

О СЛУЧАЯХ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ
ЗАДАЧИ О РЁБЕРНОЙ РАСКРАСКЕ,
ПОРОЖДАЕМЫХ ЗАПРЕЩЁННЫМИ
8-РЁБЕРНЫМИ СУБКУБИЧЕСКИМИ ЛЕСАМИ

Д. С. Малышев^{1, a}, О. И. Дугинов^{2, b}

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

² Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
E-mail: ^adsmalyshev@rambler.ru, ^boduginov@gmail.com

Аннотация. Задача о рёберной раскраске для заданного графа состоит в том, чтобы минимизировать количество цветов, достаточное для окрашивания его рёбер так, чтобы смежные рёбра были окрашены в разные цвета. Для всех классов графов, определяемых множествами запрещённых подграфов с 7 рёбрами каждый, известен сложностной статус данной задачи. В настоящей работе рассматривается случай запретов с 8 рёбрами. Нетрудно заметить, что задача о рёберной раскраске будет NP-трудной для такого класса, если среди его 8-рёберных запретов нет субкубического леса. В данной работе доказывается, что запрещение любого субкубического 8-рёберного леса порождает класс с полиномиальной разрешимостью задачи о рёберной раскраске, кроме случаев, образованных дизъюнктивной суммой одного из четырёх лесов и пустого графа. Для всех оставшихся случаев доказывается аналогичный результат для пересечения с множеством графов максимальной степени не менее чем 4. Ил. 2, библиогр. 14.

Ключевые слова: монотонный класс, задача о рёберной раскраске, вычислительная сложность.

Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Класс графов называется

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–51–04001 (Ф21РМ–001)).

наследственным, если он замкнут относительно удаления вершин. Любой наследственный класс $\mathcal{X}$ (и только наследственный класс) графов может быть задан множеством своих *запрещённых порождённых подграфов* $\mathcal{Y}$, при этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{Y})$. *Сильно наследственный* (или *монотонный*) класс графов — наследственный класс, замкнутый ещё и относительно удаления рёбер. Любой монотонный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих *запрещённых подграфов* $\mathcal{Y}$, при этом пишем $\mathcal{X} = \text{Free}_s(\mathcal{Y})$.

Рёберной k -раскраской графа $G = (V, E)$ называется любое отображение $c: E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $c(e_1) \neq c(e_2)$ для любых смежных рёбер e_1 и e_2 . Минимальное k , для которого существует рёберная k -раскраска графа G , называется *хроматическим индексом* G и обозначается через $\chi'(G)$.

Задача о рёберной k -раскраске (кратко, *задача k -PP*) состоит для заданного графа G в том, чтобы распознать, выполняется ли неравенство $\chi'(G) \leq k$ или нет. *Задача о рёберной раскраске* (кратко, *задача PP*) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы распознать, выполняется ли неравенство $\chi'(G) \leq k$ или нет. Задачи 3-PP и PP NP-полны [1].

Согласно известной теореме В. Г. Визинга [2] для любого графа G справедливо неравенство $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин G . Тем самым задача PP для графа G эквивалентна распознаванию того, верно ли равенство $\chi'(G) = \Delta(G)$ или нет.

В работе [3] при любом k была получена полная сложностная дихотомия (т. е. полная классификация сложности) для задачи k -PP и всех классов вида $\text{Free}(\{H\})$. В [4] получена полная классификация сложности задачи 3-PP для множеств запрещённых порождённых подграфов, каждый не более чем с 6 вершинами, среди которых не более двух подграфов имеют ровно 6 вершин. В [5] рассматривались задача PP и семейство монотонных классов, задаваемых запрещением подграфов, каждый из которых имеет не более чем 6 рёбер или не более чем 7 вершин, и получена полная классификация сложности задачи PP для классов графов из данного семейства. В [6] получена полная классификация сложности задачи PP для монотонных классов, задаваемых запрещением подграфов, каждый из которых имеет не более чем 7 рёбер.

В настоящей работе рассматривается случай запретов с 8 рёбрами. В [7] доказано, что для любого g задача PP NP-трудна в множестве субкубических графов с обхватом не менее чем g , поэтому задача PP будет NP-трудной для любого монотонного класса с 8-рёберными запретами, если среди данных запретов нет субкубического леса. В настоящей работе доказывается, что запрещение любого субкубического 8-рёберного

леса порождает класс с полиномиальной разрешимостью задачи о рёберной раскраске, кроме случаев, образованных дизъюнктивной суммой одного из четырёх лесов и пустого графа. Для всех оставшихся случаев доказывается аналогичный результат для пересечения с множеством графов максимальной степени не менее чем 4.

1. Используемые обозначения

Пусть G — некоторый граф, а x — вершина G . *Открытая окрестность вершины x* , т. е. множество её соседей, обозначается через $N(x)$. *Замкнутая окрестность вершины x* , т. е. множество $N(x) \cup \{x\}$, обозначается через $N[x]$. Через $\deg(x)$ обозначается степень x , а максимальная из степеней вершин G обозначается через $\Delta(G)$. Если $\Delta(G) \leq 3$, то G называется *субкубическим*. Если степени всех вершин графа равны 3, то он называется *кубическим*.

Пусть G — граф и $V' \subseteq V(G)$. Тогда $G[V']$ — подграф графа G , порождённый V' , а $G \setminus V'$ — результат удаления из G всех элементов V' .

Пусть G_1 и G_2 — графы. Через $G_1 \cong G_2$ обозначается изоморфизм G_1 и G_2 . Если $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, то граф $(V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$ переобозначим через $G_1 + G_2$. Для графа G и числа k обозначение kG означает граф $\underbrace{G + G + \dots + G}_{k \text{ раз}}$.

Пусть $G, H_1, H_2, \dots, H_k$ — графы. Тогда $\langle G; H_1, H_2, \dots, H_k \rangle$ — сокращение для утверждения о том, что G содержит каждый из графов $H_1, H_2, \dots, H_k$ в качестве подграфа.

Как обычно, через $P_n, O_n, K_{p,q}$ обозначаются простой путь и пустой граф на n вершинах и полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и с q вершинами в другой доле соответственно. Через $K_4 - e$ обозначается результат удаления ребра из полного графа с 4 вершинами.

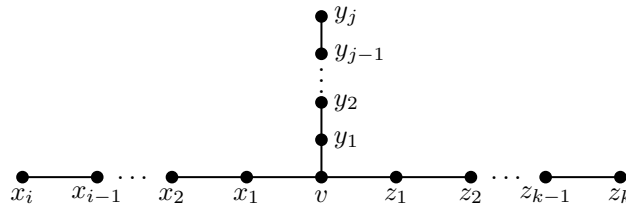


Рис. 1. Граф $T_{i,j,k}$

Через $T_{i,j,k}$, где $i \geq 0, j \geq 0, k \geq 0$, обозначается дерево, называемое *триодом*, получаемое одновременным отождествлением по вершине v концов трёх простых путей (рис. 1)

$$(v = x_0, x_1, \dots, x_i), \quad (v = y_0, y_1, \dots, y_j), \quad (v = z_0, z_1, \dots, z_k).$$

Далее в доказательствах для вершин графа $T_{i,j,k}$ будут использоваться обозначения, введённые при его определении.

Через $\mathcal{T}$ обозначается класс всех лесов, каждая компонента связности которых является трио́дом. На рис. 2 перечислены всевозможные субкубические деревья, не принадлежащие $\mathcal{T}$ и имеющие не более чем 8 рёбер.

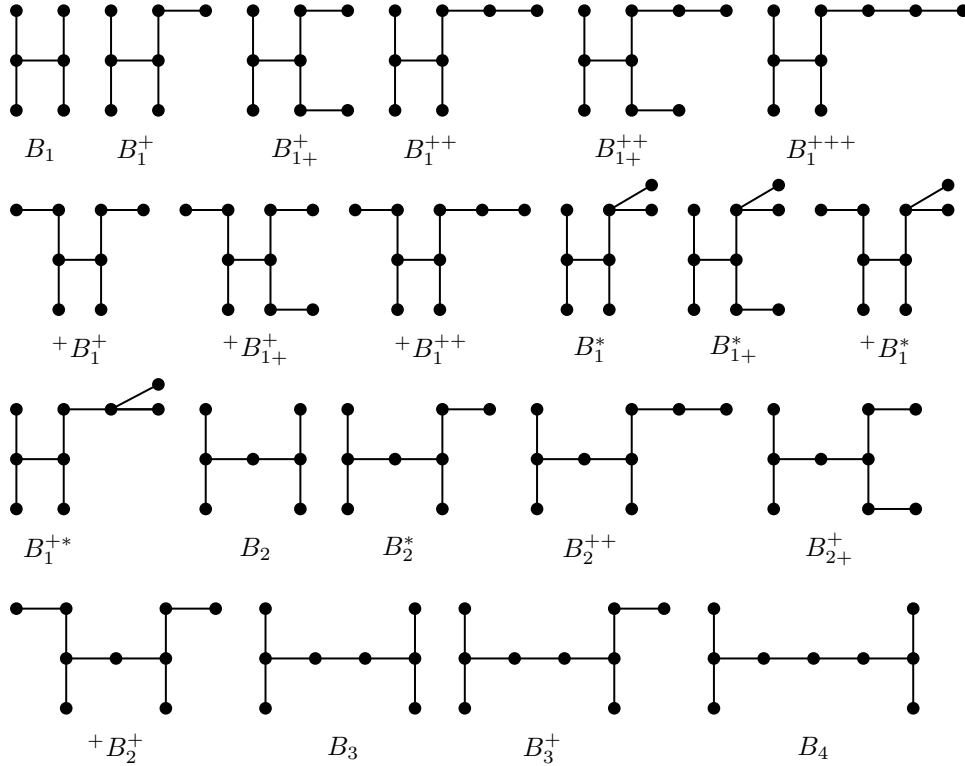


Рис. 2

Множество

$$\{B_1 + 3P_2, B_1 + P_2 + P_3, B_1 + P_4, B_1 + K_{1,3}, B_1^+ + 2P_2, B_1^+ + P_3, B_{1+}^+ + P_2, B_{1+}^{++} + P_2, B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, +B_1^+ + P_2, +B_{1+}^+, +B_{1+}^{++}, B_1^* + P_2, B_{1+}^*, +B_1^*, B_1^{+*}, B_2 + 2P_2, B_2 + P_3, B_2^+ + P_2, B_2^{++}, B_{2+}^+, +B_2^+, B_3 + P_2, B_3^+, B_4\}$$

обозначим через $\mathcal{S}$. Отметим, что $\mathcal{S}$ совпадает с множеством всевозможных субкубических лесов без изолированных вершин, каждый из которых имеет ровно 8 рёбер и не принадлежит классу $\mathcal{T}$.

Независимым множеством графа называется любое подмножество попарно не смежных его вершин.

2. Несжимаемые графы

Известно (см. [8, с. 465]), что граф G , содержащий вершину x , для которой $|\{y \in N(x) \mid \deg(y) = \Delta(G)\}| \leq 1$, имеет раскраску рёбер в $\Delta(G)$ цветов тогда и только тогда, когда таковым является граф $G \setminus \{x\}$.

Напомним, что *шарниром* называется вершина графа, удаление которой увеличивает количество его компонент связности. Очевидно, что для любого графа G и его шарнира x верно следующее: $\chi'(G) = \Delta(G)$ тогда и только тогда, когда для каждой компоненты связности H графа $G \setminus \{x\}$ выполнено

$$\chi'(G[V(H) \cup \{x\}]) \leq \Delta(G).$$

Связный граф G без шарниров назовём *несжимаемым*, если любая вершина G имеет не менее двух соседей степени $\Delta(G)$. Задача РР для графов из произвольного монотонного класса полиномиально сводится к той же задаче для несжимаемых графов из этого монотонного класса.

3. Кликовая ширина графов и следствия из её ограниченности

Кликовая ширина — важный параметр графов. Для графа G она обозначается через $sw(G)$ и определяется как наименьшее количество меток, необходимых для построения G с помощью следующих четырёх операций:

- (1) создание новой вершины с заданной меткой i ,
- (2) дизъюнктное объединение двух размеченных графов H_1 и H_2 с непересекающимися множествами вершин,
- (3) соединение ребром каждой вершины с меткой i с каждой вершиной с меткой j ,
- (4) переименование метки i в j .

Для любого числа C многие задачи на графах (включая задачу РР) полиномиально разрешимы для графов, у которых кликовая ширина не превосходит C (см., например, [9]). Из результатов [10, 11] следует (см. доказательство леммы 4 в [5]) справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Для любого $C > 0$ задача РР полиномиально разрешима в классе графов $\{G \mid sw(G) \leq C\}$.

Следующее утверждение доказано в [12].

Лемма 2. Для любого монотонного класса $\mathcal{X}$, не содержащего $\mathcal{T}$ целиком, существует число $C(\mathcal{X})$ такое, что для любого $G \in \mathcal{X}$ выполнено $sw(G) < C(\mathcal{X})$.

Лемма 3. Пусть $H' \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{X}$ — класс графов, причём для некоторого графа H выполнено $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}_s(\{H + H'\})$. Тогда задача РР в классе $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X} \cap \text{Free}_s(\{H\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится понятие древесной ширины графа. *Древесное разложение* графа $G = (V, E)$ — это дерево T , вершинами $X_1, \dots, X_n$ которого являются подмножества V , удовлетворяющие следующим свойствам:

- (1) объединение всех множеств X_i равно V ;
- (2) для любой вершины $v \in V$ вершины дерева, содержащие v , образуют поддереву дерева T ;
- (3) для любого ребра (v, u) графа G существует подмножество X_i , содержащее и v , и u .

Шириной разложения T называется величина $\max_i |X_i| - 1$. *Древесная ширина* $tw(G)$ графа G — это минимальная ширина всех возможных разложений графа G . Нетрудно видеть, что для любого графа G и любой его вершины v выполнено $tw(G) \leq tw(G \setminus \{v\}) + 1$, для чего достаточно включить v во все X_i оптимального древесного разложения графа $G \setminus \{v\}$.

Между кликовой шириной и древесной шириной графа имеется связь. Так, для любого графа G выполнено неравенство $sw(G) \leq 3 \cdot 2^{tw(G)-1}$ (см. [13]), а для любого графа G со свойством $\neg \langle G; K_{t,t} \rangle$ выполнено $tw(G) \leq 3sw(G) \cdot (t-1) - 1$ (см. [14]).

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф из $\mathcal{X}$. Если G содержит подграф $H = (V_H, E_H)$, то $G \setminus V_H \in \text{Free}_s(\{H'\})$ и существует $t^* = t^*(H, H')$ такое, что $\neg \langle G; K_{t^*, t^*} \rangle$, так как $H' \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}_s(\{H + H'\})$. Отсюда, из леммы 2 и замечаний двух последних абзацев следует, что существует $C^* = C^*(H, H')$ такое, что для любого $G \in \mathcal{X}$ имеет место $\langle G; H \rangle \Rightarrow sw(G) < C^*$. Значит, по лемме 1 задача РР полиномиально разрешима в этом классе. Тем самым имеет место сведение, обозначенное в формулировке леммы. Лемма 3 доказана.

4. Монотонные случаи полиномиальной разрешимости задачи РР

Лемма 4. Для любого $H \in \{B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, B_{1+}^+, B_1^{++}\}$ задача РР полиномиально разрешима для графов из класса $\text{Free}_s(\{H\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для графов из $\text{Free}_s(\{H\})$ задача РР полиномиально сводится к той же задаче в классе $\text{Free}_s(\{H, T_{5,5,5}\})$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из $\text{Free}_s(\{H\})$, содержащие подграф $T_{5,5,5}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф.

Если $N(x_1) \setminus V(T_{5,5,5}) \neq \emptyset$, то $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, B_{1+}^+, B_1^{++} \rangle$. То же самое верно, если $(N(x_1) \cap V(T_{5,5,5})) \setminus \{v, x_2, y_1, z_1\} \neq \emptyset$ или если $N(x_1) = \{v, x_2, y_1, z_1\}$. Такие же рассуждения можно провести и относительно вершин y_1 и z_1 , поэтому можно считать, что эти случаи не реализуются. Тем самым для любой вершины $u \in \{x_1, y_1, z_1\}$ либо $\deg(u) = 2$,

либо $\deg(u) = 3$ и в $\{x_1, y_1, z_1\} \setminus \{u\}$ существует сосед вершины u . Такие же рассуждения показывают, что вершина v не смежна с вершинами из $T_{5,5,5}$, отличными от $x_1, y_1, z_1, x_5, y_5, z_5$. При этом если v смежна, например, с x_5 , то x_5 аналогична x_1 (эти вершины взаимозаменяемы) и $\deg(x_5) = \deg(x_1) = 2$.

Предположим, что $\Delta(G) \geq 4$. Поскольку G несжимаемый, $N(v)$ содержит не менее двух вершин степени $\Delta(G)$. Пусть u — произвольная такая вершина. Понятно, что $u \notin V(T_{5,5,5})$ и u не смежна ни с одной из вершин x_1, y_1, z_1 . Ввиду несжимаемости графа G существуют такие различные вершины $u_1, u_2 \in N(u) \setminus \{v\}$, что $\deg(u_1) = \Delta(G)$. Нетрудно видеть, что если хотя бы одна из вершин u_1 и u_2 принадлежит $V(T_{5,5,5})$, то $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^+B_{1+}^+, {}^+B_1^{++} \rangle$. Можно считать, что $u_1, u_2 \notin V(T_{5,5,5})$. Тогда $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++} \rangle$. Поскольку $\deg(u_1) = \Delta(G) \geq 4$, существует сосед u' вершины u_1 , отличный от каждой из вершин v, u, u_2 . Тогда $\langle G; {}^+B_{1+}^+, {}^+B_1^{++} \rangle$.

Предположим, что $\Delta(G) = 3$. Ввиду несжимаемости G и симметрии можно считать, что $x_1 y_1 \in E$. Пусть $\deg(z_1) = 2$, иначе $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^+B_{1+}^+, {}^+B_1^{++} \rangle$. Стынем треугольник (v, x_1, y_1) в вершину v^* и получим граф G^* . Понятно, что $\chi'(G) = 3 \Leftrightarrow \chi'(G^*) = 3$. Если среди x_2, y_2 имеется не более одной вершины степени 3, то

$$\chi'(G^*) \leq 3 \Leftrightarrow \chi'(G^* \setminus \{v^*\}) \leq 3, \quad \text{причём } G^* \setminus \{v^*\} \cong G \setminus \{v, x_1, y_1\}.$$

Значит, $\deg(x_2) = \deg(y_2) = 3$ и $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^+B_{1+}^+, {}^+B_1^{++} \rangle$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Для любого $H \in \{B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+\}$ задача РР полиномиально разрешима для графов из класса $\text{Free}_s(\{H\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для графов из $\text{Free}_s(\{H\})$ задача РР полиномиально сводится к той же задаче в классе $\text{Free}_s(\{H, T_{7,7,7}\})$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из $\text{Free}_s(\{H\})$, содержащие подграф $T_{7,7,7}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф.

Предположим, что среди x_2, y_2, z_2 есть хотя бы две вершины степени не менее чем 3, скажем, x_2 и y_2 . Если неверно, что

$$(x_2 v \in E \vee x_2 y_1 \in E \vee x_2 z_1 \in E) \wedge (y_2 v \in E \vee y_2 x_1 \in E \vee y_2 z_1 \in E),$$

то $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+ \rangle$. Если данное условие верно, то ввиду симметрии порождаются только шесть случаев:

$$x_2 z_1 \in E, y_2 z_1 \in E; \quad x_2 v \in E, y_2 x_1 \in E; \quad x_2 v \in E, y_2 z_1 \in E;$$

$$x_2 y_1 \in E, y_2 z_1 \in E; \quad x_2 v \in E, y_2 v \in E; \quad x_2 y_1 \in E, y_2 x_1 \in E.$$

В первых четырёх случаях выполнено $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+ \rangle$.

В пятом случае имеем $\langle G; B_2^{++}, {}^+B_2^+ \rangle$. Можно считать, что $\deg(x_2) = \deg(y_2) = 3$. Ввиду несжимаемости G выполнено $(\deg(x_1) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_3) = \Delta(G))$, где $\Delta(G) \geq 5$. Если $\deg(x_1) \geq 5$, то существует сосед x_1 , не принадлежащий $\{v, x_2, x_3, y_1\}$, и $\langle G; B_{2+}^+ \rangle$. Если $\deg(x_3) \geq 5$, то существует сосед x_3 , не принадлежащий $\{v, x_1, x_2, x_4\}$, и $\langle G; B_{2+}^+ \rangle$.

В шестом случае можно считать, что $\deg(x_2) = \deg(y_2) = 3$. Тогда либо $\deg(x_3) \geq 3$, либо $\deg(x_4) \geq 3$ ввиду несжимаемости G , в каждом из этих случаев $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+ \rangle$.

Предположим, что среди x_2, y_2, z_2 имеется не более одной вершины степени не менее чем 3. Тогда ввиду несжимаемости G можно предполагать, что $\deg(x_2) = \deg(y_2) = 2$ и

$$\deg(x_1) = \deg(y_1) = \deg(x_3) = \deg(y_3) = \Delta(G).$$

Можно считать, что никакая из вершин x_1, y_1 не смежна ни с какой из вершин $V(T_{7,7,7}) \setminus \{v, x_1, y_1, z_1, z_2, x_3, y_3, z_3, x_7, y_7, z_7\}$, иначе $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+ \rangle$. Если $x_1x_3 \in E$ или $y_1y_3 \in E$, то $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+ \rangle$. Если $x_1y_3 \in E$ или $x_1z_3 \in E$, то $\langle G; B_2^{++}, {}^+B_2^+ \rangle$. Вместе с тем, в этих случаях выполнено $\langle G; B_{2+}^+ \rangle$, для чего достаточно вспомнить, что $\deg(x_3) \geq 3$. Тем самым можно считать, что никакая из вершин x_1, y_1 не смежна ни с какой из вершин x_3, y_3, z_3 .

Если $x_1y_1 \in E$ или $x_1z_1 \in E$, то $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+ \rangle$, а если $vx_3 \in E$, то $\deg(x_3) \geq 4$. Далее считаем, что $x_1y_1 \notin E, x_1z_1 \notin E$. Аналогично, используя вершину y_3 , можно показать, что $y_1z_1 \notin E$. Ввиду несжимаемости G выполнено

$$\exists x'_1 \in N(x_1) \setminus \{v, x_2\} \exists y'_1 \in N(y_1) \setminus \{v, y_2\}: \deg(x'_1) = \deg(y'_1) = \Delta(G).$$

Дополнительно предположим, что $x'_1 \neq y'_1$. Тогда $\langle G; B_2^{++}, {}^+B_2^+ \rangle$. Если $x'_1z_1 \in E$ или $y'_1z_1 \in E$, то $\langle G; B_{2+}^+ \rangle$. Кроме того, пусть ни одна из вершин x'_1 и y'_1 не смежна с z_1 . Если $x'_1z_2 \in E$, то $\langle G; B_{2+}^+ \rangle$. Случай $x'_1y_2 \in E$ невозможен, так как y_2 смежна только с y_1 и y_3 , которые не могут совпадать с x'_1 . Если же $x'_1z_2 \notin E$, то $\langle G; B_{2+}^+ \rangle$, для чего достаточно использовать $N[x'_1] \cup \{v, y_1, y_2, z_1, z_2\}$, а также заметить, что $\Delta(G) \geq 4$, если $x'_1v \in E$.

Дополнительно предположим, что $x'_1 = y'_1$. Напомним, что $\deg(x_3) = \Delta(G) \geq 3$. Тогда $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+ \rangle$, в чём легко убедиться, рассматривая по отдельности три случая, когда x_3 смежна хотя бы с одной из вершин v, x'_1 и когда она не смежна ни с одной из них. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Задача РР полиномиально разрешима для графов из класса $\text{Free}_s(\{B_3^+\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для графов из $\text{Free}_s(\{B_3^+\})$ задача РР полиномиально сводится к той же задаче в классе $\text{Free}_s(\{B_3^+, T_{7,7,7}\})$.

Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из $\text{Free}_s(\{B_3^+\})$, содержащие подграф $T_{7,7,7}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф.

Предположим, что среди x_3, y_3, z_3 есть хотя бы две вершины степени не менее чем 3, скажем, x_3 и y_3 . Если неверно, что

$$(x_3v \in E \vee x_3x_1 \in E \vee x_3y_1 \in E \vee x_3z_1 \in E) \\ \wedge (y_3v \in E \vee y_3y_1 \in E \vee y_3x_1 \in E \vee y_3z_1 \in E),$$

то $\langle G; B_3^+ \rangle$. Если данное условие верно, то ввиду симметрии порождаются ровно 10 попарно неэквивалентных случаев. Нетрудно видеть, что во всех этих случаях, кроме $x_3v \in E, y_3v \in E; x_3x_1 \in E, y_3x_1 \in E; x_3z_1 \in E, y_3z_1 \in E$, выполнено $\langle G; B_3^+ \rangle$.

Рассмотрим случай, когда $x_3v \in E, y_3v \in E$. Можно считать, что $\deg(x_3) = \deg(y_3) = 3$, иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. Ввиду несжимаемости G выполнено $\deg(x_2) = \Delta(G) \vee \deg(x_4) = \Delta(G)$, где $\Delta(G) \geq 5$. Если $\deg(x_2) \geq 5$, то существует сосед x_2 , не принадлежащий $\{v, x_1, x_3, y_2, y_4\}$, и $\langle G; B_3^+ \rangle$. Если $\deg(x_4) \geq 5$, то существует сосед x_4 , не принадлежащий $\{v, x_3, x_5, y_2, y_4\}$, и $\langle G; B_3^+ \rangle$.

Рассмотрим случай, когда $x_3x_1 \in E, y_3x_1 \in E$. Ясно, что

$$y_2v \notin E, \quad y_2y_4 \notin E, \quad y_4x_2 \notin E, \quad y_4x_4 \notin E,$$

иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. Можно считать, что $\deg(x_3) = \deg(y_3) = 3$, иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. Ввиду несжимаемости G выполнено $(\deg(y_2) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_4) = \Delta(G))$, где $\Delta(G) \geq 4$. Если $\deg(y_2) = \Delta(G)$, то существует сосед y_2 , не принадлежащий $\{y_1, y_3, x_1, x_2\}$, и $x_4y_2 \notin E, \langle G; B_3^+ \rangle$. Если $\deg(y_4) = \Delta(G)$, то существует сосед y_4 , не принадлежащий $\{y_3, y_5, x_1\}$, и $\langle G; B_3^+ \rangle$.

Рассмотрим случай, когда $x_3z_1 \in E, y_3z_1 \in E$. Ясно, что

$$y_2v \notin E, \quad y_2x_i \notin E, \quad i = \overline{1, 5}, \quad y_2y_4 \notin E, \quad y_2y_5 \notin E,$$

$$y_2z_j, \quad j = \overline{2, 5}, \quad y_4x_i \notin E, \quad i = \overline{1, 5}, \quad y_4y_1 \notin E, \quad y_4z_j, \quad j = \overline{2, 5},$$

иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. Ввиду несжимаемости G выполнено $(\deg(y_2) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_4) = \Delta(G))$, где $\Delta(G) \geq 4$. Если $\deg(y_2) = \Delta(G)$, то существует сосед y_2 , не принадлежащий $V(T_{5,5,5})$, и $\langle G; B_3^+ \rangle$. Если $\deg(y_4) = \Delta(G)$, то существует сосед y_4 , не принадлежащий $V(T_{5,5,5})$, и $\langle G; B_3^+ \rangle$.

Предположим, что среди x_3, y_3, z_3 имеется не более одной вершины степени не менее чем 3. Тогда ввиду несжимаемости G можно предполагать, что $\deg(x_3) = \deg(y_3) = 2, \deg(x'_2) = \deg(y'_2) = \Delta(G)$,

$$\deg(x_2) = \deg(y_2) = \deg(x_4) = \deg(y_4) = \Delta(G),$$

$$N(x_2) \supseteq \{x'_2, x_1, x_3\}, \quad N(y_2) \supseteq \{y'_2, y_1, y_3\}.$$

Ясно, что никакая из вершин x_2, y_2, z_2 не смежна ни с одной вершиной из $\{x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6, z_3, z_4, z_5, z_6\}$, иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. По той же причине $x_4 z_3 \notin E, y_4 z_3 \notin E$.

Дополнительно предположим, что $x_2 y_2 \in E$. Тогда $x_4 y_1 \in E, y_4 x_1 \in E, \Delta(G) = 3$, иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$, но тогда $\langle G; B_3^+ \rangle$.

Дополнительно предположим, что $x_2 y_1 \in E$. Тогда $x_4 y_1 \in E, x_4 v \in E, \Delta(G) = 4$, иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. Вершина x_2 имеет соседа, отличного от каждой из вершин $y_1, v, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$, т. е. $\langle G; B_3^+ \rangle$.

Дополнительно предположим, что $x_2 v \in E$. Ясно, что $x_4 x_1 \notin E$, иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. Тогда $x_4 y_1 \in E, x_4 z_1 \in E$, иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. Тем самым $\langle G; B_3^+ \rangle$.

Итак, x_2 не смежна ни с одной из вершин $V(T_{7,7,7}) \setminus \{x_1, x_3, x_7, y_7, z_1, z_2, z_7\}$. Из соображений симметрии можно считать, что y_2 не смежна ни с одной из вершин $V(T_{7,7,7}) \setminus \{y_1, y_3, x_7, y_7, z_1, z_2, z_7\}$. Нетрудно видеть, что каждое из множеств $N(x'_2) \setminus \{v, x_2\}$ и $N(y'_2) \setminus \{v, y_2\}$ содержит не менее двух элементов.

Дополнительно предположим, что $x'_2 \neq y'_2$. Рассмотрим рёбра, исходящие из x'_2 . В каждом из случаев $x'_2 x_1 \in E, x'_2 y_1 \in E$ и $x'_2 z_1 \in E$ сразу получается, что $\langle G; B_3^+ \rangle$. То же самое в случае, когда в G нет ни одного из указанных рёбер. При этом мы используем только условие $\deg(x'_2) = \Delta(G)$, но не используем $\deg(y'_2) = \Delta(G)$.

Дополнительно предположим, что $x'_2 = y'_2$. Тогда $\Delta(G) = 3$, поскольку при $\Delta(G) \geq 4$ можно выбрать x'_2 и y'_2 так, что $x'_2 \neq y'_2$ и $\deg(x'_2) = \Delta(G)$. Ввиду несжимаемости графа G выполнено $\deg(x_1) = \deg(y_1) = 3$. Можно считать, что $x_1 x'_2 \notin E$. Тогда $x_1 y_1 \in E$, иначе $\langle G; B_3^+ \rangle$. Поскольку $\deg(x_4) = 3$, то $\langle G; B_3^+ \rangle$. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Задача РР полиномиально разрешима для графов из класса $\text{Free}_s(\{B_4\})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для графов из $\text{Free}_s(\{B_4\})$ задача РР полиномиально сводится к той же задаче в классе $\text{Free}_s(\{B_4, T_{7,7,7}\})$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из $\text{Free}_s(\{B_4\})$, содержащие подграф $T_{7,7,7}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф.

Предположим, что среди x_4, y_4, z_4 есть хотя бы две вершины степени не менее чем 3, скажем, x_4 и y_4 . Тогда $\langle G; B_4 \rangle$, если неверно, что

$$(x_4 v \in E \vee x_4 x_1 \in E \vee x_4 x_2 \in E \vee x_4 y_1 \in E \vee x_4 z_1 \in E) \\ \wedge (y_4 v \in E \vee y_4 y_1 \in E \vee y_4 y_2 \in E \vee y_4 x_1 \in E \vee y_4 z_1 \in E).$$

Если данное условие верно, то порождаются ровно 15 попарно неэквивалентных случаев и во всех из них, кроме

$$y_4 v \in E, x_4 v \in E; \quad y_4 y_1 \in E, x_4 v \in E; \quad y_4 x_1 \in E, x_4 x_1 \in E;$$

$$y_4x_1 \in E, x_4x_2 \in E; \quad x_4z_1 \in E, y_4z_1 \in E,$$

выполнено $\langle G; B_4 \rangle$.

Дополнительно предположим, что $y_4v \in E, x_4v \in E$. Тогда либо $\deg(x_4) = 3$, либо $\deg(x_4) = 4, x_4x_1 \in E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Если $\deg(x_4) = 4, x_4x_1 \in E$, то $\deg(x_1) < \Delta(G)$. Действительно, имеем $\Delta(G) \geq 5$, и если $\deg(x_1) = \Delta(G)$, то $\langle G; B_4 \rangle$, поэтому $(\deg(x_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_5) = \Delta(G))$ ввиду несжимаемости G , независимо от того, чему равна степень вершины x_4 . В силу симметрии выполнено $(\deg(y_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_5) = \Delta(G))$.

Дополнительно предположим, что $x_4z_1 \in E, y_4z_1 \in E$. Данный случай разбирается полностью аналогично предыдущему.

Дополнительно предположим, что $y_4y_1 \in E, x_4v \in E$. Тогда либо $\deg(y_4) = 3$, либо $\deg(y_4) = 4, y_4v \in E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Аналогично рассуждениям из первого случая можно показать, что $(\deg(y_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_5) = \Delta(G))$. Так как не выполняется $\langle G; B_4 \rangle$, то либо $\deg(x_4) = 3$, либо $\deg(x_4) = 4, x_4y_1 \in E$. Если $\deg(x_4) = 3$, то ввиду несжимаемости G выполнено $(\deg(x_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_5) = \Delta(G))$. Если $\deg(x_4) = 4, x_4y_1 \in E$, то $\deg(y_4) = 3$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Тогда $\deg(y_3) = \Delta(G) \geq 4$ ввиду несжимаемости G , поэтому $\langle G; B_4 \rangle$.

Дополнительно предположим, что $y_4x_1 \in E, x_4x_1 \in E$. Тогда либо $\deg(y_4) = 3$, либо $\deg(y_4) = 4, y_4v \in E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Если $\deg(y_4) = 4, y_4v \in E$, то этот вариант разобран в третьем случае. Если $\deg(y_4) = 3$, то ввиду несжимаемости G выполнено $(\deg(y_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_5) = \Delta(G))$. Так как не выполняется $\langle G; B_4 \rangle$, то либо $\deg(x_4) = 3$, либо $\deg(x_4) = 4, x_4x_2 \in E$. Если $\deg(x_4) = 4, x_4x_2 \in E$, то $\langle G; B_4 \rangle$, так как $\deg(y_3) = \Delta(G)$. Если $\deg(x_4) = 3$, то $(\deg(x_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_5) = \Delta(G))$ ввиду несжимаемости G .

Дополнительно предположим, что $y_4x_1 \in E, x_4x_2 \in E$. Тогда либо $\deg(x_4) = 3$, либо $\deg(x_4) = 4, x_4x_1 \in E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Вариант $\deg(x_4) = 4, x_4x_1 \in E$ разобран в предыдущем случае. Если $\deg(x_4) = 3$, то $(\deg(x_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_5) = \Delta(G))$ ввиду несжимаемости G . Так как не выполняется $\langle G; B_4 \rangle$, то $\deg(y_4) = 3$. Ввиду несжимаемости графа G имеем $(\deg(y_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_5) = \Delta(G))$.

Итак, получаем

$$(\deg(x_3) = \Delta(G) \vee \deg(x_5) = \Delta(G)) \wedge (\deg(y_3) = \Delta(G) \vee \deg(y_5) = \Delta(G)).$$

Тогда нетрудно видеть, что в каждом из четырёх возможных случаев возникает подграф B_4 .

Предположим, что среди x_4, y_4, z_4 имеется не более одной вершины степени не менее чем 3. Тогда ввиду несжимаемости G можно предполагать, что $\deg(x_4) = \deg(y_4) = 2, \deg(x'_3) = \deg(y'_3) = \Delta(G)$,

$$\deg(x_3) = \deg(y_3) = \deg(x_5) = \deg(y_5) = \Delta(G),$$

$$N(x_3) \supseteq \{x'_3, x_2, x_4\}, \quad N(y_3) \supseteq \{y'_3, y_2, y_4\}.$$

Ясно, что x_3 не смежна ни с одной из вершин множества $V(T_{7,7,7}) \setminus \{v, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_4, x_7, y_7, z_7\}$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Аналогично вершина y_3 не смежна ни с одной из вершин множества $V(T_{7,7,7}) \setminus \{v, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, y_4, x_7, y_7, z_7\}$.

Дополнительно предположим, что $x_3y_2 \in E$. Тогда либо $x_2y_5 \in E$, $\Delta(G) = 3$, либо $y_5x_2 \in E$, $y_5y_2 \in E$, $\Delta(G) = 4$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. В первом случае обязательно $x_5y_6 \in E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Тогда $\langle G; B_4 \rangle$. Во втором случае $x_5x_2 \in E$, $x_5y_6 \in E$, поэтому $\langle G; B_4 \rangle$. Тем самым $x_3y_2 \notin E$. Аналогично можно доказать, что $y_3x_2 \notin E$.

Дополнительно предположим, что $x_3y_1 \in E$. Тогда $y_5v \notin E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. По той же причине $y_5y_2 \in E$, $\Delta(G) = 3$ или $y_5y_2 \in E$, $y_5y_1 \in E$, $\Delta(G) = 4$. В обоих случаях $x_5x_1 \in E$ или $x_5z_1 \in E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$, но тогда $\langle G; B_4 \rangle$. Аналогично можно доказать, что $y_3x_1 \notin E$.

Дополнительно предположим, что $x_3v \in E$. Существует сосед вершины y_3 , одновременно отличный от y_1 и от v . Тогда $\langle G; B_4 \rangle$. Далее всюду считаем, что $x_3v \notin E$, $y_3v \notin E$.

Дополнительно предположим, что $x'_3 = y'_3$. Ясно, что $x'_3 \neq z_1$. Тогда $x_3x_1 \notin E$, $y_3y_1 \notin E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Каждый элемент множества $N(x'_3) \setminus \{x_3, y_3\}$ должен принадлежать множеству $\{v, x_1, y_1, z_1\}$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Выполнено $\Delta(G) = 3$, иначе $\deg(x_3) = \deg(y_3) \geq 4$ и $\langle G; B_4 \rangle$. Тем самым $N(x'_3) = \{x_3, y_3, t\}$, где $t \in \{x_1, y_1, z_1\}$, и $\langle G; B_4 \rangle$, в чём можно убедиться, используя одно из множеств $N[x_5]$ или $N[y_5]$.

Дополнительно предположим, что $x'_3 \neq y'_3$. Нетрудно видеть, что каждое из множеств $N(x'_3) \setminus \{v, x_3\}$ и $N(y'_3) \setminus \{v, y_3\}$ содержит не менее двух элементов. Если неверно, что

$$(x'_3x_1 \in E \vee x'_3x_2 \in E \vee x'_3y_1 \in E \vee x'_3z_1 \in E) \\ \wedge (y'_3y_1 \in E \vee y'_3y_2 \in E \vee y'_3x_1 \in E \vee y'_3z_1 \in E),$$

то $\langle G; B_4 \rangle$. Если данное условие верно, то порождаются ровно 9 неэквивалентных случаев и во всех из них $\langle G; B_4 \rangle$. Лемма 7 доказана.

5. Полиномиальная разрешимость задачи РР для некоторых классов графов максимальной степени не менее чем 4

Лемма 8. Для любого $H \in \{B_1^* + P_2, {}^+B_1^*, B_1^{+*}\}$ задача РР полиномиально разрешима в множестве графов

$$\{G \mid G \in \text{Free}_s(\{H\}), \Delta(G) \geq 4\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Пусть $H = B_1^* + P_2$. В лемме 8 из [6] доказано, что задача РР полиномиально разрешима в множестве графов

$$\{G \mid G \in \text{Free}_s(\{B_1^*\}), \Delta(G) \geq 4\}.$$

Отсюда и из леммы 3 следует справедливость данной леммы при $H = B_1^* + P_2$.

II. Пусть $H = {}^+B_1^*$. Можно рассматривать только несжимаемые графы из

$$\{G \mid G \in \text{Free}_s(\{H\}), \Delta(G) \geq 4\},$$

содержащие подграф B_1^* . Пусть G — такой граф, в котором имеется подграф B_1^* , где x, y, z — вершины степени 3 этого подграфа B_1^* , $xy, yz \in E(B_1^*)$, x', x'', y', z', z'' — листья B_1^* , смежные с x, y, z соответственно. Так как $\neg\langle G; {}^+B_1^* \rangle$, каждый сосед вершин x', x'', z', z'' принадлежит $V(B_1^*)$. По той же причине для любого элемента $u \in (N(x) \cup N(z)) \setminus V(B_1^*)$ выполнено $N(u) \subseteq V(B_1^*)$, поэтому не существует путей (y, y_1, y_2) и (y, y'_1, y'_2) , в которых $\{y_1, y_2\} \cap \{y'_1, y'_2\} = \emptyset$ и $y_1, y_2, y'_1, y'_2 \notin V({}^+B_1^*) \setminus \{y, y'\}$, иначе y была бы шарниром графа G .

Покажем, что граф $G \setminus V(B_1^*)$ пустой. Предположим, что он содержит ребро e . Поскольку y не является шарниром G , в G имеется простой путь

$$(v_1 \in \{x, z\}, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}), \quad v_k v_{k+1} = e,$$

не проходящий через y . С точностью до переобозначений можно считать, что любой такой путь проходит через y' , иначе $\langle G; {}^+B_1^* \rangle$. Если $v_i = y'$, $i \neq 2$, то $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ вместе с x, x', x'', y, z порождают надграф графа ${}^+B_1^*$, поэтому $v_2 = y'$. Тогда $N(y) = \{v_2, x, z\}$ или $N(y) = \{v_2, v_3, x, z\}$, иначе $\langle G; {}^+B_1^* \rangle$. Тем самым либо v_2 , либо v_3 является шарниром G .

Итак, $G \setminus V(B_1^*)$ пустой. Очевидно, что кликовая ширина любого пустого графа равна 1 и кликовая ширина любого графа не превосходит количества его вершин. Тогда

$$cw(G) \leq cw(G \setminus V(B_1^*)) + |B_1^*| + 1 \leq 10.$$

Отсюда и из леммы 1 следует справедливость этой леммы при $H = {}^+B_1^*$.

III. Пусть $H = B_1^{+*}$. По лемме 7 можно рассматривать только несжимаемые графы из

$$\{G \mid G \in \text{Free}_s(\{H\}), \Delta(G) \geq 4\},$$

содержащие подграф B_4 . Пусть $G = (V, E)$ — такой граф, в котором имеется подграф B_4 , где (x, y_1, y_2, y_3, z) — центральный 4-путь этого подграфа B_4 , а x_1, x_2 и z_1, z_2 — листья B_4 , смежные с x и z соответственно. Ясно, что

$$\begin{aligned} y_1 y_3 \notin E, \quad y_1 z_1 \notin E, \quad y_1 z_2 \notin E, \\ y_3 x_1 \notin E, \quad y_3 x_2 \notin E, \quad y_2 x \notin E, \quad y_2 z \notin E, \end{aligned}$$

иначе $\langle G; B_1^{+*} \rangle$. Ввиду несжимаемости графа G либо y_2 имеет соседа y'_2 степени $\Delta(G)$, отличного от y_1 и от y_3 , либо $\deg(y_1) = \deg(y_3) = \Delta(G)$.

Рассмотрим первый случай. Ситуация $y'_2 \notin \{x_1, x_2, z_1, z_2\}$ невозможна, иначе $\langle G; B_1^{+*} \rangle$, в чём можно убедиться, рассматривая всевозможные

значения для $|N(y'_2) \cap \{y_1, y_3\}| \in \{0, 1, 2\}$. Если $y'_2 \in \{x_1, x_2, z_1, z_2\}$, то ввиду симметрии можно предполагать, что $y'_2 = x_1$. Тогда $x_1x_2 \notin E$, $x_1z_1 \notin E$, $x_1z_2 \notin E$, иначе $\langle G; B_1^{+*} \rangle$. По той же причине x_1 не имеет соседа вне $V(B_4)$, поэтому $x_1y_1 \in E$, $x_1z \in E$, $\Delta(G) = 4$. Очевидно, что $\deg(y_3) = 2$, иначе $\langle G; B_1^{+*} \rangle$, но тогда $\deg(y_2) = 4$ ввиду несжимаемости G . Так как $\neg \langle G; B_1^{+*} \rangle$, то y_2 смежна хотя бы с одной из вершин z_1 и z_2 , скажем, с z_1 . По той же причине и так как $\Delta(G) = 4$, имеем $\deg(y_1) = 3$. Тогда $\deg(z_1) = 4$ ввиду несжимаемости G . Так как $\neg \langle G; B_1^{+*} \rangle$, то $z_1z_2 \notin E$, $z_1x_2 \notin E$, т. е. z_1 имеет соседа вне $V(B_4)$, но тогда $\langle G; B_1^{+*} \rangle$.

Рассмотрим второй случай. Предположим, что существует вершина $y'_1 \notin V(B_4)$, смежная с y_1 . Тогда $y_2x_1 \notin E$, $y_2x_2 \notin E$, $y_3x \notin E$, иначе $\langle G; B_1^{+*} \rangle$. Так как $\deg(y_3) \geq 4$, отсюда следует, что $\langle G; B_1^{+*} \rangle$. Тем самым $N(y_1) \setminus V(B_4) = N(y_3) \setminus V(B_4) = \emptyset$. Следовательно, можно считать, что $y_1x_1 \in E$, $y_3z_1 \in E$. Тогда $y_1z \notin E$, $y_3x \notin E$, иначе $\langle G; B_1^{+*} \rangle$. Тем самым выполнено $y_1x_2 \in E$, $y_3z_2 \in E$, $\Delta(G) = 4$. Так как $\neg \langle G; B_1^{+*} \rangle$, то $\deg(y_2) = 2$. По той же причине ни одна из вершин x, x_1, x_2, z, z_1, z_2 не имеет соседа вне $V(B_4)$. Значит, $V = V(B_4)$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Задача РР полиномиально разрешима в множестве графов $\{G \mid G \in \text{Free}_s(\{B_{1+}^*\}), \Delta(G) \geq 4\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что задача РР для указанного класса графов полиномиально сводится к той же задаче в классе $\text{Free}_s(\{B_{1+}^*, T_{7,7,7}\})$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из

$$\{G \mid G \in \text{Free}_s(\{B_{1+}^*\}), \Delta(G) \geq 4\},$$

содержащие подграф $T_{7,7,7}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф. Вершина x_1 не смежна ни с одной из вершин y_3 – y_6 и z_3 – z_6 , вершина y_1 не смежна ни с одной из вершин x_3 – x_6 и z_3 – z_6 , вершина z_1 не смежна ни с одной из вершин x_3 – x_6 и y_3 – y_6 , иначе $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Далее будут рассмотрены два важных варианта, которые обозначим через I и II. Множество $\{x_1, y_1, z_1\}$ обозначим через V_1 , множество $\{x_2, y_2, z_2\}$ — через V_2 , а множество $V(T_{7,7,7}) \setminus \{x_7, y_7, z_7\}$ — через $\widetilde{V}$.

I. Предположим, что

$$\begin{aligned} &((x_1y_2 \in E \vee x_1z_2 \in E) \wedge \deg(x_1) \geq 4) \\ &\vee ((y_1x_2 \in E \vee y_1z_2 \in E) \wedge \deg(y_1) \geq 4) \\ &\vee ((z_1x_2 \in E \vee z_1y_2 \in E) \wedge \deg(z_1) \geq 4). \end{aligned}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $x_1y_2 \in E$, $\deg(x_1) \geq 4$. Тогда

$$x_1x_i \notin E, i = \overline{3, 6}, \quad x_1z_1 \notin E, \quad x_1z_2 \notin E,$$

иначе $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. По той же причине либо $\deg(v) = 3$, либо $vy_2 \in E$ и

$$\deg(v) = \deg(x_1) = \deg(y_2) = 4,$$

либо $x_1y_1 \in E$, $vx_2 \in E$ и

$$\deg(v) = \deg(x_1) = 4, \quad \deg(y_2) = 3.$$

И.а. Дополнительно предположим, что $\deg(v) = 3$. Так как не выполняется $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $\deg(y_2) = 3$ или

$$x_1y_1 \in E, \quad x_2y_2 \in E, \quad \deg(x_1) = \deg(y_2) = 4.$$

И.а.1. Пусть $\deg(y_2) = 3$. Ввиду несжимаемости графа G выполнено $\deg(y_1) \geq 4$. Поскольку $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, имеем $x_1y_1 \in E$. По тем же причинам (ввиду несжимаемости G и того факта, что $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$) выполнено $\deg(x_1) = \deg(y_1) = 4 = \Delta(G)$. Тем самым $N(y_1) = \{v, x_1, y_2, y'_1\}$, $\deg(y'_1) = 4$ ввиду несжимаемости G . Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $y'_1x_2 \notin E$, поэтому $y'_1 = x_2$, иначе $N(y'_1) \setminus \{x_2, y_1, y_3\}$ содержит хотя бы два элемента и $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Ввиду несжимаемости G выполнено $\deg(x_2) = 4$, откуда следует, что $\langle G; B_{1+}^* \rangle$.

И.а.2. Пусть теперь $x_1y_1 \in E$, $x_2y_2 \in E$, $\deg(x_1) = \deg(y_2) = 4$. Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то либо $x_2y_1 \in E$, $\deg(x_2) = \deg(y_1) = 4$, либо $\deg(x_2) = 3$. В первом случае по той же причине и ввиду несжимаемости G выполнено $\deg(x_3) = \deg(y_3) = 2$, $\Delta(G) = 4$. Произвольная рёберная 4-раскраска с графа $G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2\}$ продолжается до рёберной 4-раскраски G . Для этого независимо от цветов рёбер x_3x_4 , y_3y_4 и рёбер, инцидентных z_1 , можно с точностью до перестановки цветов положить

$$c(vx_1) = c(x_2x_3) = 1, \quad c(vy_1) = c(y_2y_3) = 2.$$

Пусть

$$\begin{aligned} c(x_1x_2) &= 2, & c(y_1y_2) &= 1, \\ c(x_1y_1) &= c(x_2y_2) = 3, & c(x_1y_2) &= c(x_2y_1) = 4. \end{aligned}$$

Тогда получим рёберную 4-раскраску G , поэтому

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2\}) \leq 4.$$

Во втором случае ввиду несжимаемости G и того факта, что $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, выполнено $\deg(y_1) = 4$, $y_1y_3 \in E$, $\Delta(G) = 4$. Так как $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то

$$\deg(y_3) = 3, \quad \deg(x_3) = \deg(y_4) = 2.$$

Произвольная рёберная 4-раскраска с графа $G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3\}$ продолжается до рёберной 4-раскраски G . Для этого независимо от цветов рёбер x_3x_4 , y_4y_5 и рёбер, инцидентных z_1 , можно с точностью до перестановки цветов положить

$$c(vx_1) = 1, \quad c(x_2x_3) = c(vy_1) = c(y_3y_4) = 2.$$

Пусть

$$\begin{aligned} c(x_2y_2) = c(y_1y_3) = 1, \quad c(x_1y_2) = 2, \\ c(x_1x_2) = c(y_1y_2) = 3, \quad c(x_1y_1) = c(y_2y_3) = 4. \end{aligned}$$

Тогда получим рёберную 4-раскраску G , поэтому

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3\}) \leq 4.$$

I.b. Дополнительно предположим, что

$$vy_2 \in E, \quad \deg(v) = \deg(x_1) = \deg(y_2) = 4.$$

Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $x_1y_1 \in E$. По той же причине для каждой вершины $u \in \{x_2, y_3, z_1\}$ либо $\deg(u) = 2$, либо $uy_1 \in E$, причём $\deg(y_1) \leq 4$. Если y_1 смежна с вершиной $u \notin V(T_{7,7,7})$, то $\deg(u) = 2$ ввиду несжимаемости G и того факта, что $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, y_1, y_2\}) \leq 4.$$

I.c. Дополнительно предположим, что

$$x_1y_1 \in E, \quad vx_2 \in E, \quad \deg(v) = \deg(x_1) = 4, \quad \deg(y_2) = 3.$$

Так как G несжимаем и $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, имеем

$$\begin{aligned} (y_1x_2 \in E, \Delta(G) = 4) \\ \vee (y_1z_1 \in E, \deg(y_1) = 4, \deg(z_1) = \deg(x_2) = 3, \Delta(G) = 4). \end{aligned}$$

В первом случае выполнено $\deg(x_3) = \deg(y_3) = \deg(z_2) = 2$, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2\}) \leq 4.$$

Во втором случае выполнено $\deg(x_3) = \deg(y_3) = \deg(z_3) = 2$, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1\}) \leq 4.$$

Рассмотрение варианта I закончено.

II. Предположим, что

$$\begin{aligned} ((x_1y_1 \in E \vee x_1z_1 \in E) \wedge \deg(x_1) \geq 4) \\ \vee ((y_1x_1 \in E \vee y_1z_1 \in E) \wedge \deg(y_1) \geq 4) \\ \vee ((z_1x_1 \in E \vee z_1y_1 \in E) \wedge \deg(z_1) \geq 4). \end{aligned}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $x_1y_1 \in E$, $\deg(x_1) \geq 4$ и не реализуется случай I. Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, вершина v не смежна ни с одной из вершин $\widetilde{V} \setminus (V_1 \cup V_2)$.

Если $z_1y_1 \in E$, то $x_1z_1 \in E$, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Если $z_1x_1 \in E$, то ввиду несжимаемости G хотя бы одна из вершин v, y_1, z_1 имеет степень не менее чем 4. Если $\deg(y_1) \geq 4$ или $\deg(z_1) \geq 4$, то $y_1z_1 \in E$, поскольку $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Если $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 3$, то по той же причине и ввиду несжимаемости G выполнено $vu \in E$, $\deg(u) = \Delta(G)$. Если $u \notin \widetilde{V}$, то u смежна не более чем с одним элементом из V_2 , а если $ux_1 \in E$, то $\Delta(G) \geq 5$. Тогда $N(u) \setminus \{v\}$ содержит два элемента, одновременно не принадлежащих $\widetilde{V}$, и $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Это верно, если $u \in V_2$, так как $\deg(u) \geq 4$.

Предположим, что $z_1x_1 \in E$, $z_1y_1 \in E$. Поскольку $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, выполнено $\Delta(G) = 4$. Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, для каждой вершины $u \in \{x_2, y_2, z_2\}$ либо $\deg(u) = 2$, либо $uv \in E$, $\deg(u) = 3$. Если $uv \in E$, $u \notin \widetilde{V}$, то $\deg(u) = 2$, так как G несжимаем и $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus (V_1 \cup \{v\})) \leq 4.$$

Далее считаем, что $z_1x_1 \notin E$, $z_1y_1 \notin E$. Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, отсюда получаем $vy_2 \notin E$, $vz_2 \notin E$.

Через N обозначим множество вершин, не принадлежащих $V_1 \cup V_2 \cup \{v\}$ и смежных хотя бы с одной из вершин v, y_1, z_1 . Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, каждый элемент из N смежен с x_1 . По той же причине N содержит не более одного элемента.

Ввиду несжимаемости графа G и $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$ равенство $N = \emptyset$ возможно, только если

$$\begin{aligned} (\deg(y_1) = \deg(z_1) = 3, \deg(v) = \deg(x_1) = 4, \\ vx_2 \in E, z_1x_2 \in E, x_1x_3 \in E) \vee (\deg(y_1) = 3, \deg(z_1) = 2, \\ \deg(v) = \deg(x_1) = \deg(x_2) = 4, vx_2 \in E, x_2y_2 \in E, x_1x_3 \in E). \end{aligned}$$

В первом случае, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $\deg(x_3) = 3$, $\deg(x_4) = 2$, поэтому G не несжимаем. Во втором случае, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $\deg(y_3) = 3$, $\deg(y_4) = 2$, поэтому G не несжимаем.

Дополнительно предположим, что $N = \{u'\}$. Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то

$$\deg(z_1) \leq 3, \quad \deg(y_1) \leq 4.$$

Поскольку v содержит не менее двух вершин степени $\Delta(G)$ (поскольку G несжимаем), по той же причине имеем

$$\begin{aligned} (\deg(v) = \deg(x_1) = 5, vx_2 \in E, \exists u'' \notin \widetilde{V}: u''v \in E, u''x_1 \in E) \\ \vee (\deg(v) \leq 4, \deg(x_1) = 4 = \Delta(G), vx_2 \notin E). \end{aligned}$$

Первый случай невозможен. Действительно, $\deg(x_1) = 4$, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, поэтому $\deg(x_2) = 5$ ввиду несжимаемости G . Тогда $\langle G; B_{1+}^* \rangle$.

Предположим, что $\deg(v) \leq 4$, $\deg(x_1) = 4 = \Delta(G)$, $vx_2 \notin E$. Ввиду несжимаемости G каждая из вершин v, y_1, y_2, z_1 смежна хотя бы с двумя вершинами степени 4, поэтому $vu' \in E$, $y_1u' \in E$, $x_1u' \in E$, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. По той же причине для каждой вершины $u \in \{x_2, y_2, z_1\}$ либо $\deg(u) = 2$, либо $uu' \in E$, $\deg(u) = 3$, причём если u смежна с вершиной $w \notin V_1 \cup \{v, x_2, y_2\}$, то $\deg(w) \leq 1$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus (V_1 \cup \{v, u'\})) \leq 4.$$

Рассмотрим случай, когда $vu' \in E$, $y_1u' \notin E$. Тогда $\deg(y_1) = 3$, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Ввиду несжимаемости G выполнено $\deg(u') = 4$. Тогда $\langle G; B_{1+}^* \rangle$ во всех случаях, кроме $u'z_1 \in E$, $u'x_2 \in E$. Если $u'z_1 \in E$, $u'x_2 \in E$, то $\deg(x_2) = 3$, $\deg(x_3) = 2$, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, поэтому G не несжимаем.

Рассмотрим случай, когда $vu' \notin E$, $y_1u' \in E$. Тогда $\deg(v) = 3$. Ввиду несжимаемости G выполнено $\deg(u') = 4$. Тогда $\langle G; B_{1+}^* \rangle$ во всех случаях, кроме $u'x_2 \in E$, $u'y_2 \in E$. Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $\deg(x_2) = 3$, $\deg(x_3) = 2$, поэтому G не несжимаем.

Рассмотрение варианта II закончено.

Далее считаем, что варианты I и II не реализуются. Ввиду несжимаемости графа G множество $N(v)$ содержит хотя бы две вершины v_1 и v_2 степени $\Delta(G)$. Ясно, что $|\{v_1, v_2\} \cap V_1| \leq 1$, иначе $\langle G; B_{1+}^* \rangle$.

Предположим, что существует вершина $v_i \notin \widetilde{V}$, скажем v_1 , смежная хотя бы с одной из вершин множества V_1 , скажем с x_1 . Тогда $v_2 \notin \{y_1, z_1\}$, иначе $\langle G; B_{1+}^* \rangle$.

Рассмотрим сначала случай, когда $v_1x_2 \in E$, $v_1x_3 \in E$. Нетрудно видеть, что $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, если $(v_2 \neq x_1) \vee (\Delta(G) \geq 5)$. Если $v_2 = x_1$, $\Delta(G) = 4$, то $x_1x_3 \in E$ и либо $\deg(x_2) = 3$, либо $x_2x_4 \in E$. В первом случае

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v_1, x_1, x_2\}) \leq 4.$$

Во втором случае, так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, либо $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 2$, либо $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 3$, $x_1y_1 \in E$. Вторым вариантом невозможен, так как тогда $\deg(y_2) = 4$ ввиду несжимаемости G , поэтому $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Пользуясь несжимаемостью G и тем, что $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, нетрудно убедиться в том, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v_1, x_1, x_2, x_3\}) \leq 4,$$

за исключением случая, когда существует копия подграфа $G[\{v, v_1, x_1, x_2, x_3, x_4\}]$, пересекающаяся с ним по вершине x_4 . Стянем эти два подграфа в вершину, получившийся граф обозначим через G^* . Нетрудно видеть, что $G^* \in \text{Free}_s(\{B_{1+}^*\})$ и $\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G^*) = 4$.

Предположим, что хотя бы одно из рёбер vx_2 , vx_3 не принадлежит E . Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, если $\Delta(G) \geq 5$, то v_1 смежна с каждой вершиной

из V_1 , причём $v_2 \notin \widetilde{V}$. Тогда v_2 не имеет соседа в V_1 , иначе $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Вспомнив, что $\deg(v_2) \geq 5$, заключаем, что $\langle G; B_{1+}^* \rangle$.

Дополнительно предположим, что $\Delta(G) = 4$. Поскольку $\neg \langle G; B_{1+}^* \rangle$, получаем $v_1 y_1 \notin E, v_1 z_1 \notin E$, v_1 имеет соседа в $\{x_2, x_3\}$, поэтому $v_2 = x_1$. Используя несжимаемость G и то, что $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, нетрудно выяснить, что

$$(v_1 x_2 \in E, \exists v', v'' \notin \widetilde{V}: v_1 v' \in E, v_2 v'' \in E) \\ \vee (v_1 x_2 \in E, \exists v' \notin \widetilde{V}: v_1 v' \in E, v_2 v' \in E).$$

В первом случае в силу $\neg \langle G; B_{1+}^* \rangle$ имеем

$$\deg(y_1) = \deg(z_1) = 2, \quad \deg(x_2) = 3, \quad \max(\deg(v'), \deg(v'')) \leq 1,$$

поэтому

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v_1, x_1, x_2\}) \leq 4.$$

Рассмотрим второй случай. Так как $\neg \langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $N(v') \subseteq \{v_1, v_2, x_2, x_3\}$. По той же причине выполнено

$$(\deg(v') = 2 \Rightarrow \deg(x_2) = 3) \wedge (v' x_2 \in E, v' x_3 \notin E \Rightarrow \deg(v') = 3) \\ \wedge (v' x_2 \notin E, v' x_3 \in E \Rightarrow \deg(x_2) = \deg(v') = 3).$$

Ввиду несжимаемости G и $\langle G; B_{1+}^* \rangle$ получаем $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 2$. Нетрудно проверить, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v_1, v_2, v'', x_2\}) \leq 4,$$

где $v'' = v'$ или $v'' = x_3$. Итак, можно считать, что если $v_i \notin \widetilde{V}$, то v_i не смежна ни с одним элементом из V_1 .

Так как $\neg \langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $|N(v_i) \cap V_2| \leq 1$, если $v_i \notin \widetilde{V}$, и если $v_i \in \widetilde{V}$, то v_i не смежна ни с одной вершиной других ветвей $T_{7,7,7}$ кроме листовых. Следовательно, среди $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)$ существует пара, каждый элемент которой не смежен ни с v_1 , ни с v_2 . Если $(N(v_1) \cup N(v_2)) \setminus \{v, v_1, v_2\}$ содержит не менее четырёх вершин, то существуют такие два элемента $v'_1, v'_2 \in N(v_1) \setminus \{v, v_2\}$, что $|N(v_2) \setminus \{v, v_1, v'_1, v'_2\}| \geq 2$. Значит, при $\Delta(G) \geq 5$ выполнено $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, за исключением ситуации, когда

$$\Delta(G) = 5, \quad v_1 v_2 \in E, \quad N(v_1) \setminus \{v_2\} = N(v_2) \setminus \{v_1\}.$$

В этом случае, поскольку $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, никакая вершина из $N(v_1) \setminus \{v, v_2\}$ не имеет соседа вне $N(v_1)$. Тогда v — шарнир графа G .

Предположим, что $\Delta(G) = 4$. Тогда либо ровно одна из вершин v_1, v_2 не принадлежит $\widetilde{V}$, а вторая принадлежит V_1 , либо они одновременно принадлежат $\widetilde{V}$. В первом случае можно считать, что $v_1 \notin \widetilde{V}$, $v_2 = x_1$ и $v_1 x_1 \notin E$, $N(v_1) \setminus \{v\} = N(v_2) \setminus \{v\}$. Тогда $N(v_2) \cap \widetilde{V} = \{v, x_2\}$, иначе $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. По той же причине множество $N(v_2) \setminus \{v\}$ независимо. Ввиду

несжимаемости G либо $\deg(x_2) = 4$, либо степень хотя бы одной из вершин $N(v_2) \setminus \tilde{V}$ равна 4, но тогда $\langle G; B_{1+}^* \rangle$.

Рассмотрим второй случай. Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, вершины v_1, v_2 одновременно принадлежат ровно одному из множеств $\{x_i\}_{i=1}^6$, $\{y_i\}_{i=1}^6$, $\{z_i\}_{i=1}^6$, скажем, первому из них. Тогда можно считать, что $v_1 = x_1$, так как $\Delta(G) = 4$. Покажем, что $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 2$. Рассмотрим только вершину y_1 . Поскольку $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $\deg(y_1) \leq 3$, $y_1 z_2 \notin E$, $y_1 x_2 \notin E$, поэтому $\deg(y_1) = 3$, только если $y_1 z_1 \in E$. Тогда $\deg(z_1) = 3$. Следовательно, $\deg(y_2) = 4$ ввиду несжимаемости G . Тогда $\langle G; B_{1+}^* \rangle$.

Так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $x_1 x_5 \notin E$, $x_1 x_6 \notin E$. По той же причине, если $v_1 v_2 \notin E$, то $N(v_1) \setminus \{v\} = N(v_2) \setminus \{v\}$. Тогда $v_2 \notin \{x_4, x_5, x_6\}$, поэтому $v_2 = x_3$, $\exists v' \notin \tilde{V} : v' x_1 \in E$, $v' x_3 \in E$. Поскольку $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то

$$(\deg(v') = 3, v' x_5 \in E, x_1 x_4 \in E, \deg(x_4) = 3) \vee (\deg(v') = 2, \deg(x_4) = 3).$$

Ввиду несжимаемости G выполнено $\deg(x_2) = 4$, но тогда $\langle G; B_{1+}^* \rangle$.

Дополнительно предположим, что $v_1 v_2 \in E$. Тогда $v_2 = x_i$, где $i \in \{2, 3, 4\}$, v_1 и v_2 имеют общего соседа кроме v . Поскольку $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$, то $i \neq 4$, а при $i = 3$ выполнено $x_1 x_4 \in E$. Если $i = 3$, то

$$N(x_2) \subseteq \{x_1, x_3, x_4, x_5\}, N(x_4) \subseteq \{x_1, x_2, x_3, x_5\}, x_2 x_5 \in E \Rightarrow \deg(x_5) = 3,$$

так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, x_3, x_4\}) \leq 4, \quad \text{если } x_2 x_5 \notin E,$$

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) \leq 4 \quad \text{иначе.}$$

Пусть $i = 2$ и v' — произвольный общий сосед вершин v_1 и v_2 , отличный от v . Ясно, что $v' \notin \tilde{V} \setminus \{x_3, x_4\}$. Если $v' \notin \tilde{V}$, то либо $x_1 x_3 \in E$, либо $N(x_1) = \{v, v', v^*, x_2\}$, где $v^* \notin \tilde{V}$. В первом случае

$$N(v') \subseteq \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad N(x_3) \subseteq \{x_1, x_2, v', x_4\},$$

так как $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Если хотя бы одно из рёбер $v' x_3$, $v' x_4$ не принадлежит E , то

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, v', x_1, x_2, x_3\}) \leq 4.$$

Если же $v' x_3 \in E$, $v' x_4 \in E$, то в силу несжимаемости G и $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$ нетрудно убедиться в том, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v', x_1, x_2, x_3\}) \leq 4,$$

за исключением случая, когда существует копия подграфа $G[\{v, v', x_1, x_2, x_3, x_4\}]$, пересекающаяся с ним по вершине x_4 . Стянем эти два подграфа в вершину, получившийся граф обозначим через G^{**} . Нетрудно видеть, что $G^{**} \in \text{Free}_s(\{B_{1+}^*\})$ и

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G^{**}) = 4.$$

Во втором случае имеем $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Далее считаем, что никакой общий сосед v_1 и v_2 не принадлежит $\widetilde{V}$.

Если $v' = x_4$, то $x_1x_3 \in E$, иначе $\langle G; B_{1+}^* \rangle$. По той же причине выполнено $\deg(x_3) = 3$ или $x_3x_5 \in E$. Нетрудно видеть, что в первом случае имеем

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, x_3, x_4\}) \leq 4.$$

Во втором случае в силу несжимаемости G и $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$ нетрудно убедиться в том, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) \leq 4,$$

за исключением случая, когда существует копия подграфа $G[\{v, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}]$, пересекающаяся с ним по вершине x_5 . Стянем эти два подграфа в вершину, получившийся граф обозначим через G^{***} . Нетрудно видеть, что $G^{***} \in \text{Free}_s(\{B_{1+}^*\})$ и

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G^{***}) = 4.$$

Если $v' = x_3$, то либо $x_1x_4 \in E$, либо существует вершина $v'_1 \notin \widetilde{V}$, смежная с v_1 . В первом случае обязательно $v_2x_4 \in E$, иначе $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, переходим к предыдущему случаю $v' = x_4$ и получаем те же два подслучая, что и ранее. Во втором случае выполнено $N(v'_1) \subseteq \{x_1, x_4\}$ ввиду несжимаемости G и $\neg\langle G; B_{1+}^* \rangle$. Тогда $\langle G; B_{1+}^* \rangle$, в чём нетрудно убедиться, вспомнив, что $\deg(x_2) = 4$. Лемма 9 доказана.

6. Основной результат работы

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. Пусть F — произвольный 8-рёберный лес, не принадлежащий множеству

$$\begin{aligned} & \{B_1^* + P_2 + O_n \mid n \geq 0\} \cup \{^+B_1^* + O_n \mid n \geq 0\} \\ & \cup \{B_1^{+*} + O_n \mid n \geq 0\} \cup \{B_{1+}^* + O_n \mid n \geq 0\}. \end{aligned}$$

Тогда задача РР полиномиально разрешима в классе $\text{Free}_s(\{F\})$. Если лес F принадлежит данному множеству, то задача РР полиномиально разрешима в классе $\{G \in \text{Free}_s(\{F\}) \mid \Delta(G) \geq 4\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F \in \mathcal{T}$, то задача РР полиномиально разрешима в классе $\text{Free}_s(\{F\})$ по леммам 1 и 2. Если $F \notin \mathcal{T}$, то $F = F' + O_n$ при некоторых $F' \in \mathcal{S}$ и n , где множество $\mathcal{S}$ определено в разд. 1. Тогда утверждение теоремы следует из лемм 3–9.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, No. 4. P. 718–720.
2. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса p -графа // Дискретный анализ. Вып. 3. Новосибирск: Ин-т математики, 1964. С. 25–30.
3. **Galby E., Lima P. T., Paulusma D., Ries B.** Classifying k -edge colouring for H -free graphs // Inf. Process. Lett. 2019. V. 146. P. 39–43.
4. **Malyshev D. S.** The complexity of the edge 3-colorability problem for graphs without two induced fragments each on at most six vertices // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 811–822.
5. **Малышев Д. С.** Классификация сложности задачи о рёберной раскраске для некоторого семейства классов графов // Дискрет. математика. 2016. Т. 28, вып. 2. С. 44–50.
6. **Малышев Д. С.** Полная сложностная дихотомия для запрещённых подграфов с 7 рёбрами в задаче о хроматическом индексе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2020. Т. 27, № 4. С. 104–130.
7. **Kamiński M., Lozin V. V.** Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles // Contrib. Discrete Math. 2007. V. 2, No. 1. P. 61–66.
8. **Schrijver A.** Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency. Heidelberg: Springer, 2003. 1879 p.
9. **Courcelle B., Makowsky J. A., Rotics U.** Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width // Theory Comput. Syst. 2000. V. 33, No. 2. P. 125–150.
10. **Gurski F., Wanke E.** Line graphs of bounded clique-width // Discrete Math. 2007. V. 307, No. 22. P. 2734–2754.
11. **Kobler D., Rotics U.** Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width // Discrete Appl. Math. 2003. V. 126, No. 2–3. P. 197–223.
12. **Boliac R., Lozin V. V.** On the clique-width of graphs in hereditary classes // Algorithms and Computation. Proc. 13th Int. Symp. (Vancouver, Canada, Nov. 21–23, 2002). Heidelberg: Springer, 2002. P. 44–54. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 2518).
13. **Corneil D. G., Rotics U.** On the relationship between clique-width and tree-width // SIAM J. Comput. 2005. V. 34, No. 4. P. 825–847.
14. **Gurski F., Wanke E.** The tree-width of clique-width bounded graphs without $K_{n,n}$ // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Proc. 26th Int. Workshop (Konstanz, Germany, June 15–17, 2000). Heidelberg: Springer, 2000. P. 196–205. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 1928).

Малышев Дмитрий Сергеевич
Дугинов Олег Иванович

Статья поступила
7 июля 2021 г.
После доработки —
4 февраля 2022 г.
Принята к публикации
7 февраля 2022 г.

SOME CASES OF POLYNOMIAL SOLVABILITY
FOR THE EDGE COLORABILITY PROBLEM GENERATED
BY FORBIDDEN 8-EDGE SUBCUBIC FORESTS

D. S. Malyshev^{1, a} and O. I. Duginov^{2, b}

¹ National Research University “Higher School of Economics”,
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

² Belarusian State University,
4 Nezavisimost Avenue, 220030 Minsk, Belarus

E-mail: ^adsmalyshev@rambler.ru, ^boduginov@gmail.com

Abstract. The edge-coloring problem, is to minimize the number of colors sufficient to color all the edges of a given graph so that any adjacent edges receive distinct colors. For all the classes defined by sets of forbidden subgraphs with 7 edges each, the complexity status of this problem is known. In this paper, we consider the case of prohibitions with 8 edges. It is not hard to see that the edge-coloring problem is NP-complete for such a class if there are no subcubic forests among its 8-edge prohibitions. We prove that forbidding any subcubic 8-edge forest generates a class with polynomial-time solvability of the edge-coloring problem, except for the cases formed by the disjunctive sum of one of 4 forests and an empty graph. For all the remaining four cases, we prove a similar result for the intersection with the set of graphs of maximum degree at least four. Illustr. 2, bibliogr. 14.

Keywords: monotone class, edge-coloring problem, computational complexity.

REFERENCES

1. I. Holyer, The NP-completeness of edge-coloring, *SIAM J. Comput.* **10** (4), 718–720 (1981).
2. V. G. Vizing, On an estimate of the chromatic index of a p -graph, *Discrete Analysis*, Vol. 3 (Inst. Mat. SO AN, Novosibirsk, 1964), pp. 25–30 [Russian].

This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Belarusian Republic Foundation for Basic Research (Project 20–51–04001 (F21RM–001)).

English version: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **16** (2) (2022).

3. **E. Galby, P. T. Lima, D. Paulusma, and B. Ries**, Classifying k -edge colouring for H -free graphs, *Inf. Process. Lett.* **146**, 39–43 (2019).
4. **D. S. Malyshev**, The complexity of the edge 3-colorability problem for graphs without two induced fragments each on at most six vertices, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **11**, 811–822 (2014).
5. **D. S. Malyshev**, Complexity classification of the edge coloring problem for a family of graph classes, *Diskretn. Mat.* **28** (2), 44–50 (2016) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **27** (2), 97–101 (2017)].
6. **D. S. Malyshev**, Complete complexity dichotomy for 7-edge forbidden subgraphs in the edge coloring problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **27** (4), 104–130 (2020) [Russian] [*J. Appl. Ind. Mat.* **14** (4), 706–721 (2020)].
7. **M. Kamiński and V. V. Lozin**, Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles, *Contrib. Discrete Math.* **2** (1), 61–66 (2007).
8. **A. Schrijver**, Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency (Springer, Heidelberg, 2003).
9. **B. Courcelle, J. A. Makowsky, and U. Rotics**, Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width, *Theory Comput. Syst.* **33** (2), 125–150 (2000).
10. **F. Gurski and E. Wanke**, Line graphs of bounded clique-width, *Discrete Math.* **307** (22), 2734–2754 (2007).
11. **D. Kobler and U. Rotics**, Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width, *Discrete Appl. Math.* **126** (2–3), 197–223 (2003).
12. **R. Boliac and V. V. Lozin**, On the clique-width of graphs in hereditary classes, in *Algorithms and Computation* (Proc. 13th Int. Symp., Vancouver, Canada, Nov. 21–23, 2002) (Springer, Heidelberg, 2002), pp. 44–54 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2518).
13. **D. Corneil and U. Rotics**, On the relationship between clique-width and treewidth, *SIAM J. Comput.* **34** (4), 825–847 (2005).
14. **F. Gurski and E. Wanke**, The tree-width of clique-width bounded graphs without $K_{n,n}$, in *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (Proc. 26th Int. Workshop, Konstanz, Germany, June 15–17, 2000) (Springer, Heidelberg, 2000), pp. 196–205 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 1928).

Dmitry S. Malyshev
Oleg I. Duginov

Received July 7, 2021
Revised February 4, 2022
Accepted February 7, 2022