,h)+2(N-j)\|f\|.\end{aligned}$$

Объединяя две последние оценки, получаем (4.3).

Лемма 1 доказана.

Принципиальное отличие случаев иррационального и рационального поворотов заключается в том, что при иррациональных h суммы Биркгофа растут медленнее чем n, а при рациональном $h=m/N$ происходит пропорциональное растяжение сумм Биркгофа с номерами, кратными N,

$$f(kN,x,h)=kf(N,x,h).$$

Но линейный по n рост имеем только в случае, когда $f(N,x,m/N)$ – ненулевая функция (что равносильно $L(f,1/N)\neq 0$).

Лемма 2. *Множество*

$$\mathcal{N}_f = \{N \colon L(f, 1/N) \neq 0\}$$

состоит из номеров отличных от нуля коэффициентов Фурье функции f и их делителей.

Доказательство. Из $L(f, 1/N) = 0$ следует, что $f(N, x, 1/N) = 0$ для всех x, а это возможно только тогда, когда все коэффициенты Фурье функции f с номерами, кратными N, равны нулю. Действительно

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 f\left(N, x, \frac{1}{N}\right) e^{-i2\pi sNx}\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 f\left(x + \frac{k}{N}\right) e^{-i2\pi sNx}\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi sN(x-k/N)}\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi sNx} e^{i2\pi(sNk)/N}\,dx \\ &= N \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi sNx}\,dx. \end{aligned}$$

Поэтому, если коэффициент Фурье $\widehat{f}_{sN} \neq 0$, то $L(f, 1/N) \neq 0$ и $L(f, 1/s) \neq 0$. Лемма доказана.

Таким образом, если функция f с нулевым средним не является тригонометрическим полиномом, то множество $\mathcal{N}_f$ бесконечно.

Это обстоятельство дает возможность для заданной функции построить искомое иррациональное число h в виде предела последовательности рациональных чисел, у которых знаменатели принадлежат $\mathcal{N}_f$.

Доказательство теоремы 2. Для краткости (вместо $\Phi(n, h; f)$) будем обозначать

$$\Phi(n, h) = \max_x \sum_{j=0}^{n-1} f(x + jh).$$

Согласно лемме 2 для функции f множество $\mathcal{N}_f$, состоящее из натуральных N, при которых $L(f, 1/N) > 0$, состоит из номеров ненулевых коэффициентов Фурье функции f и их делителей, тем самым оно бесконечно.

Пусть фиксирована убывающая бесконечно малая последовательность σ_n.

Будем строить множество искомых h в виде множества типа Кантора. Каждое из этих h является пределом последовательности несократимых рациональных дробей, причем для всех h последовательность знаменателей $N_1, N_2, \ldots$ этих дробей будет одной и той же и состоять из некоторой последовательности чисел, входящих в $\mathcal{N}_f$.

Выберем $N_1 \in \mathcal{N}_f$, тогда согласно (4.3) имеем

$$\Phi\left(n, \frac{1}{N_1}\right) \geqslant nL\left(f, \frac{1}{N_1}\right).$$

Рассмотрим неравенство относительно n:

$$\frac{1}{n}\Phi\left(n, \frac{1}{N_1}\right) \geqslant 2\sigma_n.$$

Так как правая часть стремится к нулю, а левая часть ограничена снизу положительной постоянной $L(f, 1/N_1)$, то существует n_1, при котором

$$\Phi\left(n_1, \frac{1}{N_1}\right) \geqslant 2n_1\sigma_{n_1}.$$

Аналогичное неравенство выполнено для всех m_1, взаимно простых с N_1:

$$\Phi\left(n_1, \frac{m_1}{N_1}\right) \geqslant 2n_1\sigma_{n_1}. \tag{4.5}$$

Пусть

$$W(\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$$

– модуль непрерывности функции f. Так как для любых h и ρ при $0 \leqslant j < n$ выполнено $|jh - j\rho| \leqslant n|h - \rho|$, получаем оценку разности сумм Биркгофа при произвольных h и ρ:

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} f(x + jh) - \sum_{j=0}^{n-1} f(x + j\rho)\right| \leqslant nW(n|h - \rho|).$$

Выберем число $\delta_1 > 0$ так, что

$$W(\delta_1) \leqslant \frac{\sigma_{n_1}}{n_1}.$$

Тогда, если для числа h при некотором m_1 выполнено неравенство

$$\left|h - \frac{m_1}{N_1}\right| \leqslant \frac{\delta_1}{n_1},$$

то оценка разности сумм Биркгофа имеет вид

$$\left|\sum_{j=0}^{n_1-1} f(x + jh) - \sum_{j=0}^{n_1-1} f\left(x + j\frac{m_1}{N_1}\right)\right| \leqslant n_1\sigma_{n_1}. \tag{4.6}$$

Пусть H_1 есть объединение отрезков вида $[m_1/N_1 - \delta_1/n_1, m_1/N_1 + \delta_1/n_1]$, где $1 \leqslant m_1 < N_1$ и целые m_1 являются взаимно простыми с N_1. Тогда для всех $h \in H_1$, учитывая (4.5) и (4.6), получаем оценку снизу

$$\Phi(n_1, h) \geqslant \Phi\left(n_1, \frac{m_1}{N_1}\right) - n_1\sigma_{n_1} \geqslant n_1\sigma_{n_1}.$$

Наложим на δ_1 дополнительное ограничение $\delta_1/n_1 < 1/N_1^2$, гарантирующее отсутствие в множестве H_1 несократимых дробей со знаменателем, меньшим N_1. Оно же гарантирует, что отрезки, составляющие H_1, попарно не пересекаются.

Далее выбираем число $N_2 > N_1$ так, что $L(f, 1/N_2) > 0$. При этом можем взять N_2 настолько большим, что на каждом из отрезков, составляющих множество H_1, имеется по крайней мере четыре несократимых дроби вида m_2/N_2 (две потом, может быть, выбросим из-за близости к краю отрезка). Эти точки будут центрами отрезков следующего ранга и одновременно следующими рациональными приближениями искомых h.

При выборе N_2 возможны два случая. Если множество $\mathcal{N}_f$ содержит бесконечное количество простых чисел, то в качестве N_2 можем взять простое число, и тогда утверждение очевидно. Если множество $\mathcal{N}_f$ содержит только конечное количество простых чисел $p_1, \dots, p_r$, то каждое $N \in \mathcal{N}_f$ представляется в виде $N = p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \cdots p_r^{\nu_r}$, и в качестве N_2 можем взять наибольший из сомножителей вида $p_k^{\nu_k}$, входящих в разложение N; он будет больше, чем $N^{1/r}$. Тогда взаимно простыми с N_2 не будут только числа, кратные p_k, откуда следует существование требуемых m_2: из двух последовательных чисел по крайней мере одно взаимно просто с N_2.

Аналогично первому шагу существует такое n_2, что для указанных m_2 выполнено неравенство

$$\frac{1}{n_2}\Phi\left(n_2, \frac{m_2}{N_2}\right) = \frac{1}{n_2}\Phi\left(n_2, \frac{1}{N_2}\right) \geqslant 2\sigma_{n_2}. \tag{4.7}$$

Выберем число $\delta_2 > 0$ так, что

$$W(\delta_2) \leqslant \frac{\sigma_{n_2}}{n_2}, \qquad \delta_2 < \frac{1}{N_2^2}.$$

Тогда если для некоторого m_2 выполнено неравенство

$$\left| h - \frac{m_2}{N_2} \right| \leqslant \frac{\delta_2}{n_2},$$

то согласно (4.7)

$$\Phi(n_2, h) \geqslant \Phi\left(n_2, \frac{m_2}{N_2}\right) - n_2\sigma_{n_2} \geqslant n_2\sigma_{n_2}.$$

Внутри каждого из отрезков вида $[m_1/N_1 - \delta_1/n_1,\ m_1/N_1 + \delta_1/n_1]$, составляющих множество H_1, имеется по крайней мере два отрезка вида $[m_2/N_2 - \delta_2/n_2,\ m_2/N_2 + \delta_2/n_2]$, где m_2 взаимно просто с N_2. Обозначим через H_2 множество, состоящее из всех таких отрезков, целиком лежащих в H_1. Тогда $H_2 \subset H_1$ и для всех $h \in H_2$ выполнено

$$\Phi(n_1, h) \geqslant n_1\sigma_{n_1}, \qquad \Phi(n_2, h) \geqslant n_2\sigma_{n_2}.$$

Продолжая процесс, получаем последовательности натуральных чисел N_k и n_k и убывающую последовательность множеств $H_k \subset [0,1]$ со следующими свойствами:

1) каждое множество H_k состоит из конечного числа непересекающихся отрезков;

2) каждый отрезок из числа составляющих множество H_{k-1} содержит не менее двух отрезков, входящих в H_k;

3) для всех $h \in H_k$ и $i \leqslant k$ имеет место оценка снизу

$$\Phi(n_i, h) \geqslant n_i\sigma_{n_i}. \tag{4.8}$$

Пусть
$$H = H(f) = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_k.$$
Тогда при $h \in H$ неравенство (4.8) выполнено при всех i.

Множество H устроено подобно множеству Кантора. Оно непусто как пересечение убывающей последовательности замкнутых подмножеств отрезка. По построению, каждое число $h \in H$ есть предел некоторой последовательности вида m_k/N_k, причем разным последовательностям $\{m_k\}$ соответствуют разные пределы. При фиксированных значениях $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$ допустимы по крайней мере два различных значения m_k. Поэтому H имеет мощность континуума, причем все элементы H иррациональны, так как каждое множество H_k не содержит несократимых дробей со знаменателями, меньшими N_k. Теорема 2 доказана.

Обратим внимание на то, что для функции, построенной в доказательстве теоремы 1, стремится к бесконечности вся последовательность значений сумм Биркгофа в фиксированной точке, а в теореме 2 утверждается только возрастание некоторой подпоследовательности $\Phi(n_i, h)$ максимумов сумм Биркгофа. Это отличие принципиально, так как для функции f с ограниченной вариацией существует ограниченная подпоследовательность сумм Биркгофа, а для гладких функций в силу синхронной возвращаемости некоторая подпоследовательность $\Phi(m_k, h)$ стремится к нулю.

§ 5. Операторы взвешенного сдвига

5.1. Определения и связь с биркгофовыми суммами. Отображение $\alpha\colon X \to X$ порождает *операторы взвешенного сдвига* или *операторы композиции с весом*, действующие в пространствах функций (или вектор-функций) на X по формуле
$$B_a u(x) = a(x) u(\alpha(x)), \qquad x \in X,$$
где $a(x)$ есть заданная комплекснозначная функция (матричнозначная функция) на X. Операторы вида
$$T_\alpha u(x) = u(\alpha(x)), \qquad x \in X,$$
называют *операторами композиции* или *операторами сдвига*. Естественно, что свойства таких операторов тесно связаны с динамикой отображения α и они используются в теории динамических систем [1], [2], [28].

Операторы взвешенного сдвига (используются и другие названия) возникают и в других областях исследований. Такие операторы, порожденные ими операторные алгебры и связанные с ними функциональные уравнения изучались многими авторами в различных функциональных пространствах и как самостоятельный объект, и в связи с различными приложениями (см., например, [29], [30] и приведенную там литературу). В частности, качественные отличия нелокальных дифференциально-функциональных операторов от дифференциальных возникают благодаря тому, что в них входят операторы взвешенного сдвига и появляется зависимость их свойств от динамики отображения α.

Каждый поворот окружности порождает оператор сдвига

$$(T_h u)(x) = u(x+h)$$

и порождает семейство операторов взвешенного сдвига

$$(B_a u)(x) = (aT_h u)(x) = a(x)u(x+h), \tag{5.1}$$

где $a \in C(\mathbb{T})$. Это один из наиболее изученных классов операторов взвешенного сдвига, но и для него обсуждаемые ниже вопросы не были ранее исследованы. Формула (5.1) задает линейный ограниченный оператор в каждом из пространств $L_p(\mathbb{T})$ и в $C(\mathbb{T})$, приведенные ниже утверждения справедливы во всех указанных пространствах. Для конкретности будем рассматривать операторы в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$.

Нормы положительных степеней оператора (5.1) задаются формулой

$$\|B^n\| = \max_x \prod_{k=0}^{n-1} |a(x+kh)|.$$

Если $|a(x)| \neq 0$ при всех x, то оператор B обратим и

$$\|B^{-n}\| = \max_x \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} |a(x+kh)|}.$$

Поэтому если обозначить $f(x) = \ln|a(x)|$, то для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|B^n\| = \exp\Big(\max_x f(n,x,h)\Big) = \exp\Phi(n,h;f). \tag{5.2}$$

Таким образом, поведение норм положительных степеней оператора определяется поведением последовательности максимумов биркгофовых сумм для функции f, и информация о их поведении содержится в теоремах 1 и 2.

Поскольку при отрицательных n имеем

$$\max_x f(n,x,h) = -\min_x f(-n,x,h),$$

поведение норм отрицательных степеней оператора определяется поведением последовательности минимумов биркгофовых сумм.

Здесь отметим, что в случае синхронной возвращаемости сумм Биркгофа существует подпоследовательность n_k, при которой $\|B^{n_k}\| \to 1$. Но и в этом случае могут существовать подпоследовательности m_k, для которых нормы $\|B^{m_k}\|$ неограниченно возрастают.

Вопросам, связанным с поведением норм степеней операторов взвешенного сдвига, посвящены работы [27], [31], [32].

Спектральный радиус $R(B)$ оператора B согласно формуле Гельфанда равен пределу:

$$R(B) = \lim_{n\to+\infty} \|B^n\|^{1/n}.$$

Равенства (5.2) и (1.2) позволяют найти этот предел и получить формулу спектрального радиуса оператора (5.1) при всех иррациональных h:

$$R(aT_h) = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \ln|a(x)|\,dx\right). \tag{5.3}$$

В частности, выполнено равенство $R((aT_h)^{-1}) = R((aT_h))^{-1}$, из которого следует, что спектр оператора лежит на окружности радиуса $R(aT_h)$. Кроме того, при иррациональных h спектр инвариантен относительно поворотов и совпадает с указанной окружностью. В частности, если $f(x) = \ln|a(x)|$ есть непрерывная функция с нулевым средним, то спектром оператора является окружность единичного радиуса.

Формула (5.3) оказывается справедливой и для случая, когда $a(x) = 0$ в некоторых точках и функция $\ln|a(x)|$ не ограничена снизу. При этом если $\int_{\mathbb{T}} \ln|a(x)|\,dx = -\infty$, то $R(aT_h) = 0$, т.е. формула (5.3) также справедлива, если считать, что $\exp(-\infty) = 0$. При этом спектром является круг радиуса $R(aT_h)$.

5.2. Свойства оператора взвешенного сдвига в случае разрешимости когомологического уравнения. Разрешимость соответствующего когомологического уравнения позволяет выделить среди операторов взвешенного сдвига aT_h наиболее просто устроенные.

Пусть функция $a(x)$ вещественнозначная и $a(x) \neq 0$ для всех x, $f(x) = \ln|a(x)|$, $S = \int_{\mathbb{T}} f(x)\,dx$. Пусть также $\omega = \operatorname{sign}(a(x))$. Рассмотрим когомологическое уравнение

$$u(x+h) - u(x) = f(x) - S. \tag{5.4}$$

В случае разрешимости этого уравнения говорят, что функция f *когомологична константе* S. Константа, которой когомологична функция, равна ее среднему значению.

Если обозначить $d(x) = e^{u(x)}$, то получим *когомологическое уравнение в мультипликативной форме*:

$$\frac{d(x+h)}{d(x)} = |a(x)|e^{-S},$$

откуда, в случае разрешимости, имеем представление коэффициента

$$a(x) = \omega e^S \frac{d(x+h)}{d(x)},$$

которое в [33] называется его *факторизацией со сдвигом.*

Подобно тому, как замена (2.4) приводит цилиндрический каскад, построенный по иррациональному повороту и когранице, к повороту цилиндра вокруг оси, отображение

$$\Psi\colon L_2(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T}), \qquad \Psi\varphi(x) = \frac{1}{d(x)}\varphi(x) \tag{5.5}$$

приводит оператор взвешенного сдвига к композиции сдвига и умножения на константу e^S:

$$aT_h = \Psi(\omega e^S T_h)\Psi^{-1}.$$

Заметим, что оператор T_h унитарный и имеет простой дискретный спектр, так как его собственные функции $e_k(x) = \exp(i2\pi kx)$, $k \in \mathbb{Z}$, соответствуют различным собственным значениям $\lambda_k = \exp(i2\pi kh)$ и образуют полную систему.

Описанные выше свойства когомологического уравнения позволяют получить следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть число h иррационально, $a(x) > 0$ и среднее значение функции $f(x) = \ln a(x)$ равно нулю. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Уравнение (5.4) имеет непрерывное решение.*
2. *У оператора aT_h существует хотя бы одно собственное значение.*
3. *Оператор aT_h подобен оператору T_h.*
4. *Нормы всех степеней оператора aT_h ограничены в совокупности.*

При выполнении этих условий для резольвенты справедлива оценка

$$\frac{1}{||\lambda| - 1|} \leqslant \|(aT_h - \lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{M}{||\lambda| - 1|}, \quad \text{где} \ \ M = \frac{\max|d(x)|}{\min|d(x)|}. \tag{5.6}$$

Поясним, например, как из свойства 4) вытекают остальные. Известно, что если нормы всех степеней некоторого оператора A в гильбертовом пространстве ограничены в совокупности, то этот оператор подобен унитарному. В случае операторов взвешенного сдвига альтернатива из [19] позволяет уточнить это утверждение – из нее следует, что подобие задается с помощью оператора (5.5), действующего как умножение на непрерывную функцию, а соответствующий унитарный оператор есть T_h.

Обобщение предложения 1 можно получить для комплекснозначного коэффициента $a(x)$, который будем считать функцией, периодической с периодом 1 на $\mathbb{R}$. Пусть $F(x)$ есть непрерывная ветвь функции $\ln a(x)$. Эта функция может не быть периодической, ее приращение на отрезке $[0, 1]$ есть число вида $i2\pi\varkappa$, где целое число $\varkappa$ называется *индексом Коши* функции a.

В случае комплекснозначных функций, помимо равенства нулю среднего значения правой части, появляется еще одно необходимое условие существования непрерывного решения уравнения (5.4) – индекс Коши правой части должен быть равным нулю.

Интеграл по $[0, 1]$ от функции $F(x)$ есть комплексное число $S = S_1 + i\nu$. Рассмотрим когомологическое уравнение с "подправленной" правой частью

$$u(x + h) - u(x) = F(x) - S_1 - i\nu - i2\pi\varkappa x, \tag{5.7}$$

для которого выполнены оба необходимые условия разрешимости.

Предложение 2. *Если уравнение (5.7) имеет непрерывное решение, то оператор aT_h подобен оператору $e^{S_1}e^{i\nu}e^{i2\pi\varkappa x}T_h$.*

Отсюда следует, в частности, что при $\varkappa = 0$ у оператора aT_h существуют непрерывные собственные функции, а при $\varkappa \neq 0$ спектр оператора чисто непрерывный.

Справедливо и обратное утверждение – из существования хотя бы одной непрерывной собственной функции у оператора aT_h следует разрешимость когомологического уравнения и равенство нулю индекса Коши коэффициента a.

В случае комплексных коэффициентов с оператором aT_h связано цилиндрическое отображение на цилиндре $\mathbb{T}\times\mathbb{C}$ с комплексной образующей, действующее по формуле $\beta(x,\xi)=(x+h,a(x)\xi)$. В [13] описано отличие динамических свойств такого отображения при $\varkappa=0$ от случая $\varkappa\neq 0$. Как отмечено выше, в этих двух случаях наблюдается отличие и свойств операторов aT_h.

5.3. Рациональный поворот. Как уже отмечалось, построения, проведенные в § 3 и § 4, базируются на том, что при рациональных h суммы Биркгофа демонстрируют качественно иное поведение, чем в случае иррациональных. Аналогично, при рациональных h качественно другое поведение имеют нормы степеней операторов aT_h, приведем его описание, полученное в [31], [32].

Пусть рациональное число $h=m/N$ представлено в виде несократимой дроби. Известно (см. [29]) описание спектра оператора aT_h при таком h:

$$\sigma(aT_h)=\biggl\{\lambda\colon \exists\, x\colon \lambda^N=\prod_{k=0}^{N-1}a(x+kh)\biggr\},$$

из которого получаем, что

$$R(aT_h)=\biggl(\max_x\prod_{k=0}^{N-1}|a(x+kh)|\biggr)^{1/N}=\exp(L(f,h)),\tag{5.8}$$

где $f(x)=\ln|a(x)|$, $L(f,h)=\frac{1}{N}\max_x f(N,x,h)=\frac{1}{N}\Phi(N,h;f)$ – величина, определенная в (4.1).

Для любого оператора A имеет место неравенство

$$R(A)^n\leqslant\|A^n\|=R(A)^n\frac{\|A^n\|}{R(A)^n}.\tag{5.9}$$

Если $h=m/N$, то оператор $(aT_h)^N$ действует как умножение на функцию

$$\prod_{k=0}^{N-1}a(x+kh)$$

и его норма совпадает со спектральным радиусом. Поэтому при $n=sN$, $s\in\mathbb{N}$, имеем равенство

$$\|(aT_h)^{sN}\|=R((aT_h)^{sN})=\exp(sNL(f,h)).$$

При других степенях n такое равенство может не выполняться. Если число n представить в виде $n=sN+j$, $0\leqslant j<N$, то из (5.9) и (5.8) получаем оценку

$$\begin{aligned}\exp(nL(f,h))&\leqslant\|(aT_h)^n\|\\&\leqslant\exp(nL(f,h))\frac{\|(aT_h)^j\|}{R(aT_h)^j}\leqslant M(h,f)\exp(nL(f,h)),\end{aligned}\tag{5.10}$$

где

$$M(h,f) = \max_{0\leqslant j<N} \frac{\|(aT_h)^j\|}{R(aT_h)^j}.$$

Эти оценки соответствуют оценкам для сумм Биркгофа, полученным в лемме 1, и придают им операторный смысл. Например, неравенство (4.3) отражает тот факт, что спектральный радиус оператора не превосходит его нормы.

Пусть h – иррациональное число, $h_k = p_k/q_k$ – последовательность несократимых дробей, стремящаяся к h. Тогда из (4.2), (5.3) и (5.8) следует, что спектральные радиусы $R(aT_{h_k})$ стремятся к $R(aT_h)$.

Это утверждение выглядит очень естественным, но обратим внимание на то, что оно не следует из общих свойств операторов, а отражает специфические свойства взвешенных сдвигов. Дело в том, что спектральный радиус оператора является разрывной функцией на пространстве линейных ограниченных операторов: для произвольной последовательности операторов A_k из сходимости по норме к A не следует, что $R(A_k) \to R(A)$ (см. [34]). В рассматриваемом же случае последовательность операторов aT_{h_k} даже не сходится по норме к aT_h (имеется только сильная сходимость), однако имеет место сходимость спектральных радиусов.

Заметим попутно, что наиболее наглядные примеры, демонстрирующие разрывность спектрального радиуса, строятся именно с помощью операторов взвешенного сдвига, порожденных иррациональным поворотом (см. [29], [35]). Приведем один из примеров.

Пусть $a(x) = |x - 1/2|$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и

$$a_k(x) = \begin{cases} \left|x - \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{k} & \text{при } \left|x - \dfrac{1}{2}\right| \geqslant \dfrac{1}{k}, \\[2ex] 0 & \text{при } \left|x - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Тогда $\|aT_h - a_kT_h\| \leqslant 1/k$ и при этом $R(aT_h) = 1/(2e) > 0$, а $R(a_kT_h) = 0$. Это показывает разрывность спектрального радиуса как функции от оператора.

§ 6. О росте резольвент операторов взвешенного сдвига

6.1. Нормы степеней операторов и поведение резольвент. Одной из мотиваций для проведенного исследования явился вопрос о возможном поведении резольвент операторов взвешенного сдвига.

Напомним сначала некоторые общие утверждения. Пусть B есть линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве. Норма резольвенты $\mathscr{R}(\lambda; B) := (B - \lambda I)^{-1}$ возрастает при приближении спектрального параметра к спектру, причем всегда

$$\|\mathscr{R}(\lambda; B)\| \geqslant \frac{1}{d(\lambda, \sigma(B))},$$

где $d(\lambda, \sigma(B))$ – расстояние от λ до спектра $\sigma(B)$. В гильбертовом пространстве наиболее простыми являются нормальные операторы, и для них резольвента имеет наименьший рост, а именно $\|\mathscr{R}(\lambda; B)\| = d(\lambda, \sigma(B))^{-1}$. Если оператор B подобен нормальному, то норма резольвенты имеет аналогичную скорость роста – выполнена оценка

$$\|\mathscr{R}(\lambda; B)\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{d(\lambda, \sigma(B))}.$$

В частности, такой вид имеет оценка резольвенты (5.6).

В общем случае норма резольвенты может возрастать существенно быстрее чем $1/d(\lambda, \sigma(B))$, при этом скорость роста резольвенты является одной из характеристик сложности оператора.

Это проявляется уже в случае, когда спектр $\sigma(B) = \{1\}$. Для такого оператора в конечномерном пространстве характеристикой сложности оператора может служить наибольшая из размерностей клеток Жордана, которую обозначим m. При этом имеется четкая зависимость между m, поведением резольвенты и поведением норм степеней оператора: норма резольвенты растет как $\mathrm{const}/|\lambda - 1|^m$, а нормы положительных степеней оператора растут как n^{m-1}. В частности, из ограниченности норм положительных степеней следует, что $m = 1$ и $B = I$.

В бесконечномерных банаховых пространствах нет аналога понятия клетки Жордана, и в качестве характеристик сложности оператора могут использоваться скорость роста норм степеней оператора и скорость роста резольвенты. Связи этих характеристик более сложные, чем в конечномерном случае, и исследованием зависимостей между свойствами оператора, поведением резольвенты и поведением норм его степеней занимались многие авторы. Один из первых результатов в этом направлении, полученный И. М. Гельфандом в [36], утверждает, что если $\sigma(B) = \{1\}$ и нормы его положительных и отрицательных степеней ограничены, то $B = I$. Нетривиальность этого утверждения, показанная Г. Е. Шиловым в [37], заключается в том, что в бесконечномерном пространстве из того, что $\sigma(B) = \{1\}$ и нормы только положительных степеней ограничены, не следует, что $B = I$.

Большое внимание уделялось случаю, когда норма резольвенты оценивается через некоторую степень функции $1/d(\lambda, \sigma(B))$ и, в частности, когда при $|\lambda| > 1$ выполнено, как в (5.6), так называемое условие Крейсса

$$\|\mathscr{R}(\lambda; B)\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\lambda| - 1}$$

(см. например, [38]–[41]).

В бесконечномерных пространствах возможен рост резольвенты более быстрый, чем у некоторой степени функции $1/d(\lambda, \sigma(B))$. Например, Т. Карлеманом было показано, что если A есть оператор Гильберта–Шмидта и спектр оператора $B = I - A$ состоит из одной точки 1, то для резольвенты имеет место только экспоненциальная оценка вида

$$\|\mathscr{R}(\lambda; B)\| \leqslant C \exp\biggl(\frac{\rho}{|\lambda - 1|^2}\biggr). \tag{6.1}$$

Более того, считается известным, что для произвольного оператора резольвента может возрастать сколь угодно быстро при приближении спектрального параметра к спектру. Быстрый рост резольвенты для оператора из конкретного класса показывает, что в этом классе есть достаточно сложно устроенные операторы.

Информация о скорости роста резольвенты существенна в ряде вопросов. Например, одна из классических задач теории операторов заключается в построении функционального исчисления, т.е. задании функций $f(B)$ от заданного оператора B для некоторого класса функций. Класс соответствующих функций существенно зависит от свойств рассматриваемых операторов. Наиболее широкое функциональное исчисление построено для унитарных и самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, в котором функция от оператора задается для всех ограниченных борелевских функций на спектре оператора.

В функциональном исчислении Рисса, построенном для произвольных ограниченных операторов, функция от оператора определяется только для функций, аналитических в некоторой окрестности спектра.

Е. М. Дынькиным в [42] построено функциональное исчисление, в котором функция $f(B)$ от оператора задается для бесконечно дифференцируемых функций f, производные которых подчинены неравенствам, определяемым скоростью роста резольвенты оператора.

6.2. Оценки снизу для функции, мажорирующей резольвенту. Если $R(B) = 1$, то при $|\lambda| > 1$ резольвента задается в виде ряда по степеням $1/\lambda$:

$$\mathscr{R}(\lambda; B) = (B - \lambda I)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n. \tag{6.2}$$

Обычно поведение аналитической функции характеризуется с помощью мажорирующей функции; для резольвенты – это функция

$$M_B(r) = \max_{|\lambda|=r} \|\mathscr{R}(\lambda; B)\|. \tag{6.3}$$

Лемма 3. *Пусть B есть линейный ограниченный оператор и $R(B) = 1$. Для функции* (6.3) *при $r > 1$ имеют место оценки через функции, построенные с использованием только норм положительных степеней оператора*:

$$\psi_B(r) \leqslant M_B(r) \leqslant \psi^B(r), \tag{6.4}$$

где

$$\psi_B(r) = \max_{n \geqslant 1} \|B^{n-1}\| r^{-n}, \qquad \psi^B(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \|B^{n-1}\| r^{-n}. \tag{6.5}$$

Доказательство. Оценка сверху очевидна. Из аналитичности резольвенты следует неравенство Коши

$$\|B^n\| \leqslant M_B(r) r^{n+1}, \qquad r > 1. \tag{6.6}$$

Из этого неравенства при фиксированном n имеем оценку сверху норм степеней через функцию $M_B(r)$:

$$\|B^n\| \leqslant \inf_{r>1} \{M_B(r) r^{n+1}\}.$$

С другой стороны, при фиксированном r неравенство (6.6) приводит к требуемой оценке снизу в (6.4). Существование максимума в (6.5) следует из того, что $\|B^{n-1}\|/r^n \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

В отличие от конечномерного случая, поведение резольвенты не определяется однозначно по последовательности $\|B^n\|$, так как между оценками снизу и сверху в (6.4) имеется зазор: в общем случае при $r \to 1+0$ значения $\psi_B(r)$ растут медленнее, чем $\psi^B(r)$.

6.3. О росте с заданной скоростью резольвенты оператора взвешенного сдвига. Обозначим $\xi = \ln r$ и рассмотрим функцию

$$\Psi_B(\xi) = \ln \psi_B(e^\xi) = \sup_{n\geqslant 1}(-n\xi + b_n), \qquad b_n = \ln\|B^{n-1}\|. \tag{6.7}$$

Поскольку мы рассматриваем $r > 1$, то $\xi > 0$. Функция $\Psi_B(\xi)$ определена при всех $\xi > 0$ тогда и только тогда, когда $b_n/n \to 0$. В этом случае $\Psi_B(\xi)$ – выпуклая кусочно линейная функция с целыми отрицательными угловыми коэффициентами, ее графиком является выпуклая ломаная. Будем рассматривать эту функцию на полуинтервале $(0, \xi_1]$.

На некоторое время забудем содержательный смысл b_n и будем считать, что $b_1 = 0$, а при $n \geqslant 2$ это некоторая последовательность положительных чисел, обозначенная символом B.

Пусть $F(\xi)$ – положительная убывающая выпуклая функция, определенная на некотором полуинтервале $(0, \xi_1]$ и стремящаяся к $+\infty$ при $\xi \to +0$. Построим на промежутке $(0, \xi_1]$ кусочно линейную функцию, которую будем называть *ломаной, вписанной в график* F, по следующему алгоритму.

Вершины ломаной расположены в точках $(\xi_n; F(\xi_n))$, $n = 2, 3, \dots$, $\xi_n \leqslant \xi_{n-1}$, т.е. расположены на графике $y = F(\xi)$ справа налево, некоторые из этих точек могут совпадать. Угловой коэффициент звена с вершинами $(\xi_{n-1}; F(\xi_{n-1}))$ и $(\xi_n; F(\xi_n))$, если вершины не совпадают, равен $-n$. Вершины строятся по индукции начиная с точки $(\xi_1; F(\xi_1))$:

– если левая производная $F'_-(\xi_{n-1}) \leqslant -n$, то $\xi_n = \xi_{n-1}$;

– если $F'_-(\xi_{n-1}) > -n$, то $(\xi_n; F(\xi_n))$ – это точка пересечения графика $y = F(\xi)$ с прямой $y - F(\xi_{n-1}) = -n(\xi - \xi_{n-1})$, лежащая левее ξ_{n-1}; точка пересечения существует (и на самом деле, единственная), поскольку $F'_-(\xi_{n-1}) > -n$, поэтому в некоторой левой проколотой полуокрестности точки ξ_{n-1} график $y = F(\xi)$ лежит строго под прямой, а $F(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to 0$.

Заметим, что в обоих случаях

$$F'_-(\xi_n) \leqslant -n. \tag{6.8}$$

В самом деле, в первом случае $F'_-(\xi_n) = F'_-(\xi_{n-1}) \leqslant -n$. Во втором случае $F'_-(\xi_n) \leqslant F'_+(\xi_n) \leqslant -n$ (на самом деле, $< -n$), так как в некоторой правой полуокрестности точки ξ_n график $y = F(\xi)$ лежит под хордой с угловым коэффициентом $-n$.

Положим $\widehat{b}_1 = 0$, а для $n \geqslant 2$

$$\widehat{b}_n = F(\xi_n) + n\xi_n; \tag{6.9}$$

$y = \widehat{b}_n$ – точка пересечения с осью ординат опорной прямой с угловым коэффициентом $-n$ для построенной ломаной. Из построения следует, что $\widehat{b}_n > 0$.

Лемма 4. *На промежутке* $(0, \xi_1]$ *ломаная, вписанная в график* F, *определена, является графиком функции*

$$\Psi_{\widehat{B}}(\xi) = \sup_{n\geqslant 1}(-n\xi + \widehat{b}_n) \tag{6.10}$$

и обладает следующими свойствами.

1. *Абсциссы вершин вписанной ломаной монотонно стремятся к нулю*:

$$\xi_n \searrow 0 \quad \textit{при} \;\; n \to \infty.$$

2. *Последовательность* $\widehat{B} = \{\widehat{b}_n\}$ *неограниченно растет, а последовательность* $\{\widehat{b}_n/(n-1)\}$ *монотонно стремится к нулю.*

3. *Если последовательность* $B = \{b_n\}$ *такова, что* $b_n \geqslant \widehat{b}_n$ *при всех* n, *то на интервале* $(0, \xi_1)$ *выполнено неравенство*

$$\Psi_B(\xi) \geqslant \Psi_{\widehat{B}}(\xi) \geqslant F(\xi).$$

4. *Если последовательность* $B = \{b_n\}$ *такова, что существует номер* $k \geqslant 2$, *для которого* $b_k \geqslant \widehat{b}_k$, *то для* $\xi \in [\xi_k, \xi_{k-1}]$ *справедливо неравенство*

$$\Psi_B(\xi) \geqslant \Psi_{\widehat{B}}(\xi) \geqslant F(\xi),$$

в частности $\Psi_B(\xi_k) \geqslant F(\xi_k)$.

Замечание 3. При описании алгоритма построения ломаной и в доказательстве леммы используется непрерывность выпуклой в интервале функции $F(\xi)$, существование для нее в каждой точке левой и правой производных, связанных неравенством $F'_-(\xi) \leqslant F'_+(\xi)$, и неубывание каждой из них. В крайней точке ξ_1 непрерывность и существование $F'_-(\xi_1)$ следует, плюс к выпуклости, из убывания F.

Доказательство леммы 4. По определению $\widehat{b}_n$ звено с концами $(\xi_n, F(\xi_n))$, $(\xi_{n-1}, F(\xi_{n-1}))$ независимо от того, вырождается оно в точку или нет, лежит на прямой $y = -n\xi + \widehat{b}_n$. Отсюда и из выпуклости ломаной следует формула для соответствующей кусочно линейной функции.

То, что кусочно линейная функция определена на всем промежутке $(0, \xi_1]$, следует из пункта 1 свойств ломаной.

1. Монотонность ξ_n следует из построения. Из неравенства (6.8) вытекает, что $F'_-(\xi_n) \to -\infty$, откуда в силу неубывания $F'_-(\xi)$ в интервале $(0, \xi_1)$ и получается стремление ξ_n к нулю.

2. Из (6.9) следует, что $\widehat{b}_n > F(\xi_n)$, откуда $\widehat{b}_n \to +\infty$. Покажем, что

$$\sigma_{n-1} = \frac{\widehat{b}_n}{n-1} \searrow 0.$$

По построению,

$$F(\xi_n) = F(\xi_1) - 2(\xi_2 - \xi_1) - \cdots - n(\xi_n - \xi_{n-1}).$$

Несложными преобразованиями получаем

$$\widehat{b}_n = F(\xi_n) + n\xi_n = F(\xi_1) + 2\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1},$$
$$\frac{\widehat{b}_n}{n-1} = \frac{F(\xi_1) + \xi_1}{n-1} + \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{n-1}}{n-1}.$$

Первое слагаемое, очевидно, монотонно стремится к нулю. Невозрастание второго слагаемого следует из невозрастания последовательности ξ_n:

$$\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{n-1}}{n-1}\,\frac{n-1}{n} + \xi_n\,\frac{1}{n}$$
$$\leqslant \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{n-1}}{n-1}\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_{n-1}}{n-1}.$$

По теореме Штольца предел последнего выражения равен $\lim_{n\to\infty} \xi_{n-1} = 0$.

3. Для любого n из условия $b_n \geqslant \widehat{b}_n$ для любого ξ следует, что $-n\xi + b_n \geqslant -n\xi + \widehat{b}_n$, поэтому

$$\Psi_B(\xi) = \sup_{n\geqslant 1}(-n\xi + b_n) \geqslant \sup_{n\geqslant 1}(-n\xi + \widehat{b}_n) = \Psi_{\widehat{B}}(\xi).$$

4. При $\xi \in [\xi_k, \xi_{k-1}]$ (или в точке ξ_k в случае совпадения вершин) выполнено равенство $\Psi_{\widehat{B}}(\xi) = \sup_{n\geqslant 1}(-n\xi + \widehat{b}_n) = -k\xi + \widehat{b}_k$. Поэтому если $b_k \geqslant \widehat{b}_k$, то

$$\Psi_B(\xi) = \sup_{n\geqslant 1}(-n\xi + b_n) \geqslant -k\xi + \widehat{b}_k = \Psi_{\widehat{B}}(\xi).$$

Лемма доказана.

Замечание 4. С точки зрения выпуклого анализа (см. [43]) формула (6.10) означает, что кусочно линейная функция $\Psi_{\widehat{B}}(\xi)$ представляется в виде преобразования Лежандра некоторой функции, заданной с помощью чисел b_n. Поэтому фактически лемма устанавливает связь между поведением исходной функции и поведением ее преобразования Лежандра.

Замечание 5. В доказательствах полученных оценок из свойств резольвенты использовалось только то, что резольвента является функцией от λ со значениями в банаховом пространстве и разлагается в степенной ряд (6.2). Поэтому аналогичные оценки снизу для мажорирующей функции вида (6.3) через нормы коэффициентов справедливы для всех таких функций, в частности для обычных аналитических функций.

Теперь мы можем доказать теоремы о скорости роста резольвенты, относящиеся к основным результатам работы.

Прежде всего покажем, что для резольвент операторов взвешенного сдвига (5.1), порожденных иррациональными поворотами, имеет место инвариантность нормы относительно поворотов в комплексной плоскости параметров λ.

Лемма 5. *Если $B = aT_h$ есть оператор взвешенного сдвига, порожденный иррациональным поворотом, то справедливы равенства*

$$\|(B-\lambda I)^{-1}\| = \|(B-|\lambda|I)^{-1}\| = M_B(|\lambda|). \tag{6.11}$$

Доказательство. Если S_k есть оператор умножения на функцию $\exp(i2\pi kx)$, то

$$S_k^{-1}BS_k = \omega_k B, \quad \text{где } \omega_k = \exp(i2\pi kh).$$

Зафиксировав точку λ_0, из равенства

$$(B-\lambda_0 I)\mathscr{R}(\lambda_0;B) = I$$

получаем цепочку равенств

$$(S_k^{-1}(B-\lambda_0 I)S_k)(S_k^{-1}\mathscr{R}(\lambda_0;B)S_k) = I,$$
$$(\omega_k B-\lambda_0 I)(S_k^{-1}\mathscr{R}(\lambda_0;B)S_k) = I,$$
$$(B-\overline{\omega}_k\lambda_0 I)(\omega_k S_k^{-1}\mathscr{R}(\lambda_0;B)S_k) = I.$$

Последнее равенство означает, что

$$\mathscr{R}(\overline{\omega}_k\lambda_0;B) = \omega_k S_k^{-1}\mathscr{R}(\lambda_0;B)S_k.$$

Так как $\|S_k\| = \|S_k^{-1}\| = 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, получаем равенство

$$\|\mathscr{R}(\overline{\omega}_k\lambda_0;B)\| = \|\mathscr{R}(\lambda_0;B)\|.$$

Так как точки $\overline{\omega}_k\lambda_0 = \exp(-i2\pi kh)\lambda_0$ плотны на окружности $|\lambda| = |\lambda_0|$, получаем равенство норм для всех точек этой окружности. Лемма доказана.

В силу этой леммы оценки снизу для функции $\Psi_B(\xi)$ являются оценками снизу и для нормы резольвенты.

Теорема 3. *Пусть $F(\xi)$ – положительная убывающая выпуклая функция, определенная на некотором полуинтервале $(0,\xi_1]$ и стремящаяся к $+\infty$ при $\xi \to +0$. Тогда для любого иррационального h существует такая функция $a \in C(\mathbb{T})$, что спектральный радиус оператора взвешенного сдвига aT_h равен $R(aT_h) = 1$, а его резольвента при $|\lambda| \to 1+0$ растет не медленнее чем $e^{F(\ln|\lambda|)}$: существует такое $\delta > 0$, что*

$$\ln\|(aT_h-\lambda)^{-1}\| \geqslant F(\ln|\lambda|) \quad \text{при } 1 < |\lambda| < 1+\delta.$$

Доказательство. Построим на промежутке $(0,\xi_1]$ вписанную в график $y = F(\xi)$ ломаную и соответствующую ей кусочно линейную функцию $\Psi_{\widehat{B}}(\xi)$, точнее, набор $\widehat{B} = \{\widehat{b}_n\}$.

Положим $\sigma_{n-1} = \widehat{b}_n/(n-1)$. В соответствии с п. 2 леммы 4 эта последовательность монотонно стремится к нулю.

В таком случае согласно теореме 1 и замечанию 2 к ней для заданного иррационального h существует такая функция $f \in C(\mathbb{T})$ с нулевым средним, что для сумм Биркгофа при всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$b_{n+1} = \max_x f(n,x,h) \geqslant n\sigma_n = \widehat{b}_{n+1}.$$

Тогда согласно (5.2) для функции $a(x) = \exp(f(x))$ оператор взвешенного сдвига

$$B_{h,a} = aT_h$$

удовлетворяет при $n \in \mathbb{N}$ неравенствам

$$\ln \|B_{h,a}^n\| \geqslant n\sigma_n.$$

Учитывая, что $b_{n+1} = \ln \|B_{h,a}^n\|$, получим такой набор $B = \{b_n\}$ логарифмов норм степеней оператора, что $b_n \geqslant \widehat{b}_n$ при всех n. Тогда согласно п. 3 леммы 4 при всех $\xi \in (0, \xi_1]$ выполнено неравенство $\Psi_{\widehat{B}}(\xi) \geqslant F(\xi)$,

$$\Psi_B(\xi) \geqslant \Psi_{\widehat{B}}(\xi) = F(\xi).$$

Положив $1 + \delta = e^{\xi_1}$, из (6.4), (6.7) и (6.11) получаем требуемую оценку снизу для нормы резольвенты. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $F(\xi)$ есть произвольная положительная убывающая выпуклая функция, определенная в некотором промежутке $(0, \xi_1]$ и стремящаяся к $+\infty$ при $\xi \to +0$.*

Если $a \in C(\mathbb{T})$, $a(x) \neq 0$ при всех x, функция $f(x) = \ln |a(x)|$ не является тригонометрическим многочленом и имеет нулевое среднее, то существуют такие иррациональные h, при которых норма резольвенты оператора взвешенного сдвига $B_{h,a} = aT_h$ растет при $|\lambda| \to 1 + 0$ не медленнее чем $e^{F(\ln |\lambda|)}$ в следующем смысле: существует такая последовательность радиусов $r_k \to 1 + 0$, что для любого номера k

$$\ln \|(aT_h - \lambda I)^{-1}\| \geqslant F(\ln r_k) \quad \textit{при} \;\; 1 < |\lambda| \leqslant r_k.$$

Доказательство. Так же, как в предыдущем доказательстве, по функции $F(\xi)$ построим вписанную ломаную, соответствующий набор чисел $\widehat{B} = \{\widehat{b}_n\}$ и функцию $\Psi_{\widehat{B}}(\xi)$. Положим, как и прежде, $\sigma_n = \widehat{b}_{n+1}/n$.

Функция $f(x) = \ln |a(x)|$ имеет нулевое среднее и не является тригонометрическим многочленом, поэтому согласно теореме 2 существуют континуум иррациональных h и подпоследовательность номеров $\{n_k\}$ таких, что для любого из таких h и любого номера k выполняется неравенство

$$\max_x f(n_k, x, h) \geqslant n_k \sigma_{n_k} = \widehat{b}_{n_k+1}.$$

Фиксируем одно из таких h и рассмотрим оператор $B_{h,a} = aT_h$. Согласно (5.2) для любого n_k

$$\ln \|B_{h,a}^{n_k}\| \geqslant n_k \sigma_{n_k}.$$

Положив $b_{n+1} = \ln \|B_{h,a}^n\|$, получим такой набор чисел $B = \{b_n\}$, что $b_{n_k+1} \geqslant \widehat{b}_{n_k+1}$ при всех n_k. Тогда согласно п. 4 леммы 4 при всех ξ_{n_k+1} выполнено неравенство

$$\Psi_B(\xi_{n_k+1}) \geqslant \Psi_{\widehat{B}}(\xi_{n_k+1}) = F(\xi_{n_k+1}).$$

Положив $r_k = \exp\{\xi_{n_k+1}\}$, получаем требуемую оценку. Теорема доказана.

6.4. Экспоненциальные оценки резольвент. В ряде вопросов представляют интерес оценки резольвенты через функции вида, аналогичного (6.1), а именно $\exp(\rho/(|\lambda|-1)^\gamma)$.

В [44] проанализированы такие экспоненциальные оценки снизу и сверху и получено достаточно явное описание зависимости между поведением норм степеней оператора и ростом резольвенты.

Для формулировки результата введем для функции $F(r)$, определенной при $r>1$, понятия порядка и типа роста при $r\to 1$ аналогично классическим понятиям порядка и типа целой функции (см. [45]).

Порядком γ функции $F(r)$ называется точная нижняя грань таких чисел α, при которых выполнена оценка

$$F(r)\leqslant \exp\left(\frac{1}{(r-1)^\alpha}\right).$$

Типом $\rho=\rho(F)$ функции $F(r)$ конечного порядка γ называется точная нижняя грань чисел η, при которых выполнена оценка

$$F(r)\leqslant \exp\left(\frac{\eta}{(r-1)^\gamma}\right).$$

Аналогично *порядком роста последовательности φ_n* называется точная нижняя грань β таких чисел ζ, при которых

$$|\varphi_n|\leqslant \exp(n^\zeta).$$

Типом последовательности φ_n конечного порядка β называется точная нижняя грань ω чисел η, при которых выполнено

$$|\varphi_n|\leqslant \exp(\eta n^\beta).$$

В частности, если $R(B)=1$ и β – порядок роста последовательности $\|B^n\|$, то $\beta\leqslant 1$, а условие $\beta<1$ выделяет подкласс среди таких операторов.

Для операторов, у которых $\beta<1$, оказалось, что отличие между оценкой снизу и оценкой сверху в (6.4) не очень существенно – функции $\psi_B(r)$ и $\psi^B(r)$, заданные (6.5), имеют одинаковый порядок и тип, хотя функция $\psi_B(r)$ возрастает медленнее, чем $\psi^B(r)$.

Теорема 5 (см. [44]). *Пусть B есть произвольный оператор такой, что $R(B)=1$. Функция $M_B(r)$, заданная (6.3), имеет при $r\to 1$ конечный ненулевой порядок роста γ и тип $\rho>0$ тогда и только тогда, когда последовательность $\|B^n\|$ имеет конечный порядок роста β, $0<\beta<1$, и тип $\omega>0$, где соотношения между соответствующими порядками и типами задаются формулами*

$$\gamma=\frac{\beta}{1-\beta},\qquad \beta=\frac{\gamma}{1+\gamma},$$
$$\rho=\frac{(\beta\omega)^\beta}{\gamma},\qquad \omega=\frac{(\rho\gamma)^{1/(\gamma+1)}}{\beta}.$$

В заключение добавим несколько слов о роли полученных результатов с точки зрения общей теории операторов. Для операторов в бесконечномерных банаховых пространствах существует ряд эффектов, которых не может быть в конечномерных пространствах, а также не может быть для “простых” операторов, например самосопряженных. Соответственно, для демонстрации таких эффектов нужны достаточно сложно устроенные операторы. При этом оказывается, что значительная часть соответствующих примеров строится с помощью операторов взвешенного сдвига, в том числе порожденных иррациональными поворотами. В частности, в § 5 приведен пример, демонстрирующий разрывность спектрального радиуса.

Утверждение, что резольвента может возрастать сколь угодно быстро, допускает разные трактовки. Например, в работе [46] это утверждение понимается в следующем смысле. Рассматриваются операторы Тёплица, у которых спектр есть единичная окружность, показано, что для заданной последовательности регулярных значений λ_k, сходящейся к спектральному значению, и произвольной сколь угодно быстро растущей последовательности M_k существует такой оператор Тёплица T, что $\|(T-\lambda_k I)^{-1}\| \geqslant M_k$.

Теоремы 3 и 4 показывают возможность роста резольвенты в более сильном смысле, чем в [46], – у оператора взвешенного сдвига норма резольвенты может сколь угодно быстро возрастать не только на некоторой последовательности регулярных значений, как в [46], но и равномерно по всем направлениям при приближении к окружности, являющейся спектром оператора.

Эти утверждения служат еще одним подтверждением того, что очень просто записываемые операторы взвешенного сдвига, порожденные иррациональными поворотами, могут иметь достаточно сложную структуру, определяемую природой иррациональности числа h и свойствами коэффициента a.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту, который указал на ряд источников, тесно связанных с тематикой статьи, и чьи замечания позволили существенно улучшить структуру работы и избежать ряда погрешностей.

Список литературы

[1] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*, Наука, М., 1980, 384 с.; англ. пер.: I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic theory*, Grundlehren Math. Wiss., **245**, Springer-Verlag, New York, 1982, x+486 pp.

[2] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999, 768 с.; пер. с англ.: A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, xviii+802 pp.

[3] А. Пуанкаре, *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*, ГИТТЛ, М.–Л., 1947, 392 с.; пер. с фр.: H. Poincaré, “Sur les courbes définies par les équations différentielles”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **XCIII, XCVIII** (1882, 1884), 951–952, 287–289; *J. Math. Pures Appl.* (4), **I, II** (1885, 1886), 167–244, 151–211.

[4] H. Poincaré, “Sur les séries trigonométriques”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **101** (1886), 1131–1134.

[5] В. В. Козлов, *Методы качественного анализа в динамике твердого тела*, 2-е изд., НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", М.–Ижевск, 2000, 248 с.

[6] В. В. Козлов, "Об одной задаче Пуанкаре", *ПММ*, **40**:2 (1976), 352–355; англ. пер.: V. V. Kozlov, "On a problem of Poincaré", *J. Appl. Math. Mech.*, **40**:2 (1976), 326–329.

[7] А. Б. Крыгин, "Об ω-предельных множествах гладких цилиндрических каскадов", *Матем. заметки*, **23**:6 (1978), 873–884; англ. пер.: A. B. Krygin, "ω-Limit sets of smooth cylindrical cascades", *Math. Notes*, **23**:6 (1978), 479–485.

[8] Е. А. Сидоров, "Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем", *УМН*, **34**:6(210) (1979), 184–188; англ. пер.: E. A. Sidorov, "Conditions for uniform Poisson stability of cylindrical systems", *Russian Math. Surveys*, **34**:6 (1979), 220–224.

[9] Н. Г. Мощевитин, "Распределение значений линейных функций и асимптотическое поведение траекторий некоторых динамических систем", *Матем. заметки*, **58**:3 (1995), 394–410; англ. пер.: N. G. Moshchevitin, "Distribution of values of linear functions and asymptotic behavior of trajectories of some dynamical systems", *Math. Notes*, **58**:3 (1995), 948–959.

[10] Д. В. Аносов, "Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:6 (1973), 1259–1274; англ. пер.: D. V. Anosov, "On an additive functional homology equation connected with an ergodic rotation of the circle", *Math. USSR-Izv.*, **7**:6 (1973), 1257–1271.

[11] В. И. Арнольд, "Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике", *УМН*, **18**:6(114) (1963), 91–192; англ. пер.: V. I. Arnol'd, "Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics", *Russian Math. Surveys*, **18**:6 (1963), 85–191.

[12] А. Я. Гордон, "Достаточное условие неразрешимости аддитивного функционального гомологического уравнения, связанного с эргодическим поворотом окружности", *Функц. анализ и его прил.*, **9**:4 (1975), 71–72; англ. пер.: A. Ya. Gordon, "Sufficient condition for unsolvability of the additive functional homological equation connected with the ergodic rotation of a circle", *Funct. Anal. Appl.*, **9**:4 (1975), 334–336.

[13] А. А. Гура, "Гомологические уравнения и топологические свойства S^1-расширений над эргодическим поворотом окружности", *Матем. заметки*, **23**:3 (1978), 463–470; англ. пер.: A. A. Gura, "Homological equations and topological properties of S^1-extensions over an ergodic rotation of the circle", *Math. Notes*, **23**:3 (1978), 251–255.

[14] А. В. Рождественский, "Об аддитивном когомологическом уравнении и типичном поведении сумм Биркгофа над сдвигом многомерного тора", *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Труды МИАН, **256**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2007, 278–289; англ. пер.: A. V. Rozhdestvenskii, "An additive cohomological equation and typical behavior of Birkhoff sums over a translation of the multidimensional torus", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256** (2007), 263–274.

[15] Е. А. Сидоров, "Топологически транзитивные цилиндрические каскады", *Матем. заметки*, **14**:3 (1973), 441–452; англ. пер.: E. A. Sidorov, "Topological transitivity of cylindrical cascades", *Math. Notes*, **14**:3 (1973), 810–816.

[16] А. Н. Колмогоров, "О динамических системах с интегральным инвариантом на торе", *Докл. АН СССР*, **93**:5 (1953), 763–766.

[17] Л. Г. Шнирельман, "Пример одного преобразования плоскости", *Изв. Донского политехн. ин-та*, **14** (1930), 64–74.

[18] A. S. Besicovitch, "A problem on topological transformation of the plane", *Fund. Math.*, **28** (1937), 61–65.

[19] W. H. Gottschalk, G. A. Hedlund, *Topological dynamics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1955, vii+151 pp.

[20] A. S. Besicovitch, "A problem on topological transformations of the plane. II", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 38–45.

[21] E. Dymek, *Transitive cylinder flows whose set of discrete points is of full Hausdorff dimension*, arXiv: 1303.3099.

[22] А. В. Кочергин, "Новые примеры транзитивных цилиндрических каскадов со свойством Безиковича", *Матем. сб.*, **209**:9 (2018), 3–18; англ. пер.: A. V. Kochergin, "New examples of Besicovitch transitive cylindrical cascades", *Sb. Math.*, **209**:9 (2018), 1257–1272.

[23] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, 4-е изд., Наука, М., 1978, 112 с.; англ. пер. 3-го изд.: A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, The Univ. of Chicago Press, Chicago, IL–London, 1964, xi+95 pp.

[24] А. В. Кочергин, "Об отсутствии перемешивания у специальных потоков над поворотом окружности и потоков на двумерном торе", *Докл. АН СССР*, **205**:3 (1972), 515–518; англ. пер.: A. V. Kochergin, "On the absence of mixing in special flows over the rotation of a circle and in flows on a two-dimensional torus", *Soviet Math. Dokl.*, **13** (1972), 949–952.

[25] А. В. Кочергин, "Перемешивающий специальный поток над поворотом окружности с почти липшицевой функцией", *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 51–78; англ. пер.: A. V. Kochergin, "A mixing special flow over a circle rotation with almost Lipschitz function", *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 359–385.

[26] А. В. Кочергин, "Замена времени в потоках и перемешивание", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:6 (1973), 1275–1298; англ. пер.: A. V. Kočergin, "Time changes in flows and mixing", *Izv. Math.*, **7**:6 (1973), 1273–1294.

[27] A. B. Antonevich, A. A. Shukur, "On the powers of operator generated by rotation", *J. Anal. Appl.*, **16**:1 (2018), 57–67.

[28] И. У. Бронштейн, *Неавтономные динамические системы*, Штиинца, Кишинев, 1984, 292 с.

[29] А. Б. Антоневич, *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*, Изд-во «Университетское», Минск, 1988, 232 с.; англ. пер.: *Linear functional equations. Operator approach*, Oper. Theory Adv. Appl., **83**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996, viii+179 pp.

[30] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional-differential equations. I. C^*-theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994, viii+504 pp.

[31] А. Б. Антоневич, А. А. Шукур, "Оценки норм степеней оператора, порожденного иррациональным поворотом", *Докл. НАН Беларуси*, **61**:1 (2017), 30–35.

[32] А. А. Шукур, "Поведение норм степеней оператора, порожденного рациональным поворотом", *Вестник БГУ. Сер.* 1, 2016, № 2, 110–115.

[33] N. Karapetiants, S. Samko, *Equations with involutive operators*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001, xxiv+427 pp.

[34] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966, xix+592 pp.

[35] А. Б. Антоневич, "Об изменениях спектра при малых возмущениях оператора", *Вестник БГУ. Сер.* 1, 1976, № 3, 60–61.

[36] I. Gelfand, "Zur Theorie der Charaktere der Abelschen topologischen Gruppen", *Матем. сб.*, **9(51)**:1 (1941), 49–50.

[37] Г. Е. Шилов, “Об одной теореме И. М. Гельфанда и ее обобщениях”, *Докл. АН СССР*, **72** (1950), 641–644.

[38] Yu. Lyubich, “Spectral localization, power boundedness and invariant subspaces under Ritt’s type condition”, *Studia Math.*, **134**:2 (1999), 153–167.

[39] А. М. Гомилко, Я. Земанек, “О равномерном резольвентном условии Крейсса”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:3 (2008), 81–84; англ. пер.: A. M. Gomilko, Ya. Zemánek, “On the uniform Kreiss resolvent condition”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:3 (2008), 230–233.

[40] O. Nevanlinna, “Resolvent conditions and powers of operators”, *Studia Math.*, **145**:2 (2001), 113–134.

[41] A. Gomilko, J. Zemánek, “On the strong Kreiss resolvent condition”, *Complex Anal. Oper. Theory*, **7**:2 (2013), 421–435.

[42] Е. М. Дынькин, “Операторное исчисление, основанное на формуле Коши–Грина”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. III, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **30**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1972, 33–39; англ. пер.: E. M. Dyn’kin, “An operator calculus based on the Cauchy–Green formula”, *J. Soviet Math.*, **4**:4 (1975), 329–334.

[43] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, 2-е изд., Эдиториал УРСС, М., 2000, 176 с.; англ. пер. 1-го изд.: G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, rev. by the authors, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.

[44] А. Б. Антоневич, А. А. Шукур, “Об операторах с экспоненциальным ростом резольвенты”, *ТВИМ*, 2016, № 3(32), 9–20.

[45] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956, 632 с.; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Transl. Math. Monogr., **5**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964, viii+493 pp.

[46] С. Р. Треиль, “Резольвента оператора Тёплица может расти сколь угодно быстро”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. XVI, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **157**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1987, 175–177; англ. пер. 1-го изд.: S. R. Treil’, “Resolvent of the Toeplitz operator may increase arbitrarily fast”, *J. Soviet Math.*, **44**:6 (1989), 868–869.

Поступила в редакцию
22.11.2019 и 19.01.2022

Анатолий Борисович Антоневич
(Anatolij B. Antonevich)
Белорусский государственный университет,
г. Минск, Белоруссия
E-mail: antonevich@bsu.by

Андрей Васильевич Кочергин
(Andrey V. Kochergin)
Экономический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: a.kochergin@gmail.com

Али Абдулхусеен Шукур
(Ali A. Shukur)
Faculty of Computer Science and Mathematics,
University of Kufa, Kufa, Iraq;
Белорусский государственный университет,
г. Минск, Белоруссия
E-mail: shukur.math@gmail.com