ПРИЛОЖЕНІЕ АЛГЕБРЫ КЪ ГЕОМЕТРІИ

И

НАЧАЛА

АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРІИ

НА

ПЛОСКОСТИ

СОСТАВИЛЪ

А. ФРОЛОВЪ

ЧАСТЬ I.

ПРИЛОЖЕНІЕ АЛГЕБРЫ КЪ ГЕОМЕТРІИ

ПО ПРОГРАММѢ КАДЕТСКИХЪ КОРПУСОВЪ И РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩЪ

Изданіе осьмое, перепечатанное безъ измѣненія съ седьмаго исправленнаго и дополненнаго изданія.

ИЗДАНІЕ ТОВАРИЩЕСТВА М. О. ВОЛЬФЪ

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Гостиный дворъ, № 18

МОСКВА
Кузнецкій мостъ, № 12

1896

Типографія Товарищества М. О. Вольфъ
С.-Петербургъ

Дозволено цензурою Спб. 14 Августа 1896 г.

ОГЛАВЛЕНІЕ

стр.

Предметъ приложенія алгебры къ геометріи. 5

Выраженіе протяженій числами. 5

Опредѣленные и неопредѣленные геометрическіе вопросы. . . . 7

Ходъ рѣшенія геометрическихъ задачъ помощью алгебры:

А. Примѣры задачъ на вычисленіе. 9

Б. Примѣры задачъ на построеніе:

а) Раздѣлить прямую на двѣ части такъ, чтобы одна была болѣе другой на данную величину 13

б) На данномъ основаніи построить прямоугольникъ, равномѣрный данному квадрату 13

в) Данный треугольникъ раздѣлить пополамъ прямою, параллельною основанію. 15

г) Начертить прямоугольный треугольникъ, котораго одинъ катетъ менѣе другого на линію a и менѣе гипотенузы на линію b 17

Линейныя числа и формулы, или количества одного измѣренія. Обзоръ главнѣйшихъ геометрическихъ линейныхъ формулъ 20

Количества двухъ измѣреній; обзоръ формулъ, по которымъ вычисляются площади и поверхности. 21

Количества трехъ измѣреній; обзоръ формулъ, по которымъ вычисляются объемы 22

Количества 4-хъ, 5-ти и болѣе измѣреній. Количества нулеваго измѣренія 24

Однородные одночлены; однородный многочленъ. Число измѣреній алгебраическихъ дробей и радикаловъ 24

Свойства однородныхъ одночленовъ и многочленовъ 26

Однородность уравненій, получаемыхъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ. 27

Случай, когда однородность кажется нарушенною. Возстановленіе однородности . , ... 28

Построеніе формулъ:

стр.

А. Раціональныхъ 31
Б. Ирраціональныхъ 38
Построеніе корней квадратнаго уравненія 42
Построеніе формулъ, содержащихъ тригонометрическія величины. 47

Задачи для приложенія пріемовъ построенія формулъ и для изслѣдованія вопросовъ:

I. Даны прямая MN и внѣ ея двѣ точки F и G; найти такую точку O на линіи MN, чтобы прямыя OF и OG образовали съ этой линіей равные углы 53
II. Построить прямоугольный треугольникъ, зная его гипотенузу и сумму его катетовъ и высоты 59
III. Къ двумъ кругамъ провести общую касательную . . . 60
IV. Въ данномъ треугольникѣ вписать квадратъ 63
V. Раздѣлить прямую линію въ крайнемъ и среднемъ отношеніи 64
VI. Данный кругъ раздѣлить концентрическою окружностью въ крайнемъ и среднемъ отношеніи 66
VII. Отъ площади прямоугольной трапеціи отрѣзать часть, равную площади даннаго прямоугольника, посредствомъ прямой, параллельной основанію трапеціи 68
VIII. Шаръ пересѣчь плоскостью въ такомъ разстояніи отъ конца діаметра, перпендикулярнаго къ этой плоскости, чтобы вся поверхность отсѣченнаго сегмента была равна площади даннаго круга 69
IX. Шаръ и цилиндръ, поставленные на горизонтальную плоскость, пересѣчь другою горизонтальною плоскостью такъ, чтобы объемы этихъ тѣлъ, заключающіеся между плоскостями, находились въ данномъ отношеніи 70
X. Чрезъ точку, данную внутри прямого угла, провесть сѣкущую такъ, чтобы отрѣзанный ею треугольникъ имѣлъ данную площадь 73
Общіе выводы изъ предыдущихъ задачъ и особенно объ отрицательныхъ рѣшеніяхъ 76
Задачи для упражненій 77

ПРИЛОЖЕНІЕ АЛГЕБРЫ КЪ ГЕОМЕТРІИ

Предметъ приложенія алгебры къ геометріи.

§ 1. Приложеніе алгебры къ геометріи состоитъ въ рѣшеніи и изслѣдованіи геометрическихъ вопросовъ помощью алгебры.

Изслѣдовать вопросъ значитъ опредѣлить, когда онъ возможенъ или невозможенъ, сколько онъ имѣетъ рѣшеній и не представляетъ ли какихъ-нибудь замѣчательныхъ особенностей въ различныхъ частныхъ случаяхъ.

Выраженіе протяженій числами.

§ 1. Алгебраическія дѣйствія производятся, какъ извѣстно, надъ числами; поэтому, чтобы воспользоваться средствами алгебры для рѣшенія какого-нибудь геометрическаго вопроса, надо прежде всего имѣть способы для *выраженія числами* различныхъ протяженныхъ величинъ, какъ-то: линій, поверхностей и объемовъ, надъ которыми придется дѣйствовать по условіямъ вопроса. Эти способы состоятъ въ *измѣреніи* различныхъ протяженій и разсматриваются въ элементарной геометріи.

Измѣрить протяженіе значитъ опредѣлить его отношеніе къ другому однородному съ нимъ протяженію, принятому за мѣру или, что то-же, за единицу. Линіи измѣряются *линейными единицами*—верстами, саженями, футами и проч.; площади и поверхности измѣряются *квадратными* единицами, а объемы — *кубическими*.

Изъ всѣхъ протяженныхъ величинъ только прямыя линіи подлежатъ непосредственному измѣренію; измѣреніе же окружности, поверхностей и объемовъ приводится къ измѣренію нѣкоторыхъ прямыхъ, отъ которыхъ эти величины зависятъ. Элементарная геометрія выясняетъ эту зависимость и выражаетъ различными формулами. Такъ мы знаемъ, что длина окружности равна длинѣ діаметра, умноженной на число π; число квадратныхъ единицъ, содержащихся въ площади параллелограмма, равно произведенію чиселъ, выражающихъ длину его основанія и длину высоты, и проч. Установленіемъ такихъ формулъ геометрія уже вступаетъ до нѣкоторой степени въ область алгебры.

Чтобы обобщить вопросы и облегчить ихъ изслѣдованіе, въ алгебрѣ употребляютъ, какъ извѣстно, буквы вмѣсто опредѣленныхъ чиселъ; вслѣдствіе этого всякое вычисленіе заканчивается выводомъ *формулы*, выражающей искомую величину, а по формулѣ легко видѣть, какое вліяніе на искомую имѣетъ каждая изъ данныхъ величинъ. Поэтому и въ приложеніи алгебры къ рѣшенію какого-либо геометрическаго вопроса не измѣряютъ на самомъ дѣлѣ даже и прямыхъ линій, отъ которыхъ зависятъ протяженныя величины, участвующія въ вопросѣ, но только предполагаютъ эти линіи измѣренными, и число заключающихся въ нихъ единицъ обозначаютъ буквами.

Къ числу величинъ, надъ которыми приходится дѣйствовать въ приложеніяхъ алгебры къ геометріи, относятся также и углы. Для выраженія угловъ числами употребляются единицы двоякаго рода:

1. Въ элементарной геометріи за единицу угловъ принятъ прямой уголъ съ его подраздѣленіями на градусы, минуты и секунды.

2. Въ высшихъ частяхъ математики *за единицу угловъ принимается такой уголъ, которому отвѣчаетъ дуга, равная ея радіусу,* причемъ дуга предполагается описанною произвольнымъ радіусомъ изъ вершины угла между его сторонами. Градусная величина этого единичнаго угла можетъ быть найдена только по приближенію, ибо она зависитъ отъ несоизмѣримаго числа π*).

Въ обоихъ случаяхъ измѣреніе угловъ приводится къ измѣренію дугъ на основаніи теоремы: *углы пропорціональны дугамъ, описанымъ изъ ихъ вершинъ однимъ и тѣмъ же произвольнымъ радіусомъ*. Въ первомъ случаѣ всякій уголъ выражается именованнымъ числомъ, т. е. содержитъ въ себѣ столько же угловыхъ градусовъ, минутъ и секундъ, сколько въ отвѣчающей ему дугѣ

---

*) Пропорція $\dfrac{\text{окружность}}{\smile \text{1-чнаго угла, или } R} = \dfrac{360^\circ}{x^\circ}$, или $\dfrac{2\pi R}{R} = \dfrac{360^\circ}{x^\circ}$ даетъ: $x^\circ = \dfrac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44'',80\ldots$, причемъ взято $\pi = 3{,}1415926$.

содержится дуговыхъ градусовъ, минутъ и секундъ. Во второмъ случаѣ уголъ выражается *отвлеченнымъ числомъ*, именно *отношеніемъ отвѣчающей ему дуги къ радіусу*, т. е. въ длинѣ дуги единичнаго угла, какъ это видно изъ пропорціи:

$$\frac{\angle A}{\text{1-цѣ угловъ}} = \frac{\cup \text{ угла } A}{\cup \text{ 1-чнаго угла, или } R}.$$

При второмъ способѣ измѣренія угловъ прямой уголъ выразится числомъ $\frac{\pi}{2}$, ибо при $A = 90^\circ$ числитель второго отношенія будетъ равенъ $\frac{\pi R}{2}$.

Уголъ въ 45° выразится числомъ $\frac{\pi}{4}$, уголъ въ 30°—числомъ $\frac{\pi}{6}$, уголъ въ 1°—числомъ $\frac{\pi}{180}$ и проч.

Геометрическіе вопросы, въ которыхъ углы опредѣляются по ихъ зависимости отъ различныхъ прямыхъ линій и наоборотъ, составляютъ особый отдѣлъ приложенія алгебры въ геометріи — *тригонометрію.* Мы предполагаемъ, что читающіе этотъ курсъ уже знакомы съ прямолинейною тригонометріей.

Опредѣленные и неопредѣленные геометрическіе вопросы.

§ 3. Всякая задача, рѣшаемая помощію циркуля и линейки, *задача на построеніе,* приводитъ окончательно къ отысканію по даннымъ условіямъ или одной только точки, или послѣдовательнаго и конечнаго ряда точекъ, или же безчисленнаго множества точекъ, располагающихся на нѣкоторой линіи или поверхности, образующей ихъ *геометрическое мѣсто.* Въ двухъ первыхъ случаяхъ задача будетъ *опредѣленною*, а въ послѣднемъ *неопредѣленною.* Примѣры задачъ перваго рода:

а) *Описать окружность около треугольника.*

б) *Построить окружность, которая проходила бы чрезъ двѣ данныя точки* A *и* B *и касалась данной прямой* MN.

Первая разрѣшается построеніемъ единственной точки, равно удаленной отъ вершинъ треугольника; вторая приводитъ сначала къ отысканію точки касанія на прямой MN (получается двѣ точки), а потомъ къ построенію точки, равно удаленной отъ обѣихъ данныхъ A и B и отъ найденной точки касанія (всего два рѣшенія).

Примѣръ неопредѣленной задачи. *построить треугольникъ по данной сторонѣ* KL *и по данной суммѣ* PQ *двухъ другихъ сторонъ.* Неопредѣленность ея выражается тѣмъ, что можно найти сколько угодно точекъ, которыхъ разстоянія отъ концовъ стороны KL дадутъ въ суммѣ одну и ту-же длину PQ; мѣстомъ ихъ будетъ нѣкоторая кривая линія, не изучаемая въ начальной геометріи (эллипсъ) *).

§ 4. Къ опредѣленнымъ геометрическимъ вопросамъ слѣдуетъ еще отнести *вычисленіе* по даннымъ условіямъ: а) *величины* какого-либо протяженія (линіи, поверхности, объема), б) *отношенія* между однородными протяжными величинами и вообще какой-либо *зависимости* между ними **).

§ 5. Приложеніе алгебры къ рѣшенію и изслѣдованію опредѣленныхъ геометрическихъ вопросовъ будетъ разсмотрѣно въ первой части этого курса; вторую часть его составитъ ученіе о геометрическихъ мѣстахъ или *аналитическая геометрія.*

---

*) *Замѣчаніе.* Если въ опредѣленной задачѣ на построеніе одно изъ условій будетъ откинуто, то она обратится въ неопредѣленную и приведетъ къ построенію геометрическаго мѣста. Такъ, если въ примѣрѣ б) устранимъ условіе касанія къ прямой MN, то вопросъ сведется къ отысканію точки, равно удаленной отъ двухъ данныхъ A и B; такихъ точекъ найдется безчисленное множество, и мѣсто ихъ будетъ перпендикуляръ къ отрѣзку AB, возставленный изъ его средины. Если же въ задачѣ б) устроимъ условіе происхожденія искомой окружности чрезъ точку A, то отысканіе центра ея приведетъ къ построенію точки, равно удаленной отъ данной точки B и отъ данной прямой MN; но и такихъ точекъ безчисленное множество; мѣсто ихъ есть кривая, также неизучаемая въ начальной геометріи (парабола).

**) Подобныя *задачи на вычисленіе* встрѣчаются и въ начальной геометріи. Примѣры: а) опредѣленіе сторонъ и площадей правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ даннаго радіуса или описанныхъ около него; вычисленіе поверхностей и объемовъ шара и описанныхъ около него цилиндра и конуса; б) вычисленіе отношенія π окружности къ діаметру съ даннымъ приближеніемъ; б) вычисленіе зависимости между сторонами треугольника, между сторонами и діагоналями параллелограмма, и проч., и проч.

Ходъ рѣшенія опредѣленныхъ геометрическихъ задачъ помощію алгебры.

А. *Примѣры задачъ на вычисленіе.*

§ 6. Простѣйшія задачи на вычисленіе рѣшаются чрезъ непосредственное примѣненіе къ ихъ условіямъ подходящихъ теоремъ и формулъ. Таковы, напримѣръ, слѣдующія двѣнадцать:

1. Основанія трапеціи равны a и b линейнымъ единицамъ; вычислите среднюю хорду этой трапеціи.

2. Катеты равны a и b линейнымъ единицамъ; найдите величину гипотенузы и площадь треугольника.

3. Основаніе равнобедреннаго треугольника равно x единицамъ, и притомъ извѣстно, что высота его въ полтора раза меньше основанія; какими формулами выразятся высота треугольника, его остальные бока и площадь?

4. Перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, дѣлитъ эту послѣднюю на отрѣзки, равные a и x единицамъ; выразить формулами длину гипотенузы, перпендикуляра и катетовъ, а также площади всего треугольника и обѣихъ его частей.

5. Основаніе треугольника равно b единицамъ, а высота h единицамъ; на разстояніи x единицъ отъ основанія проведена параллельная ему хорда; выразить формулами часть высоты между вершиною и хордою, длину самой хорды, площадь даннаго треугольника и площади частей, на которыя онъ раздѣленъ хордою.

6. Въ треугольникѣ ABC стороны, противолежащія угламъ A, B и C, равны a, b и c единицамъ; на сторонѣ AB отложена часть AE, равная x единицамъ; при точкѣ E построенъ уголъ AED, равный углу ACB и обращенный отверстіемъ къ сторонѣ AC. Найти отношеніе сторонъ треугольниковъ ABC и ADE и выразить формулами стороны треугольника ADE и отношеніе площадей ABC и ADE.

7. Изъ точки A, лежащей внѣ нѣкоторой окружности, проведена сѣкущая AB, равная x единицамъ; длина отрѣзанной отъ нея хорды BC равна a единицамъ. Вычислить: длину внѣшняго отрѣзка AC, длину касательной AD къ той же окружности, отношеніе сторонъ треугольниковъ ABD и ACD и отношеніе ихъ площадей.

8. Бокъ квадрата содержитъ въ себѣ a единицъ; выразить формулами его площадь, діагональ, радіусъ описаннаго круга, апоѳему и площадь квадрата, построеннаго на діагонали.

9. Вычислить площадь кольца, заключающагося между двумя концентрическими окружностями, которыхъ радіусы равны a и b единицамъ.

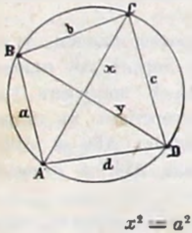
10. При центрѣ круга, радіусъ котораго равенъ r единицамъ, построенъ уголъ въ $n°$; вычислить длину соотвѣтствующей ему дуги и площадь соотвѣтствующаго сектора.

11. Производящая конуса равна l единицамъ, высота — h единицамъ. Опредѣлить радіусъ и площадь основанія конуса, боковую и полную его поверхности и объемъ. Если на разстояніи x единицъ отъ вершины будетъ проведена плоскость, параллельная основанію, то какъ велики будутъ отношенія боковыхъ и полныхъ поверхностей и объемовъ даннаго и отсѣченнаго конусовъ?

12. Радіусъ шара равенъ r единицамъ; на разстояніи x единицъ отъ центра шаръ разсѣченъ плоскостью. Вычислить радіусъ сѣченія, высоты обоихъ шаровыхъ сегментовъ, ихъ выпуклыя поверхности, ихъ объемы объемы шаровыхъ секторовъ, которымъ двѣ предыдущія поверхности служатъ основаніями, наконецъ, отношеніе поверхностей обоихъ сегментовъ и отношеніе объемовъ обоихъ секторовъ.

Предлагаемъ полное рѣшеніе слѣдующей задачи того же рода:

13. *По даннымъ сторонамъ четыреугольника, вписаннаго въ кругъ, вычислить его діагонали.*



Пусть ABCD данный четыреугольникъ, вписанный въ кругѣ. Стороны его означимъ чрезъ a, b, c, d; діагонали — чрезъ x и y.

Треугольники ABC и ADC даютъ:

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \operatorname{Cos} ABC \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$x^2 = c^2 + d^2 - 2cd \operatorname{Cos} ADC.$$

Такъ какъ $\angle ADC = 180° - \angle ABC$, то $\operatorname{Cos} ADC = \operatorname{Cos} ABC$; поэтому также

$$x^2 = c^2 + d^2 + 2cd \operatorname{Cos} ABC. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Подставивъ сюда значеніе косинуса угла ABC

$$\operatorname{Cos} ABC = \frac{a^2 + b^2 - x^2}{2ab},$$

взятое изъ уравненія (1), найдемъ послѣдовательно:

$$x^2 = c^2 + d^2 + \frac{cd\,(a^2 + b^2 - x^2)}{ab},$$

$$abx^2 = abc^2 + abd^2 + a^2 cd + b^2 cd - cdx^2,$$

$$(ab + cd)\,x^2 = adc^2 + a^2 cd + abd^2 + b^2 cd$$

$$= ac\,(bc + ad) + bd\,(bc + ad)$$

$$= (ac + bd)\,(bc + ad).$$

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)\,(bc + ad)}{ab + cd}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Тѣмъ же способомъ изъ треугольниковъ BAD и DCB получимъ:

$$y = \sqrt{\frac{(ac + bd)\,(ab + cd)}{bc + ad}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

14. Воспользуйтесь формулами (3) и (4) для вывода произведенія діагоналей и отношенія діагоналей четыреугольника, вписаннаго въ кругѣ. Окончательные результаты выразите въ видѣ теоремъ.

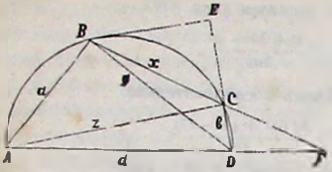
Въ сложныхъ задачахъ отысканіе связи между данными и искомыми величинами вопроса и выраженіе этой связи уравненіями на основаніи подходящихъ теоремъ и формулъ значительно облегчается предварительнымъ составленіемъ чертежа. Такъ мы и поступили въ 13-мъ примѣрѣ.

Если условія задачи и чертежъ не указываютъ непосредственной связи между искомыми и данными величинами, то, по соображеніямъ рѣшающаго, проводятся *вспомогательныя линіи*, которыя зависѣли бы отъ искомыхъ и отъ данныхъ; пользуясь этою обоюдною зависимостью, составляютъ рядъ уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными, главными и вспомогательными; затѣмъ рѣшаютъ ихъ чрезъ исключеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Пояснимъ это примѣромъ.

15, *Въ полукругъ даннаго радіуса вписаны три хорды:* AB, BC, CD; *двѣ изъ нихъ даны, третью требуется вычислить* *).

---

*) Эта задача заимствована изъ «*Всеобщей ариѳметики*» Ньютона. Великій геометръ рѣшаетъ ее разнообразными пріемами, причемъ пользуется вспомогательными линіями, различно проведенными. Мы взяли простѣйшее изъ его рѣшеній. Въ одной группѣ рѣшеній Ньютона



Пусть $AD = d$ данный діаметръ, $AB = a$ и $CD = b$ данныя хорды, а $BC = x$ хорда искомая.

По чертежу и по условіямъ задачи не видно прямо, на основаніи какихъ теоремъ можетъ быть выражена зависимость между величинами x, a, b, и d. Но если проведемъ вспомогательныя хорды $BD = y$ и $AC = z$, то можемъ составить три уравненія съ тремя неизвѣстными; два изъ нихъ выразятъ свойство сторонъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABD и ACD:

$$y^2 = d^2 - a^2,\quad z^2 = d^2 - b^2,$$

а третье выразитъ свойство сторонъ и діагоналей вписаннаго четыреугольника ABCD (см. зад. 14):

$$dx + ab = yz.$$

Рѣшивъ эти уравненія чрезъ исключеніе y и z, получимъ:

$$x = \frac{\sqrt{d^2 - a^2}\,.\sqrt{d^2 - b^2} - ab}{d}.$$

Корни $\sqrt{d^2 - a^2}$ и $\sqrt{d^2 - b^2}$ взяты безъ двойнаго знака, ибо должны выражать абсолютныя величины діагоналей BD и AC.

Замѣтимъ, что три уравненія, первоначально выведеныя нами изъ чертежа, не измѣнятъ своего вида, какую бы изъ сторонъ вписаннаго четыреугольника ABCD мы ни приняли за искомую, потому что эти уравненія выражаютъ геометрическія

вспомогательными линіями служатъ одна изъ діагоналей, напр. BD, одна изъ высотъ отдѣленнаго ею косоугольнаго треугольника, напр. BE, и отрѣзокъ CE стороны, принятой за основаніе: уравненія же, связывающія неизвѣстныя и данныя линіи фигуры, выводятся на основаніи теоремъ, выражающихъ зависимость между сторонами того или другого треугольника (ABD или BCD) и пропорціональность сторонъ подобныхъ треугольниковъ (ABD и BCE). Въ другой группѣ рѣшеній продолжаются стороны BC и AD (или предлагается продолжить стороны AB и DC) до взаимной встрѣчи, и опускается перпендикуляръ на діаметръ изъ вершины B; связывающія теоремы сходны съ указанными выше. Наконецъ, есть рѣшеніе, основанное на двоякомъ выраженіи площади четыреугольника ABCD:

площ. ABCD = пл. ABD + пл. BCD = пл. ACD + пл. ABC.

свойства начерченной фигуры, а свойства фигуры сохраняются неизмѣнно при всякомъ значеніи образующихъ ее линій. Понятно, впрочемъ, что *главная неизвѣстная* начнетъ перемѣщаться изъ однихъ членовъ уравненій въ другіе, когда будемъ принимать по очереди ту или другую сторону четыреугольника ABCD за искомую (считая три остальныя данными), и что это обстоятельство можетъ повліять какъ на видъ, такъ и на степень уравненія, окончательно получаемаго по исключеніи вспомогательныхъ неизвѣстныхъ. Для примѣра составьте уравненіе, изъ котораго можно было бы *опредѣлить діаметръ полукруга, имѣющаго въ себѣ три данныя хорды.*

Б. Примѣры задачъ на построеніе.

§ 7. I. *Отрѣзокъ* AB *прямой линіи раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы одна была болѣе другой на данную длину* PQ.

Пусть $AB = a$ единицамъ, $PQ = b$ единицамъ. Если означимъ черезъ x длину большей части данной для раздѣленія линіи, то длина меньшей выразится чрезъ $a - x$ и, согласно съ условіями задачи, составится уравненіе:

$$x - (a - x) = b.$$

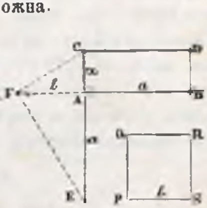
Рѣшивъ его, найдемъ:

$$x = \frac{a+b}{2}, \quad a - x = \frac{a-b}{2}.$$

Этими формулами указывается, во-1-хъ, способъ вычисленія искомыхъ частей линіи AB въ каждомъ частномъ случаѣ, а во-2-хъ — способъ ихъ построенія циркулемъ и линейкою при всякомъ числовомъ значеніи данныхъ линій. Учащіеся не затруднятся исполнить это построеніе

Когда $AB <$ или $= PQ$, — задача невозможна.

2. *На данномъ основаніи* AB *построить прямоугольникъ, равномѣрный данному квадрату* PQRS.



Положимъ, что ACBD есть требуемый прямоугольникъ. Пусть основаніе его $AB = a$ единицамъ, бокъ даннаго квадрата $PS = b$ единицамъ, а неизвѣстная высота прямоугольника $AC = x$ единицамъ.

Согласно съ требованіями задачи неизвѣстная величина x свяжется съ данными a и b уравненіемъ

$$ax = b^2,$$

гдѣ ax есть площадь искомаго прямоугольника, и d^2 — площадь даннаго квадрата. Изъ этого уравненія получаемъ:

$$x = \frac{b^2}{a}.$$

Найденнымъ рѣшеніемъ можно пользоваться двояко, какъ и въ предыдущей задачѣ:

Во-первыхъ, по формулѣ $\frac{b^2}{a}$ можно вычислять длину x, подставляя вмѣсто a и b извѣстныя числа, соотвѣтствующія каждому частному случаю. Напримѣръ, при $a = 3$ фут., $b = 4$ фут. получили бы $x\, 5\frac{1}{3}$ фут; а взявъ длины $a = 3$ футамъ и $x = 5\frac{1}{3}$ фут. по масштабу, легко построить требуемый прямоугольникъ.

Во вторыхъ, рѣшеніе $x = \frac{b^2}{a}$ указываетъ, что x, какъ произведеніе двухъ равныхъ чиселъ b и b, дѣленное на третье число a, есть крайній членъ пропорціи.

$$a : b = b : x.$$

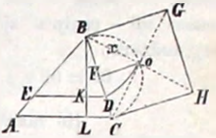
Слѣдовательно, можно построить x независимо отъ масштаба, какъ четвертую пропорціональную къ линіямъ, выраженнымъ числами a, b и x, т. е къ прямымъ AB, PS и PQ. Можемъ также построить x, какъ третью пропорціональную къ прямымъ AB и PS. Этотъ второй способъ построенія выполненъ на прилагаемомъ чертежѣ. Онъ основанъ на томъ, что перпендикуляръ, опущенный изъ вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорціональная линія между отрѣзками гипотенузы. Прямоугольный треугольникъ CEF, къ которому примѣняется эта теорема, построенъ слѣдующимъ образомъ: къ данной прямой AB возставленъ изъ точки A перпендикуляръ AC; на его продолженіи отложена часть $AE = AB = a$; на продолженіи AB отложена часть $AF = PS = b$; точки E и F соединены прямою FF, и къ ней возставленъ изъ точки F перпендикуляръ FC, который и отрѣзалъ искомую высоту $AC = x$. Дѣйствительно, вслѣдствіе указанной теоремы, получаемъ изъ треугольника EFC:

$$EA : AF = AF : AC$$

$$\text{или} \quad a : b = b : AC;$$

сравнивъ же эту пропорцію съ предыдущею, заключаемъ, что $AC=x$. Чтобы получить требуемый прямоугольникъ, остается провести CD параллельно AB и BD параллельно AC.

3. *Данный треугольникъ раздѣлить пополамъ прямою, параллельною основанію.*



Пусть ABC будетъ данный треугольникъ, т. е. такой, котораго всѣ части извѣстны. Считая задачу рѣшенною, положимъ, что ED параллельна AC и дѣлитъ площадь треугольника ABC пополамъ. Еслибъ нашли который нибудь изъ отрѣзковъ сторонъ AB и BC, то могли бы на самомъ дѣлѣ провести и линію ED; слѣдовательно, надо отыскать одинъ изъ отрѣзковъ BD или CD, BE или AE. Который же изъ нихъ? По параллельности прямыхъ ED и AC, треугольникъ EBD подобенъ данному, а по условіямъ задачи онъ вдвое меньше даннаго; но такъ какъ площади подобныхъ треугольниковъ относятся, какъ квадраты сходственныхъ сторонъ, то ясно, что въ пропорцію, основанную на этихъ соображеніяхъ, долженъ войти или отрѣзокъ BD, или отрѣзокъ BE, потому что они суть стороны треугольника EBD. Итакъ примемъ BD за искомую величину.

Пусть $BC=a$ единицамъ, $BD=x$ единицамъ. По подобію треугольниковъ EBD и ABC имѣемъ пропорцію:

$$\frac{\text{площ.}\ \triangle\ EBD}{\text{площ.}\ \triangle\ ABC}=\frac{BD^2}{BC^2}=\frac{x^2}{a^2},$$

а по условію

$$\frac{\text{площ.}\ \triangle\ EBD}{\text{площ.}\ \triangle\ ABC}=\frac{1}{2}.$$

Слѣдовательно

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{2}\ .\quad .\quad .\ (A).$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Для построенія найденной величины, надо придать ей геометрическое значеніе. Умноживъ обѣ части послѣдняго уравненія на $\sqrt{2}$, получимъ

$$x\sqrt{2}=a.$$

Припомнивъ же, что бокъ квадрата, вписаннаго въ кругѣ, равенъ радіусу, умноженному на $\sqrt{2}$, мы можемъ принять x за радіусъ круга, описаннаго около квадрата, котораго бокъ равенъ сторонѣ $BC = a$ даннаго треугольника. Дѣйствительно, если построимъ квадратъ BGHC на сторонѣ BC и проведемъ его діагонали, то точка O ихъ пересѣченія будетъ центръ, а полудіагональ OB — радіусъ круга, описаннаго около квадрата; а потому выйдетъ:

$$BC = OB\sqrt{2} \text{ и } OB = \frac{BC}{\sqrt{2}} \text{ или } OB = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Но также и } x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{ слѣд. } OB = x.$$

Теперь легко окончить рѣшеніе задачи: на сторонѣ BC откладываемъ часть BD, равную OB и черезъ точку D проводимъ DE параллельно AC.

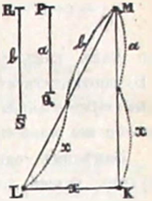
Другое построеніе. Изъ уравненія (A) имѣемъ $x_2 = \frac{a^2}{2}$, а отсюда — пропорцію $a : x = x : \frac{a}{2}$. Поэтому длину отрѣзка BD можно опредѣлить еще какъ среднюю пропорціональную между линіей a и ея половиною, т. е. между BC и $\frac{BC}{2}$, что и выполнено на приложенномъ чертежѣ.

Замѣчаніе. Мы нашли $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Точно такое же рѣшеніе получили бы, принявъ за искомую величину отрѣзокъ BE стороны BA, или отрѣзокъ BK высоты BL. Такъ, положивъ $BL = h$ и $BK = y$, нашли бы $y = \frac{h}{\sqrt{2}}$. Одинаковость рѣшенія проистекаетъ изъ того, что всѣ прямыя, выходящія изъ точки B, разсѣкаются параллельными ED и AC на пропорціональныя части. Это показываетъ, что линія ED, дѣлящая площадь треугольника пополамъ, будетъ постоянно проходить чрезъ точку K, если вершина B будетъ передвигаться по линіи, параллельной основанію AC, и что поэтому рѣшеніе задачи должно зависѣть не отъ длины сторонъ, но только отъ высоты треугольника. Слѣдовательно, правильнѣе было бы принять за искомую отрѣзокъ BK, а не BD. Вообще высота должна имѣть существенное вліяніе на рѣшеніе большей части вопросовъ, относящихся къ треугольникамъ, и потому на нее всегда надо обращать вниманіе.

Замѣтимъ еще, что формулы $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и $\frac{h}{\sqrt{2}}$ не содержатъ въ себѣ числа, выражающаго длину основанія; слѣдовательно, и рѣшеніе нашей задачи не зависитъ отъ этой длины.

4. *Начертить прямоугольный треугольникъ, котораго одинъ катетъ менье другого на линію a и менье гипотенузы на линію b.*

Для возможности задачи линія, выраженная числомъ a, очевидно должна быть менѣе линіи, выраженной числомъ b. Пусть PQ и RS будутъ эти линіи и KLM — требуемый треугольникъ. Всѣ три стороны его неизвѣстны, и любая изъ нихъ безразлично можетъ быть принята за искомую. Пусть меньшій катетъ $KL = x$; тогда, согласно съ условіями задачи, получимъ: катетъ $KM = x + a$, гипотенуза $LM = x + b$, и составится уравненіе:



$$(x + a)^2 + x^2 = (x + b)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(A)}$$

которое даетъ для x два значенія:

$$x_1 = b - a + \sqrt{2b\,(b - a)}$$
$$x_2 = b - a - \sqrt{2b\,(b - a)}.$$

Такъ какъ $2b > b - a$, то $2b(b - a) > (b - a)^2$ и $\sqrt{2b(b-a)} > b - a$; поэтому второе значеніе x отрицательное. *Въ геометрическихъ вопросахъ знаки + и —, когда ими сопровождаются значенія линій, выражаютъ противоположность въ направленіи этихъ линій.* Въ нашемъ вопросѣ ищется только безусловная величина катета KL, направленіе же его можетъ быть какое угодно; поэтому отрицательное значеніе x должно быть откинуто.

Впрочемъ, основываясь на томъ, что отрицательное рѣшеніе, хотя бы и не удовлетворяло вопросу, должно все-таки удовлетворять уравненію, изъ котораго оно получено, можемъ иногда измѣнить условія задачи такъ, что отрицательное рѣшеніе обратится въ положительное, т. е. будетъ служить *прямымъ отвѣтомъ* на измѣненную задачу. Для этого, какъ извѣстно изъ алгебры, надо въ уравненіи, *непосредственно вытекающемъ изъ условій вопроса,* перемѣнить x на $-x$ и затѣмъ, если возможно, слѣдуетъ измѣнить и самыя условія задачи такъ, чтобы они выражались измѣненнымъ уравненіемъ *).

---

*) Это правило основано на томъ соображеніи, что подстановку отрицательнаго числа $-n$ вмѣсто x можно исполнить въ два пріема: сперва перемѣнить въ уравненіи x на $-x$, а потомъ въ измѣненное такимъ образомъ уравненіе подставить положительное число n вмѣсто x.

Въ нашемъ примѣрѣ, перемѣнивъ x на $-x$ въ уравненіи (А), получимъ:

$$(-x+a)^2+(-x)^2=(-x+b)^2 \text{ или } (a-x)^2+x^2=(b-x)^2 \quad . \quad . \text{ (Б)},$$

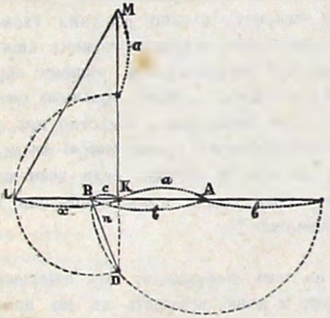
но такъ какъ $(a-x)+x=a$ и $(b-x)+x=b$, то уравненіе (Б) соотвѣтствуетъ слѣдующей задачѣ: *начертить прямоугольный треугольникъ, сумма катетовъ котораго равна a, сумма же одного изъ катетовъ и гипотенузы равна b.*

Замѣтимъ однако, что и въ этой задачѣ одно изъ рѣшеній будетъ также отрицательнымъ, ибо корни уравненій (А) и (Б) отличаются только знаками. И здѣсь отрицательное рѣшеніе должно быть откинуто; если же перемѣнимъ x на $-x$ въ уравненіи (Б), то снова получимъ первоначальный вопросъ.

Возвратимся къ первоначальной задачѣ. Чтобы на самомъ дѣлѣ построить треугольникъ KLM, требуемый условіями этой задачи, надо дать геометрическое истолкованіе первому значенію x. Положивъ для краткости $b-a=c$, мы можемъ представить его въ видѣ:

$$x=c+\sqrt{2bc}.$$

Здѣсь $\sqrt{2bc}$ выражаетъ величину нѣкоторой линіи n, средней пропорціональной между линіями $2b$ и c, ибо равенство $\sqrt{2bc}=n$ даетъ $2bc=n^2$, а отсюда получается пропорція $2b:n=n:c$. Итакъ $x=c+n$, т. е. меньшій катетъ KL равенъ разности $b-a=c$, сложенной съ линіей n, среднюю пропорціональною между линіями $2b$ и c. Построивъ его, легко докончить треугольникъ. Все это исполнено на прилагаемомъ чертежѣ. Сдѣланныя на немъ надписи замѣняютъ объясненіе построеній.



§ 8. Изъ примѣровъ, разобранныхъ въ 6 и 7 параграфахъ, можемъ вывести нѣкоторыя общія заключенія:

Рѣшеніе геометрическихъ вопросовъ помощью алгебры состоитъ изъ четырехъ главныхъ частей:

1. Приведенія вопросовъ къ уравненіямъ.
2. Рѣшенія уравненій.
3. Изслѣдованія вопросовъ по полученнымъ формуламъ.
4. Построенія искомыхъ величинъ, выраженныхъ этими формулами.

Наибольшія затрудненія можетъ представить первая изъ этихъ частей, потому что общихъ правилъ для *составленія уравненій* по условіямъ геометрическаго вопроса не существуетъ. Можно указать только на слѣдующіе основные пріемы:

а) Предположивъ вопросъ рѣшеннымъ, надо исполнить построеніе отъ руки и разсмотрѣть, какія линіи полученной фигуры извѣстны и какія неизвѣстны.

б) Потомъ внимательно разсмотрѣть расположеніе всѣхъ частей чертежа и, не дѣлая различія между извѣстными и неизвѣстными частями, опредѣлить ихъ взаимную зависимость. Къ открытію этой зависимости должны послужить, съ одной стороны, условія и требованія задачи, а съ другой — различныя геометрическія теоремы, подходящія къ этимъ условіямъ и требованіямъ, равно какъ и къ свойствамъ начерченной фигуры.

в) Подмѣченную зависимость различныхъ частей фигуры выразить уравненіями на основаніи условій задачи и подходящихъ теоремъ.

г) Если непосредственной зависимости между искомыми и данными частями фигуры не представляется, то проводятъ вспомогательныя линіи, которыя зависѣли бы отъ тѣхъ и отъ другихъ, и на основаніи этой послѣдней зависимости составляютъ нѣсколько уравненій съ нѣсколькими неизвѣстными, главными и вспомогательными.

Вторая часть — *рѣшеніе уравненій* — принадлежитъ къ области алгебры.

Третья часть — *изслѣдоваіе вопроса* — можетъ имѣть мѣсто въ тѣхъ только случаяхъ, когда получаемыя формулы представляютъ достаточный матеріалъ для изслѣдованія.

Четвертая часть — *построеніе линій*, выраженныхъ формулами будетъ подробно разсмотрѣна въ послѣдующихъ параграфахъ.

Линейныя числа и формулы, или количества одного измѣренія.

§ 9. Всякая буква, означающая сколько линейныхъ единицъ содержится въ какой-нибудь линіи, называется *линейнымъ числомъ*.

Всякая формула, по которой опредѣляется число линейныхъ единицъ, заключающихся въ той или другой линіи, называется *линейною формулою* *).

Примѣры $2\pi r$, $r\sqrt{3}$, $\frac{1}{2} r\sqrt{5}-1)$ и проч.

Для краткости говорятъ: «линія a», «линія $3a$», «линія $r\sqrt{3}$» и т. д., т. е. число единицъ, заключающихся въ линіи, какъ бы принимаютъ за ея названіе.

Наипростѣйшія линейныя формулы, извѣстныя намъ изъ элементарной геометріи, имѣютъ ту особенность, что не заключаютъ въ себѣ буквенныхъ дѣлителей и содержатъ, каждая, только по одному буквенному множителю; числа же ариѳметическія, напримѣръ 2, [illegible], $\sqrt{3}$ и проч., участвуютъ въ нихъ, какъ отвлеченные множители и показываютъ, что ту или другую линію надо повторить извѣстное число разъ, или взять извѣстную часть ея. Отвлеченное отношеніе окружности къ діаметру, 3,14159... какъ число несоизмѣримое, только для краткости означается буквою π; слѣдовательно, эта буква никогда не должна входить въ счетъ линейныхъ множителей или дѣлителей.

Линейныя числа и формулы называются *количествами одного измѣренія*, потому что выражаютъ линіи,—а линіи имѣютъ одно измѣреніе—въ длину.

---

*) $\frac{b+b'}{2}$ — формула для вычисленія длины прямой, соединяющей середины боковъ трапеціи, гдѣ b и b' означаютъ длины ея основаній.

$2\pi r$ — формула для вычисленія длины окружности, гдѣ r означаетъ число линейныхъ 1-цъ, заключающихся въ радіусѣ; π — отвлеченное число, показывающее во сколько разъ окружность длиннѣе діаметра. По Архимеду $\pi = \frac{22}{7}$, по Мецію $\pi = \frac{355}{113}$. Послѣднее число замѣчательно своею точностью, ибо $\frac{355}{113} = 3.141592...$, гдѣ всѣ 7 цифръ вѣрны.

$r\sqrt{3}$ — бокъ правильнаго треугольника, вписаннаго въ кругѣ.

$r\sqrt{2}$ — бокъ квадрата, вписаннаго въ кругѣ.

$\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$ — бокъ правильнаго 10-угольника, вписаннаго въ кругѣ.

При откладываніи линій по извѣстному направленію MN отъ какой-нибудь опредѣленной точки О, встрѣчается необходимость выражать, кромѣ длины линій, еще и противоположныя направленія. Какъ извѣстно, ихъ различаютъ знаками + и —. Линіи, отложенныя въ одну сторону отъ точки О, напримѣръ отъ О къ N считаются *положительными*, а отложенныя въ обратную сторону — *отрицательными*. Слѣдовательно, линейныя числа могутъ быть положительными и отрицательными.

Количества двухъ измѣреній.

§ 10. *Наипростѣйшія формулы, устанавливаемыя элементарною геометріей для вычисленія площадей и поверхностей, заключаютъ въ себѣ по два линейныхъ множителя* и не содержатъ буквенныхъ дѣлителей *).

---

*) Основанныя формулы для вычисленія площадей и поверхностей: bh — площадь прямоугольника и вообще параллелограмма, гдѣ b — основаніе, h — высота. Частный ея случай: b^2 — площадь квадрата.

$\frac{by}{2}$ — площадь треугольника.

$\frac{b+b'}{2} . h$ — площ. трапеціи, гдѣ b и b' — основанія трапеціи, h — высота. Другая формула для вычисленія площади трапеціи: $c.h$, гдѣ c — длина прямой, соединяющей середины непараллельныхъ сторонъ трапеціи.

$\frac{p.a}{2}$ — площадь правильнаго многоугольника, гдѣ p — периметръ, a — апоѳема.

$\frac{p.r}{2}$ — площадь всякаго многоугольника, описаннаго около круга.

πr^2 — площадь круга.

$p.h$ — боковая поверхность прямой призмы, гдѣ p — периметръ основанія, h — высота.

$p(h + a)$ — полная поверхность правильной призмы; p — периметръ основанія, h — высота призмы, a — апоѳема основанія.

$\frac{pa}{2}$ — боковая поверхность правильной пирамиды; p — перим. основанія, a — апоѳема пирамиды, т. е. высота каждаго изъ боковыхъ треугольниковъ.

$\frac{P+p}{\ } . a = p'a$ — боковая поверхность правильной усѣченной пи-

Напримѣръ формула полной поверхности цилиндра, $2\pi r(h+r)$, состоитъ изъ множителей $2\pi r$ и $(h+r)$; первый выражаетъ длину окружности основанія цилиндра, второй — длину прямой, равной суммѣ высоты этого цилиндра и радіуса его основанія.

Если въ формулѣ какой нибудь поверхности отдѣлимъ отвлеченные множители, какъ 2, π и проч., отъ линейныхъ, то увидимъ, что эта формула выражаетъ собственно площадь прямоугольника, повторенную извѣстное число разъ, или нѣкоторую часть этой площади (смотря по тому, будетъ ли произведеніе выдѣленныхъ множителей больше или меньше 1-цы) и что одинъ изъ ея линейныхъ множителей представляетъ измѣреніе прямоугольника въ длину, другой — въ ширину. Таковы множители r и $(h+r)$ въ формулѣ полной поверхности цилиндра.

На этомъ основаніи каждый линейный множитель въ формулѣ площади или поверхности называютъ ея *измѣреніемъ*, а самую формулу — *количествомъ двухъ измѣреній.*

Замѣчаніе. Площадь какого ни есть многоугольника задается, вообще, числомъ квадратныхъ 1-цъ, a^2, b^2..., заключающихся въ площади равномѣрнаго съ нимъ квадрата; потому что всякій многоугольникъ можетъ быть перестроенъ въ равномѣрный съ нимъ треугольникъ, а треугольникъ — въ квадратъ.

Количества трехъ измѣреній.

§ 11. *Наипростѣйшія формулы, доставляемыя элементарною геометріей для вычисленія объемовъ, содержатъ въ себѣ по три*

рамиды; P и p — периметры ея основаній, a — апоѳема, т. е. высота каждой боковой трапеціи, p' — периметръ средняго сѣченія.

$2\pi r.h$ — боковая поверхность прямого цилиндра; r — радіусъ основ., h высота цилиндра.

$2\pi r\ (h+r)$ — полная поверхность того же цилиндра.

πrl — боковая поверхность прямого конуса; r — радіусъ основанія, l — производящая.

$2\pi r.h$ — поверхность всякой части шара, отрѣзанной плоскостію или двумя параллельными плоскостями; r — рад. шара, h — высота отрѣзанной части.

линейныхъ множителя и также не содержатъ буквенныхъ дѣлителей *).

Такъ напр., формула $\frac{b^2h}{3}$, по которой вычисляется объемъ пирамиды, содержитъ множителей b, b и $\frac{h}{3}$. Буквенные множители въ этихъ формулахъ могутъ быть приняты за числа линейныхъ единицъ, заключающихся въ ребрахъ нѣкотораго прямоугольнаго параллелепипеда, или, какъ говорятъ, въ трехъ его измѣреніяхъ; численные же множители покажутъ тогда, сколько разъ повторяется объемъ такого параллелепипеда, или какая часть его берется.

---

*) Основныя формулы объемовъ;

abc — объемъ прямоугольнаго параллелепипеда; a, b и c — его три измѣренія.

b^3 — объемъ куба; b — его ребро.

b^2h — объемъ призмы; b — бокъ квадрата, равномѣрнаго съ основаніемъ призмы, h — высота призмы.

$\frac{b^2h}{3}$ — объемъ пирамиды.

$\frac{h}{3}(B^2 + Bb + b^2)$ — объемъ усѣч. пирам.; B^2 — площ. большого основанія, b^2 — площ. меньшаго основ., Bb — площадь, средняя геометрическая между двумя первыми.

$\pi r^2 h$ — объемъ прямого цилиндра съ круговымъ основаніемъ.

$\frac{\pi r^2 h}{3}$ — объемъ такого же конуса.

$\frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ — объемъ усѣч. конуса; R и r — радіусы основаній.

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}$ — объемъ шара; r — его радіусъ, d — діаметръ. Иначе объемъ шара $= 4\pi r^2 \cdot \frac{r}{3}$, т. е. шаровой поверхности, умноженной на треть радіуса.

Объемъ шароваго сектора равенъ поверхности соотвѣтствующаго сегмента, умноженной на треть радіуса: $2\pi rh \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

Объемъ шароваго сегмента — $\pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$, т. е. онъ равенъ объему цилиндра, у котораго радіусъ основанія есть высота или стрѣлка сегмента, а высота есть радіусъ шара безъ одной трети стрѣлки.

По этой причинѣ буквенные множители въ каждой формулѣ объема называются также измѣреніями, а самыя формулы — *количествами трехъ измѣреній*.

Количества 4-хъ, 5-ти и болѣе измѣреній.

§ 12. Хотя и не существуетъ протяженій, имѣющихъ болѣе трехъ измѣреній (въ длину, ширину и высоту), но при рѣшеніи геометрическихъ задачъ помощію алгебры могутъ появиться, вслѣдствіе различныхъ преобразованій въ уравненіяхъ, такія произведенія, которыя содержатъ и болѣе трехъ линейныхъ множителей, напр. b^5, $3c^2d^3$ и проч.; въ этомъ случаѣ линейные множители называются также измѣреніями; слѣдовательно, b^5 и $3c^2d^3$ суть количества пяти измѣреній.

Количества нулеваго измѣренія.

§ 13. Отношеніе двухъ однородныхъ величинъ (двухъ линій, двухъ поверхностей, двухъ объемовъ), какъ отвлеченное число, не выражающее никакого протяженія, называется *количествомъ нулевого измѣренія*. Таковы, напр., $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{bc}$, $\frac{a^2b}{c^2}$.

Вообще дробь, которой члены состоятъ изъ одинаковаго числа линейныхъ множителей, будетъ количествомъ нулеваго измѣренія, потому что можетъ быть разложена на нѣсколько отвлеченныхъ множителей вида $\frac{a}{b}$, или $\frac{ab}{cd}$, или $\frac{abc}{def}$, изъ которыхъ каждый имѣетъ геометрическій смыслъ отношенія двухъ однородныхъ протяженій. Такъ

$$\frac{2a^3b^4}{3cdh^4}=\frac{2a}{3c}\cdot\frac{a}{d}\cdot\frac{a}{h}\cdot\frac{b^4}{h^3}.$$

Тригонометрическія величины $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ и проч., какъ отношенія извѣстныхъ линій къ радіусу, суть также количества нулевого измѣренія.

Однородные одночлены; однородный многочленъ. Число измѣреній алгебраическихъ дробей и радикаловъ.

§ 14. Одночлены одного и того же числа измѣреній называются *однородными*. Напримѣръ $2a^3$, $3a^2b$, b^3 суть однородные одночлены трехъ измѣреній.

Алгебраическая сумма однородныхъ одночленовъ составляютъ *однородный многочленъ*. Примѣръ:

$$a^2 + 3ab - 2b^2.$$

гдѣ всѣ члены двухъ измѣреній. *Число измѣреній однороднаго многочлена равно числу измѣреній каждаго его члена порознь*, такъ что многочленъ будетъ выражать длину линіи, когда всѣ его члены линейные или одного измѣренія, — поверхность, когда всѣ его члены двухъ измѣреній, и объемъ — когда трехъ. При всякомъ другомъ числѣ измѣреній многочленъ не имѣетъ геометрическаго значенія.

§ 15. *Число измѣреній произведенія двухъ или нѣсколькихъ одночленовъ равно суммѣ чиселъ измѣреній всѣхъ производителей*, ибо всѣ линейные ихъ множители должны войти въ составъ произведенія. Отсюда, принявъ во вниманіе правило умноженія многочленовъ, можемъ заключить, что *произведеніе двухъ однородныхъ многочленовъ есть также однородный многочленъ, которато число измѣреній равно суммѣ чиселъ измѣреній обоихъ производителей.*

Если дѣлимое и дѣлитель (числитель и знаменатель алгебраической дроби) порознь однородны, то и частное (дробь) должно быть однородно; при этомъ число измѣреній частнаго (дроби) равно числу измѣреній дѣлимаго (числителя) безъ числа измѣреній дѣлителя (знаменателя), потому что дѣлимое (числитель) есть произведеніе дѣлителя (знаменателя) на частное (на дробь, получаемую въ частномъ) и, слѣдовательно, по предыдущему:

число измѣреній дѣлимаго = числу измѣреній дѣлителя + число измѣреній частнаго,

а отсюда:

число измѣреній частнаго = числу измѣреній дѣлимаго — число измѣреній дѣлителя.

Примѣры:

$\frac{3a^2b^2}{cd}$ есть количество двухъ измѣреній,

$\frac{a^2b+b^3}{a-b}$ есть количество трехъ измѣреній,

$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2-b^2+c^2}$ есть количество нулеваго измѣренія или отвлеченное число.

Если число измѣреній дроби больше 3-хъ, или отрицательное то дробь не имѣетъ геометрическаго значенія.

§ 16. Возвышеніе въ степень есть частный случай умноженія, въ которомъ всѣ производители равны возвышаемому количеству и, слѣдовательно, имѣютъ одно и то же число измѣреній, а число производителей равно показателю степени; поэтому *степень однороднаго многочлена есть также однородный многочленъ, и число измѣреній степени равно числу измѣреній возвышаемаго количества, умноженному на показателя степени.*

Число измѣреній корня какой ни есть степени изъ однороднаго многочлена, или изъ одночлена, равно числу измѣреній подкоренной величины, дѣленному на показателя корня, ибо отъ возвышенія этого корня въ степень его показателя должно получиться подкоренное количество, и слѣдовательно должны имѣть:

(число измѣреній корня) $\times$ показателя корня $=$ числу измѣреній подкоренной величины.

а отсюда:

$$\text{число измѣреній корня} = \frac{\text{числу измѣреній подкоренной величины}}{\text{показатель корня.}}$$

Примѣры:

$\sqrt{3ab}$, $\sqrt[3]{a^3+b^3}$, $\sqrt[4]{\frac{a^7-b^7}{a^3}}$ суть количества одного измѣренія, или линейныя.

$\sqrt[3]{2a^6+a^2b^4}$ есть количество двухъ измѣреній.

$\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{a^4-b^4}}$ суть количества нулеваго измѣренія. т. е. отвлеченныя числа.

$\sqrt{a^8+b^8}$ — количество 4-хъ измѣреній.

$\sqrt[3]{ab}$ — количество, котораго число измѣреній равно $\frac{2}{3}$.

$\sqrt[5]{\frac{a}{a^5+b^5}}$ — количество, котораго число измѣреній равно отрицательной дроби $(-\frac{4}{5})$.

Три послѣднія количества не имѣютъ геометрическаго значенія.

§ 17. Если единица, посредствомъ которой были измѣрены *различныя линіи*, замѣнится новою, то линейныя числа a, b, c..., выражавшія эти линіи, пріобрѣтутъ одного и того же множителя, равнаго отношенію n старой единицы къ новой. Напримѣръ, при перемѣнѣ фута на дюймъ всѣ линейныя числа умножатся на 12; при перемѣнѣ аршина на сажень всѣ числа умножатся на $\frac{1}{3}$.

Отсюда можемъ заключить, что *отъ перемѣны единицы однородные одночлены и многочлены не теряютъ своей однородности; каждый изъ нихъ пріобрѣтаетъ только нѣкотораго множителя n съ показателемъ, равнымъ числу измѣренія одночленовъ или многочленовъ.*

То же самое произойдетъ, если линейныя числа a, b, c,..., входящія въ составъ одночлена или однороднаго многочлена, прямо замѣнимъ произведеніями an, bn, cn,...

На этомъ свойствѣ основано слѣдующее опредѣленіе: *алгебраическое выраженіе называется однороднымъ, если оно не измѣняется отъ перемноженія всѣхъ входящихъ въ него линейныхъ чиселъ на произвольное количество n, и только пріобрѣтаетъ множителя равнаго нѣкоторой степени этого количества.*

Примѣры:

Если въ выраженіяхъ a^2+b^2, $\frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{a^3+b^3}}$ замѣнимъ a и b произведеніями an и bn то получимъ

$$(a^2+b^2)\,n^2,\ \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2}\cdot n,\ \sqrt[3]{\frac{a}{a^3+b^3}}\cdot n^{-\frac{2}{3}}.$$

Показатель выдѣляющагося множителя указываетъ *степень* даннаго однороднаго выраженія.

Однородность уравненій, получаемыхъ при рѣшеніи геометрическихъ задачъ.

§ 18. *Если ни одна изъ линій, входящихъ въ данный геометрическій вопросъ, не принята за единицу, а всѣ онѣ обозначены буквами, то составленныя по условіямъ вопроса уравненія, равно какъ и формулы, получаемыя изъ этихъ уравненій, непремѣнно будутъ однородны.*

Для объясненія этого свойства прослѣдимъ весь ходъ рѣшенія такихъ вопросовъ помощію алгебры. 1. Составивъ чертежъ отъ руки и подмѣтивъ зависимость между извѣстными и неизвѣстными частями фигуры, мы выражаемъ числами тѣ протяженія, которыя, вслѣдствіе подмѣченной зависимости, должны войти въ составъ уравненій; при этомъ, какъ намъ извѣстно, линіи выразятся количествами одного измѣренія, площади и поверхности — количествами двухъ измѣреній, а объемы — трехъ. 2. Окончивъ эту подготовительную работу, мы составляемъ уравненія, причемъ сравниваемъ одни протяженія съ другими, согласно съ условіями вопроса и свойствами начерченной фигуры. Но какъ очевидно, что сравнивать можно только однородныя протяженія (линіи съ линіями, поверхности съ поверхностями, объемы съ объемами), или же отвлеченныя числа, выражающія отношеніе этихъ протяженій, то знаки (+), (—) и (=) не могутъ появиться между разнородными величинами; слѣдовательно, члены уравненія, первоначально составленнаго по условіямъ задачи, непремѣнно будутъ однородны. 3. Наконецъ однородность уравненій, первоначально составленныхъ, не можетъ нарушиться и во время ихъ рѣшенія, потому что дѣйствія надъ однородными количествами всегда приводятъ къ однороднымъ результатамъ.

Случай нарушенія алгебраической однородности геометрическихъ формулъ. Возстановленіе однородности.

§ 19. Когда одна изъ тѣхъ линій, *отъ которыхъ зависитъ искомая величина* при рѣшеніи геометрическаго вопроса, будетъ принята за единицу мѣры прочихъ линій или выражена опредѣленнымъ ариѳметическимъ числомъ, то однородность уравненій и формулъ, доставляемыхъ ими, будетъ казаться нарушенною, потому что линія, принятая за мѣру, выражается числомъ 1, всѣ степени единицы суть также единицы, а единица не пишется вообще ни множителемъ, ни дѣлителемъ.

Напримѣръ однородные одночлены $\frac{4}{3}\pi r^3$ и $\frac{a^4 h}{r^2}$ обращаются при $r=1$ въ неоднородные: $\frac{4}{3}\pi$ и $a^4 h$; первый потерялъ три измѣренія, а второй пріобрѣлъ два лишнихъ. Точно также однородная дробь $\frac{an^2+b^2n+c^3}{n^2+an+b^2}$ и однородный многочленъ $a+\frac{a^2}{n}-\frac{b^2}{a}-\sqrt{a^2+an+n^2}$ принимаютъ при $n=1$ неоднородный видъ $\frac{a+b^2+c^3}{1+a+b^2}$ и $a+a^2-\frac{b^2}{a}-\sqrt{a^2+a+1}$.

Если кажущееся нарушеніе однородности происходитъ вслѣдствіе исчезанія различныхъ степеней того числа, которое выражаетъ линію, принятую за мѣру, и отъ котораго должно зависѣть искомое число, то *для возстановленія однородности надо предположить, что всѣ линіи, отъ которыхъ зависитъ искомое, перемѣрены вновь и что, вслѣдствіе того, прежняя единица вы-*

разилась числомъ n; затѣмъ вставить это число множителемъ въ тѣ члены уравненія, гдѣ повидимому недостаетъ измѣреній, и дѣлителемъ въ тѣ члены, гдѣ оказывается излишнее число измѣреній, и притомъ въ такой степени, чтобы всѣ члены сдѣлались однородны. Примѣръ: формула

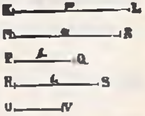
$$x = a - \frac{b}{a} + \sqrt{a - b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (A)$$

по возстоновленіи однородности принимаетъ видъ:

$$x = a - \frac{bn}{a} + \sqrt{an - b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (Б)$$

Предлагаемъ болѣе строгое объясненіе возстановленія однородности. Возьмемъ ту же однородную формулу (А). Разсматривая ее, замѣчаемъ, что въ геометрическомъ вопросѣ, къ которому эта формула относится, искомая линія x зависѣла отъ трехъ данныхъ линій: a, b и 1, и что послѣдняя исчезла изъ формулы. Пусть эти линіи будутъ:

KL, выраженная числомъ x.
MN „ „ a.
PQ „ „ b.
RS „ „ 1.



Такъ какъ линейныя числа суть отношенія измѣренныхъ линій къ 1-цѣ мѣры, то

$$x = \frac{KL}{RS},\ a = \frac{MN}{RS},\ b = \frac{PQ}{RS} \text{ и } 1 = \frac{RS}{RS}.$$

Чтобы возстоновить однородность въ формулѣ (А), перемѣнимъ единицу мѣры, и выберемъ для этого какую-нибудь прямую UV, отъ которой не зависитъ искомая величина KL. Тогда всѣ линіи, участвующія въ вопросѣ, выразятся новыми числами. Пусть эти числа будутъ:

$$x' = \frac{KL}{UV},\ a' = \frac{MN}{UV},\ b' = \frac{PQ}{UV},\ \text{и } n = \frac{RS}{UV}.$$

Каждое изъ этихъ новыхъ чиселъ въ одинаковое число разъ больше или меньше соотвѣтствующаго стараго (§ 17), слѣдовательно, они пропорціональны старымъ:

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{1}{n}.$$

Приравнивая поочереди три первыя отношенія послѣднему, получимъ три пропорціи, которыя дадутъ:

$$x = \frac{x'}{n},\ a = \frac{a'}{n},\ b = \frac{b'}{n}.$$

Подставивъ теперь въ уравненіе (А) вмѣсто x, a, b равныя имъ величины $\frac{x'}{n}$, $\frac{a'}{n}$, $\frac{b'}{n}$, получимъ однородное уравненіе:

$$\frac{x'}{n} = \frac{a'}{n} - \frac{\left(\frac{b'}{n}\right)}{\left(\frac{a'}{n}\right)} + \sqrt{\frac{a'}{n} - \left(\frac{b'}{n}\right)^2}$$

$$\text{или}\quad \frac{x'}{n} = \frac{a'}{n} - \frac{b'}{a'} + \frac{\sqrt{a'n - b'^2}}{a'},$$

гдѣ всѣ члены нулевого измѣренія.

Наконецъ, чтобы выразить искомую величину посредствомъ данныхъ, умножимъ всѣ члены на n; выйдетъ:

$$x' = a' - \frac{b'n}{a'} + \sqrt{a'n - b'^2}$$

—результатъ, одинаковый съ формулою (Б).

УПРАЖНЕНІЯ. Возстановить однородность уравненій:

16. $x = \frac{a}{b}$
17. $x = ab$
18. $x = \frac{1}{a^2} - \frac{a^3}{b} + b$
19. $x = \frac{a^2 + a - 1}{a}$
20. $x = \frac{a^2 + 1}{a^3}$
21. $x = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - 2a + 8}$
22. Окружность $= 2\pi = 6,28\ldots$
23. $x = \sqrt{2}$
24. $x = \sqrt{a}$
25. $x = \sqrt{a^2 + 1}$
26. $x = \sqrt{a - 5}$
27. $x = \sqrt{a^2 - b + 3}$
28. $x = \sqrt{a - b^3}$
29. $x = \sqrt{\frac{a}{c}}$
30. $x = \sqrt{\frac{1}{a}}$
31. $x = \sqrt{\frac{a^3}{b^2}}$
32. $x = \sqrt{\frac{a + bc}{c^2}}$
33. $x = \sqrt{\frac{a - b^2 + 1}{a^3 - 1}}$
34. $x = \frac{a^2}{\sqrt{c}}$
35. $x = \frac{a}{\sqrt{b}}$
36. $x = \frac{\sqrt{a}}{c + \sqrt{a}}$
37. $x = \sqrt{a + \sqrt{b}}$
38. $x = \sqrt{a\sqrt{c}}$
39. $x = \frac{1}{1 + \sqrt{a}}$
40. $x = \frac{2 - a\sqrt{c}}{\sqrt{a^2 - c}}$
41. $x = \sqrt[4]{abc}$
42. $x = \sqrt[4]{a^2 - \sqrt{c}}$
43. $x = \frac{a^3 - \sqrt{2a - 1}}{a - c\sqrt{a}}$
44. $x = \frac{\sqrt[3]{a + \sqrt{a + 1}}}{a - 1}$

Построеніе формулъ *).

§ 20. Построить формулу значитъ опредѣлить неизвѣстную величину помощію циркуля и линейки на основаніи той *зависимости* ея отъ данныхъ величинъ, которая выражена формулою.

Отсюда видно, что нельзя построить неоднородную формулу, потому что въ ней недостаетъ одной изъ величинъ, отъ которыхъ зависитъ x. Слѣдовательно, всякому построенію должно предшествовать возстановленіе однородности, если она была утрачена.

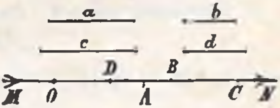
A. *Построеніе раціональныхъ формулъ.*

§ 21. Сперва предложимъ, что при рѣшеніи нѣкоторой задачи искомая выразилась цѣлою формулою вида:

$$x = a - b + c - d$$

и что буква x означаетъ разстояніе, на которое надо удалиться отъ данной точки O по направленію MN до искомой точки.

Чтобы построить x, отложимъ отъ точки O послѣдовательно и въ одномъ направленіи сперва длины $OA = a$, $AC = c$, выраженныя положительными членами формулы; дойдя такимъ образомъ до точки C, отложимъ отъ нея въ обратную сторону длины $CB = b$, $BD = d$, выраженныя отрицательными членами формулы. Разстояніе OD отъ начальной точки O до конца послѣдней отложенной длины будетъ равно x.



Направленіе MN и начальная точка O опредѣляются всякій разъ смысломъ того геометрическаго вопроса, къ которому относится рѣшеніе.

Также строятся выраженія:

$$x = 2a,\ x = 3a \ldots,$$

---

*) *Построеніе формулъ* имѣетъ много общаго съ такъ называемымъ *графическимъ исчисленіемъ*, которое съ особенною выгодою примѣняется къ рѣшенію разныхъ вопросовъ механики. (См. *Das graphische Rechnen und die graphische Statik* Карла Отто, 4-е изданіе 1879).

чрезъ послѣдовательное откладываніе длины a въ одномъ направленіи.

Кромѣ того геометрія даетъ средства дѣлить прямую на 2, 3, 4,... равныя части; слѣдовательно, легко построить

$$x = \frac{a}{2},\ x = \frac{a}{3},\ x = \frac{2}{3}a, \ldots$$

§ 22. Если искомая выражается одночленною дробью, то она должна имѣть одинъ изъ слѣдующихъ трехъ видовъ:

$$x = \frac{ab}{c},\ x = \frac{a^2}{b},\ x = \frac{abcd}{fgh}.$$

а) Основной видъ есть

$$x = \frac{ab}{c}.$$

Это равенство доставляетъ пропорцію:

$$c : a = b : x,$$

изъ которой видно, что x построится, какъ четвертая пропорціональная къ тремъ линіямъ данной длины: c, a и b. Построеніе это исполняется извѣстнымъ изъ элементарной геометріи способомъ, основаннымъ на теоремѣ: *паралельныя прямыя разсѣкаютъ стороны угла на пропорціональныя части.*

б) Построеніе искомой, когда она представляется въ видѣ

$$x = \frac{a^2}{b}.$$

можно свести на предыдущій случай, составивъ пропорцію:

$$b : a = a : x.$$

Но эта же самая пропорція показываетъ еще, что величина можетъ быть построена и какъ третья пропорціональная къ двумъ линіямъ данной длины: b и a, на основаніи свойства перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямаго угла на гипотенузу, что также извѣстно изъ элементарной геометріи.

в) Наконецъ, если значеніе x есть дробь

$$x = \frac{abcd}{fgh},$$

которой знаменатель состоитъ изъ нѣсколькихъ линейныхъ множителей, то построеніе будетъ состоять въ послѣдовательномъ отыскаваніи нѣсколькихъ четвертыхъ пропорціональныхъ. Дѣйствительно, данную дробь можно представить въ видѣ произведенія нѣсколькихъ дробей:

$$x = \frac{ab}{f} \cdot \frac{c}{g} \cdot \frac{d}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

изъ которыхъ первая, $\frac{ab}{f}$, есть линейная дробь съ линейнымъ же знаменателемъ, а остальныя — нулевого измѣренія. Означивъ линейную дробь буквою r:

$$\frac{ab}{f}=r$$

и обративъ полученное равенство въ пропорцію:

$$f:a=b:r,$$

можемъ построить r, какъ четвертую пропорціональную къ линіямъ данной длины: f, a и b. Подставивъ r вмѣсто $\frac{ab}{f}$ въ равенство (1), получимъ:

$$x=r\cdot\frac{c}{g}\cdot\frac{d}{h}, \text{ или } x=\frac{rc}{g}\cdot\frac{d}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

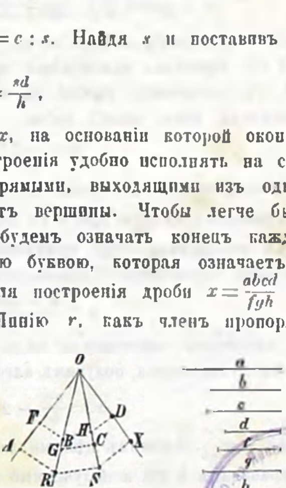
Точно также строимъ линейнаго множителя $\frac{rc}{g}$, для чего полагаемъ

$$\frac{rc}{g}=s$$

и составляемъ пропорцію $g:r=c:s$. Найдя s и поставивъ въ равенство (2), получимъ:

$$x=\frac{sd}{h},$$

а отсюда пропорцію $h:s=d:x$, на основаніи которой окончательно опредѣлится x. Эти построенія удобно исполнять на сторонахъ угловъ, образуемыхъ прямыми, выходящими изъ одной точки, откладывая всѣ линіи отъ вершины. Чтобы легче было слѣдить за построеніемъ, мы будемъ означать конецъ каждой отложенной линіи тою же самою буквою, которая означаетъ и ея длину. Такимъ образомъ для построенія дроби $x=\frac{abcd}{fgh}$ беремъ три произвольные угла. Линію r, какъ членъ пропорціи $f:a=b:r$, строимъ на сторонахъ угла AOR: на сторонѣ OA откладываемъ части OF $=f$ и OA $=a$, а на сторонѣ OR — часть OB $=b$; проведя прямую FB и параллельную ей AR, получимъ OR $=r$.



На сторонахъ примыкающаго угла ROS строимъ линію s, какъ членъ пропорціи $g : r = c : s$. Откладываемъ $OG = g$, $OC = c$, проводимъ прямую GC и параллельную ей RS и получаемъ $OR = s$.

Для построенія x, по пропорціи $h : s = d : x$, беремъ третій уголъ SOX. Откладываемъ $OH = h$ и $OD = d$, проводимъ HD и параллельную ей SX и получаемъ окончательно $OX = x$.

Замѣчаніе. Построеніе дробей вида $\frac{a^n}{b^{n-1}}$ можетъ быть упрощено, и тѣмъ значительнѣе, чѣмъ выше показатель n. Примѣръ:

$$x = \frac{a^{12}}{b^{11}} = \left(\frac{a^2}{b}\right)^6 \cdot \frac{1}{b^5} = \frac{r^6}{b^5},$$

гдѣ $r = \frac{a^2}{b}$. Далѣе

$$x = \left(\frac{r^2}{b}\right)^3 \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{s^3}{b^2},$$

гдѣ $s = \frac{r^2}{b}$. Такимъ образомъ x опредѣлится всего 4-мя построеніями вмѣсто 11-ти.

Еще примѣръ:

$$y = \frac{a^{11}}{b^{10}} = \left(\frac{a^2}{b}\right)^6 \cdot \frac{1}{ab^4} = \frac{k^6}{ab^4} = \left(\frac{k^2}{b}\right)^3 \cdot \frac{1}{ab} = \frac{p^3}{ab};$$

опять 4 построенія вмѣсто 10-ти.

§ 23. Правила, изложенныя въ §§ 21 и 22, легко примѣнить къ построенію дробей съ многочленнымъ *линейнымъ* знаменателемъ, какъ, напр., дроби

$$x = \frac{ab}{a + b - c}.$$

Дѣйствительно, построивъ многочленный знаменатель (§ 21), мы приведемъ данную дробь къ виду $\frac{ab}{k}$.

Тѣ же правила легко примѣняются и къ дробямъ съ многочленнымъ числителемъ и одночленнымъ знаменателемъ; напр., если

$$x = \frac{a^3 - 2ab^2 + c^3}{ab},$$

то, подписавъ знаменателя подъ каждымъ членомъ числителя и сдѣлавъ сокращенія, получимъ алгебраическую сумму одночленовъ:

$$x = \frac{a^2}{b} - 2b + \frac{c^3}{ab}.$$

Дроби $\frac{a^2}{b}$ и $\frac{c^3}{ab}$ замѣнимъ цѣлыми линейными числами, напр., k и l, по правиламъ § 22, а полученный многочленъ

$$x = k - 2b + l$$

построимъ по правилу § 21.

УПРАЖНЕНІЯ. Исполнить слѣдующія построенія, взявъ для этого прямыя произвольной длины.

45. Построить одночлены: $2a$; $\frac{3}{4}a$; $\frac{4a}{7}$; $2\frac{3}{5}a$; $0{,}25a$, $2\pi r$, $\frac{1}{4}\pi r$.

46. Многочлены обратить въ одночлены: $a+b$; $a-b$; $2a+3b-c$; $3a-2(b-c)$; $\frac{1}{2}a+0{,}4b-\frac{c+d}{3}$.

47. Построить дроби: $\frac{2ab}{c}$; $\frac{ab}{3c}$; $\frac{3ab}{2c}$; $\frac{a^2}{2n}$; $\frac{0{,}2a^2}{n}$; $\frac{a^2}{a+b}$.

48. Построить четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ прямымъ, основываясь на свойствѣ пересѣкающихся хордъ окружности.

49. Построить дроби при $a > b$ и при $a < b$:

$$\frac{a(a-b)}{b};\ \frac{ab}{a-b};\ \frac{a(a-b)}{a+b};\ \frac{(a+b)^2}{a+b};\ \frac{a^2-b^2}{a}.$$

50. Построить: $\frac{ab}{a+b-c}$; $\frac{3(a-b+2c)(a+b)}{2a-3b+c}$.

51. $a-\frac{bc}{a}$; $\frac{a^2}{b}-\frac{2ac}{b}+\frac{bc}{2a}$; $\frac{(a+b)^2}{2a}-\frac{(a-b)^2}{b}$; $\frac{3ab}{a+b}$.

52. $\frac{ab+ac-bc}{c}$; $\frac{a^2+b^2}{a}$; $\frac{a^2-b^2+c^2}{a-b}$; $\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}$;

$$\frac{ac+bc+ad+bd}{a+d};\ \frac{a^2+ab+b^2}{a-b};\ \frac{a^2-ab+b^2}{a+b}.$$

53. $\frac{a^2b}{cd}$; $\frac{2a^2b^2}{cdh}$; $\frac{a^2b^3}{2c^2d^2}$; $\frac{a^6}{3b^2c}$; $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$; $\frac{2a^2(a+b-c)^2}{3(a-b+c)^2}$.

54. $\frac{2a^4}{b^3}-\frac{a^3}{3b^2}+\frac{a^2}{2b}-a$, $\frac{a^3}{b^2}-\frac{(a-b)^3}{2(a+b)^2}+\frac{0{,}6a^2b}{(a-b)^2}+0{,}75a$.

55. $\frac{abcd-abch+bcdh-bch^2}{adh}$; $\frac{3a^3b^2-2a^2b^3+a^5-b}{2a^2b^2}$;

$$\frac{a^2b-ab^2-a^2c+2abc-b^2c-ac^2+bc^2}{ac};\ \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{(a-b)^2};$$

$$\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{(a+b)^2};\ \frac{a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4}{(a+b)^2}.$$

56. Количества нулевого измѣренія: $\frac{ab}{cd}$, $\frac{a^2}{bc}$, $\frac{abc}{dfg}$, $\frac{2a^2b^3}{3c^2d}$, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, $\frac{ab+ac}{bc}$, $\frac{a^2-b^2}{ab}$ замѣнить дробями вида $\frac{m}{n}$. *Указаніе:* надо раздѣлить оба члена преобразуемой дроби на произведеніе столькихъ линейныхъ множителей, выбранныхъ произвольно, сколько въ каждомъ членѣ измѣреній безъ одного; тогда числитель и знаменатель обратятся въ линейныя числа, которыя и надо построить. Алгебраическая сумма нѣсколькихъ дробей должна быть предварительно приведена къ общему знаменателю.

Замѣтимъ кстати, что рядъ отвлеченныхъ дробей легко привесть къ общему линейному знаменателю k, произвольно взятому. Для этого надо каждую данную дробь, напр., $\frac{abc}{dfg}$, приравнять дроби вида $\frac{x}{k}$, и изъ полученнаго уравненія опредѣлить, а потомъ и построить неизвѣстнаго числителя x.

57. Предполагая, что x есть линейное число, построить:

$$x = 2,\ x = 2\pi;\ x = \frac{a}{b},\ x = ab;\ x = \frac{a^2 + a - 1}{a};\ x = \frac{a^2 + 1}{a^2};$$

$$x = \frac{1}{a^2} - \frac{a^2}{b} + b;\ x = \frac{a^2 - 1}{a - b + 1}.$$

§ 24. Перейдемъ къ случаю, когда x выражается дробью, знаменатель которой есть многочленъ двухъ или болѣе измѣреній, напримѣръ:

$$x = \frac{a^2b^2 + 4a^2c^3 - 2bc^4}{2a^2bc - ab^2c + 3abc^2}.$$

а) Если такой знаменатель удобно разложить на линейные множители, то построеніе тотчасъ же приведется къ одному изъ предыдущихъ случаевъ. Въ нашемъ примѣрѣ всѣ члены знаменателя имѣютъ общими множителями числа: a, b, c. Отдѣливъ ихъ за скобку, получимъ:

$$\textit{знаменатель} = abc\,(2a - b + 3c),$$

гдѣ всѣ множители линейные. Построивъ многочленный линейный множитель $2a - b + 3c$ (§ 21), найдемъ нѣкоторую линію, длину которой означимъ буквою k; тогда знаменатель обратится въ одночленъ:

$$x = \frac{a^2b^2 + 4a^2c^3 - 2bc^4}{abck}.$$

Послѣ этого получимъ (по § 23):

$$x = \frac{a^2b}{ck} + \frac{4ac^2}{bk} - \frac{2c^3}{ak}$$

и окончимъ построеніе по извѣстнымъ уже правиламъ §§ 22, и 21)

УПРАЖНЕНІЯ. 58. Построить дроби: $\frac{b^3}{ab+ac+ad}$; $\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2-b^2}$; $\frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2b-2ab^2+b^3}$; $\frac{a^4+b^4}{a^2bc-abc^2+a^2b^2c-ab^2c^2}$.

59. Замѣнить дробями вида $\frac{m}{n}$ отношенія: $\frac{ab}{ac+bc}$;

$$\frac{ac-b^2}{bc+ab};\ \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3};$$

60. Построить дроби, принимая x за линейное число:

$$x=\frac{a^2}{a^2-1};\ x=\frac{a+1}{a^2-2a+1};\ x=\frac{a^4}{a^2-4};\ x=\frac{2}{6a-3a^2-3};$$

б) *Если многочленный знаменатель не разлагается на цѣлые линейные множители, то для обращенія его въ одночленъ надо вынести въ немъ за скобки произведеніе столькихъ линейныхъ множителей, выбраныхъ произвольно, сколько въ немъ измѣреній безъ одного.* Пусть, напр.,

$$x=\frac{a^4+3a^3b-a^2c^2+bc^3}{2a^2b-abc+c^3}.$$

Такъ какъ знаменатель трехъ измѣреній, то вынесемъ за скобку произведеніе двухъ произвольныхъ множителей, напр ab; получимъ:

$$\text{знаменатель}=ab\cdot\frac{2a^2b-abc+c^3}{ab}=ab\left(2a-c+\frac{c^3}{ab}\right),$$

гдѣ всѣ три множителя линейные. Построивъ дробь $\frac{c^3}{ab}=k$ (§ 22), а затѣмъ и многочленъ $2a-c+k=p$ (§ 21), мы замѣнимъ данный знаменатель одночленомъ abp, и тогда выраженіе искомой величины приметъ видъ:

$$x=\frac{a^4+3a^3b-a^2c^2+bc^3}{abp}.$$

Отсюда, исполнивъ дѣленіе, получимъ:

$$x=\frac{a^3}{bp}+\frac{3a^2}{p}-\frac{ac^2}{bp}-\frac{c^3}{ap}.$$

Остается построить этотъ многочленъ (§§ 22 и 21).

Примѣняя объясненное сейчасъ правило, надо выбирать множителей, наиболѣе встрѣчающихся въ обоихъ членахъ данной дроби, потому что тогда произойдутъ значительныя сокращенія и число отдѣльныхъ построеній уменьшится.

Замѣч. 1. Тѣмъ же способомъ можно обращать и числителя въ одночленъ, если это окажется удобнымъ.

Замѣч. 2. Если многочленный множитель знаменателя при построеніи окажется равнымъ нулю, то $x = \infty$ и построеніе невозможно.

Замѣч. 3. Многочлены вида $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$ удобно обращаются въ одночлены при помощи теоремы Пиѳагора. (См. ниже § 27.)

УПРАЖНЕНІЯ. **61.** Построить дроби: $\frac{a^3+b^3}{ac+bd}$; $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$; $\frac{a^2b^2}{a^3+b^3}$; $\frac{a^5-b^5}{3a^4\times 3ab^3-b^4}$; $\frac{a^3b^3}{a^4-a^3b^2+3ab^3-b^4}$; $\frac{a^4+3a^3b-a^2bc-b^3cd}{3a^2b-2b^3-bc^2+2c^2d}$; $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2-b^2+4c^2+d^2-9f^2}$; $\frac{(a+b)(a^2+b^2)^2}{a^4-2a^2b^2+b^4}$.

62. Построить корни уравненій: $(a^2 - bx)(b^2 - ax) = (bx + a^2)\,ax$; $a^3(x-a) = b^3(x+b)$; $\frac{c^2-ax}{b} = \frac{bx-c^2}{a}$; $\frac{ax}{c} - \frac{c-x}{2} = \frac{(a^2-c^2)\,x}{3ac}$.

63 Отношенія $\frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}$, $\frac{abc}{a^2+c^2}$ замѣнить отношеніями вида $\frac{m}{n}$.

64. Построить корни уравненій, въ которыхъ x означаетъ линейное число: $x - \frac{a}{c^2} = \frac{b}{2c} - \frac{x}{ab}$; $a^3(2 - ax) = a - (x+2)$

Б. *Построеніе ирраціональныхъ формулъ.*

§ 25. Помощію циркуля и линейки могутъ быть построены только такія ирраціональныя формулы, въ составъ которыхъ входятъ корни 2-й, 4-й, 8-й... степеней, вообще корни, которыхъ показатели суть степени 2-хъ.

Основная ирраціональная формула, отъ построенія которой зависитъ построеніе остальныхъ, есть

$$x = \sqrt{ab}.$$

Она получается изъ пропорціи

$$a : x = x : b,$$

а потому выражаетъ среднюю пропорціональную длину между a и b. Построеніе линіи, имѣющей такую длину, излагается въ начальной геометріи.

§ 26. Извѣстно, что подкоренная величина всякаго квадратнаго корня, выражающаго линію, имѣетъ два измѣренія (§ 16); слѣдов., ее всегда можно разложить на два линейныхъ множителя, а самый корень привести къ виду $x = \sqrt{ab}$, какъ бы ни была сложна подкоренная величина. Для этого надо только взять въ ней одинъ произвольный множитель за скобку. Пусть, напр.,

$$x = \sqrt{ab + \frac{2a^2}{b} - \frac{3a^2b - b^4}{ab - a^2}}.$$

Если вынесемъ множитель a за скобку, то получимъ выраженіе:

$$x = \sqrt{a\left(b + \frac{2a^2}{b} - \frac{3a^2b - b^4}{a^2b - a^3}\right)},$$

гдѣ подкоренная величина разложена на два линейныхъ множителя. Для избѣжанія лишнихъ построеній надо брать произвольнымъ множителемъ то линейное число, которое наиболѣе встрѣчается въ членахъ подкоренной величины.

Линія, выраженная многочленнымъ множителемъ, построится по извѣстнымъ правиламъ (§§ 21—24); означивъ ея длину буквою k, получимъ

$$x = \sqrt{ak};$$

затѣмъ окончимъ построеніе, найдя среднюю пропорціональную длину между a и k.

§ 27. При построеніяхъ часто встрѣчаются формулы:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ и } x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$\sqrt{a^2+b^2}$ выражаетъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника, котораго катеты равны a и b.

$\sqrt{a^2-b^2}$ выражаетъ катетъ треугольника, котораго гипотенуза равна a, а другой катетъ равенъ b.

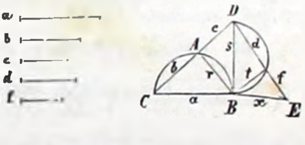
Самое же построеніе прямоугольныхъ треугольниковъ по этимъ даннымъ извѣстно изъ геометріи.

Вторую формулу $\sqrt{a^2-b^2}$ можно представить еще въ видѣ $\sqrt{(a+b)(a-b)}$; слѣд., длину $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ можно построить также, какъ среднюю пропорціональную между $a+b$ и $a-b$.

Построеніе формулы вида

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + f^2 \ldots\ldots}$$

приводится къ построенію нѣсколькихъ прямоугольныхъ треугольниковъ. Положивъ $a^2 - b^2 = r^2$, построимъ прямоугольный △ ABC по даннымъ: гипотенузѣ BC $= a$ и катету AC $= b$; длина другого катета AB и будетъ r. Слѣдовательно



$$x = \sqrt{r^2 + c^2 - d^2 + f^2}.$$

Далѣе, положивъ $r^2 + c^2 = s^2$, опредѣлимъ s, какъ длину гипотенузы прямоугольнаго треугольника BAD, построеннаго по даннымъ катетамъ r и c. Тогда выйдетъ:

$$x = \sqrt{s^2 - d^2 + f^2}.$$

И такъ далѣе. Ходъ построеній виденъ на чертежѣ.

Предлагаемъ ученикамъ разрѣшить вопросъ, какъ поступить, если который нибудь изъ вычитаемыхъ членовъ окажется больше алгебраической суммы предыдущихъ членовъ.

§ 28. Для построенія формулъ, состоящихъ изъ произведенія линейнаго числа на квадратный корень изъ отвлеченнаго, напр.,

$$a\sqrt{2},\ a\sqrt{\frac{b}{c}},$$

необходимо сперва подвести линейное число подъ знакъ радикала, а потомъ уже приступать къ построенію. Такъ.

$$a\sqrt{2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2a \cdot a} = \text{сред. пропорц. между } 2a \text{ и } a.$$

$$a\sqrt{\frac{b}{c}} = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}} = \sqrt{a \cdot \frac{ab}{c}} = \sqrt{a \cdot r},\ \text{гдѣ } r = \frac{ab}{b}.$$

УПРАЖНЕНІЯ. Построить:

65. $\sqrt{\frac{abc}{d}}$; $\sqrt{\frac{abcd}{fg}}$; $\sqrt{\frac{a^2b^3}{2cd^3}}$; $3\sqrt{ab}$; $\frac{a}{b}\sqrt{cd}$; $\frac{a}{b}\sqrt{ab}$;
$a\sqrt{2}$; $a\sqrt{\frac{1}{3}}$; $a\sqrt{\frac{a}{b}}$; $a\sqrt{\frac{2\,abc}{3dgh}}$.

66. $a+\sqrt{ab}$; $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{ab}}$; $\frac{a^2-b\sqrt{3ab}}{a-b}$; $(a-b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$; $\frac{a^2-b\sqrt{ab}}{a-b\sqrt{3}}$;
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{2a}$; $\left(\sqrt{\frac{2a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{2a}}\right)\sqrt{ab}$; $\sqrt{a\sqrt{ab}}$;
$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{ab}}}$; $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; $\frac{\sqrt{ab\sqrt{ac}}+\sqrt{bc\sqrt{ab}}}{\sqrt{c}}$.

67. $\sqrt{ab+ac}$; $\sqrt{a^2-bc}$; $\sqrt{ab+\frac{abcd}{fg}-c^2}$; $\sqrt{\frac{(ac+bd)(bc-ad)}{ab+cd}}$;
$\sqrt{a^2-\frac{(a-b)^2c}{a-c}}$; $\sqrt{\frac{a^2b^3-2b^3c^2+a^3c^2}{a^2c-b^2c+a^2b}}$; $\sqrt{ab+c\sqrt{ab}}$;
$\sqrt{\frac{a^2b-c^3}{c+a}}$; $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^4}}$; $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{abc}{b-\sqrt{ab}}}$;

68. $\frac{\sqrt{abcd}}{n}$; $\frac{\sqrt{a^4-b^4}}{a+b}$; $\frac{a^3-c\sqrt{a^3b-b^3c}}{ab+ac}$; $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{a^3+b^3}}{\sqrt{a^2-\sqrt{a^4-b^4}}}$;

$\frac{a\sqrt{a^6+a^3b^3+b^6}}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}$ $\frac{\sqrt{a^3+b^3+c^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

69. $\sqrt{a^2+4c^2}$; $\sqrt{0,25a^2-b^2}$; $\sqrt{2a^2+c^2-3d^2}$.

70. Замѣнить дробями вида $\frac{m}{n}$ слѣдующія отношенія.

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+b};\ \frac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \frac{a+\sqrt{ab}}{a-\sqrt{ab}};\ \sqrt{\frac{abc}{fgh}};\ \frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}};\ \sqrt{1+\frac{a}{b}};\ \sqrt{1-\frac{a}{b}};\ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}};\ \sqrt{\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}}.$$

§ 29. Если линія выражается корнемъ, котораго показатель есть степень 2-хъ, то число линейныхъ множителей подкоренной величины есть такая же степень 2-хъ (§ 16). Отсюда проистекаетъ возможность замѣнить построеніе такого корня, подобно извлеченію, послѣдовательнымъ построеніемъ нѣсколькихъ квадратныхъ корней. Пусть, напр.,

$$x=\sqrt[8]{abcdfghk}=\sqrt[4]{\sqrt{abcdfghk}}.$$

Подкоренная величина состоитъ изъ 8 множителей; поэтому соединивъ ихъ по два, можемъ разбить $\sqrt{abcdfghk}$ на произведеніе четырехъ корней вида $\sqrt{mn}$. Получимъ:

$$x=\sqrt[4]{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}\cdot\sqrt{fg}\cdot\sqrt{hk}}.$$

Построивъ $\sqrt{ab}=p$, $\sqrt{cd}=q$, $\sqrt{fg}=r$, $\sqrt{hk}=s$, найдемъ

$$x=\sqrt[4]{pqrs},$$

гдѣ показатель корня и число линейныхъ множителей подкоренной величины вдвое меньше, чѣмъ въ данной формулѣ.

Повторивъ то же преобразованіе и то же построеніе надъ $\sqrt[4]{pqrs}$, снова уменьшимъ вдвое какъ показателя корня, такъ и число линейныхъ множителей подкоренной величины. Выйдетъ:

$$x=\sqrt[4]{pqrs}=\sqrt{\sqrt{pqrs}}=\sqrt{\sqrt{pq}\cdot\sqrt{rs}}=\sqrt{tu},$$

гдѣ t и u означаютъ длину линій, выраженныхъ корнями: $\sqrt{pq}$ и $\sqrt{rs}$. Остается построить $x=\sqrt{tu}$.

Если требуется построить корень, котораго подкоренная величина есть многочленъ, то, для примѣнимости изложеннаго сейчасъ способа построенія, надо предварительно преобразовать подкоренную величину посредствомъ выноса произвольныхъ множителей за скобки (см. § 24, 6.), т. е. обратить ее въ одночленъ.

УПРАЖНЕНІЯ. 71. Построить: $\sqrt[4]{2abcd}$; $\sqrt[4]{3a^3b}$; $\sqrt[8]{\frac{a^3b^5c^2}{dh}}$; $\sqrt[16]{\frac{a^{11}b^9}{d^3h}}$; $a\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[4]{a^4-b^4}$; $\sqrt[4]{a^4+b^4}$; $a\sqrt[4]{1+\sqrt[4]{2}}$; $a\sqrt[8]{1+\frac{b}{c}}$.

Построеніе корней квадратнаго уравненія.

§ 30. Если рѣшеніе геометрическаго вопроса приведетъ къ квадратному уравненію, и ни одна изъ линій, отъ которыхъ зависитъ искомая, не принята за единицу, то уравненіе будетъ, во первыхъ, однородно (§ 18); во вторыхъ, по раздѣленіи всѣхъ его членовъ на коэффиціентъ при квадратѣ неизвѣстной, оно приметъ слѣдующій видъ:

$$x^2+px+q^2=0,$$

гдѣ всѣ члены двухъ измѣреній и слѣд. выражаютъ площади. Площадь, выраженная извѣстнымъ членомъ, всегда можетъ быть замѣнена равномѣрною ей площадью квадрата, и потому мы означили ее чрезъ q^2. Относительно знаковъ могутъ представиться четыре случая:

$$1)\ x^2+px+q^2=0; \qquad 3)\ x^2+px-q^2=0;$$
$$2)\ x^2-px+q^2=0; \qquad 4)\ x^2-px-q^2=0.$$

1-й случай. Корни уравненія 1-го $x^2+px+q^2=0$ выражаются линейными формулами:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}$$
$$x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q^2}.$$

Правила построенія раціональныхъ и ирраціональныхъ формулъ даютъ намъ всѣ средства для построенія этихъ корней.

Если $q^2>\left(\frac{p}{2}\right)^2$ или, что то же $q>\frac{p}{2}$, то корни будутъ мнимыми и построить ихъ нельзя.

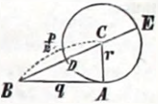
Если $q^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2$ или $q=\frac{p}{2}$, то радикалъ обращается въ нуль и корни уравненія становятся равными: $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$. Знакъ ихъ отрицательный, а безусловная величина построится, когда раздѣлимъ пополамъ ту линію, которая выражена числомъ p.

Если $q^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2$, или $q < \frac{p}{2}$, то корни уравненія возможны и неравны. Такъ какъ $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2} = \frac{p}{2}$, то $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2} < \frac{p}{2}$; слѣдов., въ разбираемомъ случаѣ оба корня, x_1 и x_2, будутъ имѣть знакъ раціональнаго члена, т. е. будутъ отрицательными, именно:

$$x_1 = -\left(\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}\right).$$

$$x_2 = -\left(\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}\right).$$

Построимъ линіи, выраженныя этими корнями. Радикальный членъ $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}$ есть длина катета прямоугольнаго треугольника, котораго гипотенуза равна $\frac{p}{2}$, а другой катетъ равенъ q. Чтобы получить такой треугольникъ, построимъ прямой уголъ BAC, на одной изъ его сторонъ отложимъ отъ вершины часть $AB = q$ и, принявъ точку B за центръ, опишемъ дугу радіусомъ,



равнымъ $\frac{p}{2}$. Эта дуга пересѣчетъ другую сторону угла BAC въ нѣкоторой точкѣ C, потому что $\frac{p}{2}$ по условію больше q. Проведя затѣмъ прямую BC, получимъ желаемый прямоугольный треугольникъ ABC: гипотенуза его $BC = \frac{p}{2}$, катетъ $AB = q$ и катетъ

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2} = r. \text{ Итакъ:}$$

$$x_1 = -(BC - AC).$$

$$x_2 = -(BC + AC).$$

Разность $BC - AC$ и сумма $BC + AC$ получатся обѣ вдругъ, если примемъ точку C за центръ, $CA = r$ — за радіусъ и опишемъ окружность. Выйдетъ:

$$BC - AC = BD, \text{ слѣд. } x_1 = -BD.$$

$$BC + AC = BE, \text{ слѣд. } x_2 = -BE.$$

2-й случай. Уравненіе 2-е

$$x^2 - px + q^2 = 0$$

получается изъ 1-го, чрезъ перемѣну x на $-x$; слѣдовательно, корни его отличаются только знаками отъ корней уравненія 1-го, т.-е. они оба положительные и имѣютъ тѣ же безусловныя величины $\frac{p}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q^2}$, которыя были построены въ предыдущемъ случаѣ.

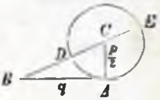
3-й случай. Корни уравненія 3-го, $x^2 + px - q^2 = 0$, суть

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2}.$$
$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2}.$$

Они всегда возможны, потому что оба члена подъ знакомъ радикала положительные. Знаки ихъ различны, потому что зависятъ отъ знака радикальнаго члена, котораго безусловная величина больше $\frac{p}{2}$; значеніе x_1 будетъ положительное, а x_2—отрицательное:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2} - \frac{p}{2}.$$
$$x_2 = -\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2} + \frac{p}{2}\right).$$

Построимъ ихъ, Радикалъ $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2}$ выражаетъ теперь длину гипотенузы прямоугольнаго треугольника, котораго катеты равны $\frac{p}{2}$ и q. Такой треугольникъ получится, когда построимъ прямой уголъ BAC, на сторонахъ его отложимъ отъ вершины части $AB = q$, $AC = \frac{p}{2}$ и соединимъ концы ихъ прямою BC. Выйдетъ:



$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q^2}. \text{ Поэтому}$$
$$x_1 = BC - AC;\ x_2 = -(BC + AC).$$

Наконецъ, описавъ окружность радіусомъ $CA = \frac{p}{2}$ изъ центра C, получимъ:

$$BD = BC - CD = BC - CA \text{ и слѣд. } x_1 = BD.$$
$$BE = BC + CE = BC + CA \text{ и слѣд. } x_2 = -BE.$$

4-й случай. Корни уравненія 4-го, $x^2 - px - q^2 = 0$, отличаются только знаками отъ построенныхъ сейчасъ корней уравненія 3-го, потому что перемѣнивъ x на $-x$ въ уравненіи 3-мъ, получимъ уравненіе 4-е.

Построеніе корней квадратнаго уравненія безъ вывода формулы.

§ 31. Корни квадратнаго уравненія въ каждомъ изъ четырехъ разсмотрѣнныхъ случаевъ можно строить, не рѣшая уравненія.

Ограничимся построеніемъ корней 2-го и 4-го уравненій, потому что корни 1-го и 3-го, какъ мы видѣли, отличаются отъ нихъ только знаками.

а) Въ уравненіи

$$x^2 - px + q^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

перенесемъ первые два члена во вторую часть; выйдетъ:

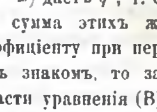
$$q^2 = px - x^2 \text{ или } q^2 = x(p - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Такъ какъ произведеніе количествъ x и $(p - x)$ даетъ q^2; т. е. независимый членъ уравненія (A), и притомъ сумма этихъ же количествъ, $x + (p - x)$, равна $+p$, т. е. коэффиціенту при первой степени неизвѣстной, взятому съ обратнымъ знакомъ, то заключаемъ, что построивъ множителей второй части уравненія (B), мы тѣмъ самымъ построимъ корни уравненія (A).

Обративъ уравненіе (B) въ пропорцію, получимъ:

$$x : q = q : (p - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C).$$

Замѣчая, что сумма неизвѣстныхъ членовъ этой пропорціи, x и $p - x$, есть данная величина p, и что другая данная q есть средняя пропорціональная между ними, мы можемъ принять p за длину діаметра, x и $p - x$ за длину его отрѣзковъ и q за длину перпендикуляра, опущеннаго на діаметръ изъ нѣкоторой точки окружности. И такъ, на линіи $AB = p$ строимъ полуокружность; изъ точки A возставляемъ перпендикуляръ къ діаметру и откладываемъ на немъ часть $AC = q$; чрезъ точку C проводимъ параллельную къ діаметру до встрѣчи съ окружностью въ точкѣ D; наконецъ, изъ точки D опускаемъ перпендикуляръ DH на діаметръ



Отрѣзки $AH = x$ и $BH = p - x$ удовлетворяютъ пропорціи (C), потому что

$$AH : DH = DH : HB \text{ или } x : q = q : (p - x).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ они удовлетворяютъ и уравненію (B), которое получается изъ этой пропорціи, а, слѣдовательно, они выражаютъ корни уравненія (A).

Это построеніе даетъ средство замѣнить алгебраическое изслѣдованіе корней геометрическимъ.

1) Если перпендикуляръ AC будетъ менѣе радіуса круга, то прямая CD встрѣтитъ окружность; въ этомъ случаѣ мы можемъ получить на діаметрѣ два отрѣзка AH и HB, изъ которыхъ первый меньше, а второй больше радіуса величиною OH, равною $\sqrt{OD^2 - DH^2}$. Слѣдовательно, если $q < \frac{p}{2}$, то уравненіе (A) имѣетъ два неравные корня, одинъ меньше $\frac{p}{2}$, другой больше $\frac{p}{2}$ на длину отрѣзка $OH = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

2) Если перпендикуляръ AC равенъ радіусу, то прямая, проведенная чрезъ точку C параллельно діаметру AB, коснется окружности въ точкѣ K, и тогда оба отрѣзка діаметра будутъ равны радіусу круга. Слѣдовательно, если $q = \frac{p}{2}$, то уравненіе (A) имѣетъ равные корни и величина ихъ есть $\frac{p}{2}$.

3) Если перпендикуляръ AC больше радіуса OK, то прямая, проведенная чрезъ точку C параллельно діаметру, не встрѣтитъ окружности и на діаметрѣ AB нельзя будетъ получить такихъ отрѣзковъ, между которыми AC есть средняя пропорціональная. Слѣдовательно, если $q > \frac{p}{2}$, то корни уравненія (A) мнимые.

б) Перейдемъ къ уравненію

$$x^2 - px - q^2 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (K).$$

Перенеся первые два члена во вторую часть и взявъ x за скобку, получимъ

$$-q^2 = x\,(p - x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (L).$$

Опять замѣчаемъ, что, опредѣливъ построеніемъ множителей x и $(p-x)$, мы тѣмъ самымъ опредѣлимъ корни уравненія (K), потому что произведеніе этихъ множителей равно $(-q^2)$, т. е. независимому члену уравненія (K), а сумма ихъ $x + (p-x)$ равна коэффиціенту p при первой степени неизвѣстной, взятому съ обратнымъ знакомъ.

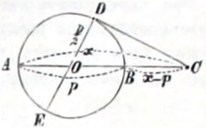
Чтобы уравненіе (L) удобно было обратить въ пропорцію, перемѣнивъ знаки въ обѣихъ частяхъ, получимъ:

$$q^2 = x\,(x - p) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (M).$$

а отсюда выходитъ пропорція

$$x : q = q : (x - p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (N).$$

къ которой 4-й членъ $x-p$ отличается только знакомъ отъ второго корня уравненія (K), т. е. отъ $p-x$. Теперь замѣчаемъ, что разность неизвѣстныхъ количествъ x и $x-p$ есть данная величина p, и что другая данная q есть средняя пропорціональная между ними. Зная, что касательная къ окружности есть средняя пропорціональная между сѣкущею, проведенною изъ одной съ нею точки и



внѣшнимъ отрѣзкомъ сѣкущей, мы можемъ принять q за длину касательной къ окружности, которой діаметръ равенъ p, x — за длину сѣкущей, проведенной чрезъ центръ, и $x-p$ за длину внѣшняго ея отрѣзка. И такъ на линіи $DE = p$ строимъ окружность, проводимъ къ ней касательную въ точкѣ D, по касательной откладываемъ отъ точки касанія часть $DC = q$, а чрезъ точку C и центръ проводимъ сѣкущую CA. По свойству касательной получимъ пропорцію:

$$CA : CD = CD : CB, \text{ или } x : q = q : (x - p)$$

отсюда $$q^2 = x\ (x - p).$$

Поэтому сѣкущая CA, равная x, и ея отрѣзокъ CB, равный $x-p$, выражаютъ корни уравненія (M). Онѣ же выразятъ и корни уравненій (L) и (K), если возьмемъ отрѣзокъ CB съ обратнымъ знакомъ.

Указанное здѣсь построеніе всегда возможно и корни уравненія (K) всегда возможны.

Построеніе формулъ, содержащихъ тригонометрическія величины.

§ 32. Данными и искомыми величинами въ геометрическихъ вопросахъ могутъ быть не только линіи, но и углы. Углы входятъ въ вычисленія обыкновенно не прямо, но своими тригонометрическими величинами: синусомъ, тангенсомъ и т. п. Поэтому уравненія, доставляющія отвѣтъ на ту или другую задачу, могутъ заключать въ себѣ тригонометрическія величины или угловъ данныхъ, или угловъ искомыхъ.

1. Если уравненіе, рѣшающее предложенную задачу, содержитъ въ себѣ тригонометрическія величины лишь *данныхъ угловъ*, а искомая величина есть нѣкоторая линія, то рѣшая его отно-

сительно этой искомой, мы должны получить однородное выраженіе первой степени, составленное изъ данныхъ линій и тригонометрическихъ величинъ данныхъ угловъ. Таково, напримѣръ, выраженіе

$$x = \frac{a^3\text{Sin}^2\alpha + b^2c\text{Tg}\beta}{c^2\text{Sin}\gamma + d^2}.$$

При опредѣленіи степени однородности подобныхъ формулъ тригонометрическія величины, какъ отвлеченныя числа (§ 13), не должны идти въ счетъ линейныхъ множителей отдѣльныхъ членовъ. На этомъ основаніи выраженіе

$$x = \frac{a^2\text{Sin}\alpha + b\text{Sin}^2\beta}{c}$$

неоднородно и въ геометрическомъ смыслѣ не представляетъ ничего.

2. Положимъ теперь, что уравненіе, рѣшающее задачу, содержитъ въ себѣ тригонометрическія величины *искомаго угла*. Опредѣляя изъ такого уравненія, *если возможно*, какую нибудь изъ тригонометрическихъ величинъ искомаго угла, мы должны получить ее въ видѣ однороднаго выраженія нулевой степени, т.-е. отвлеченнаго числа. Отдѣльные члены этого выраженія будутъ содержать въ себѣ данныя линіи и тригонометрическія величины данныхъ угловъ, и присутствіе послѣднихъ опять не повліяетъ на степень однородности отдѣльныхъ членовъ. Таковы, напримѣръ, выраженія

$$\text{Sin}\, x = \frac{a\text{Sin}\alpha + b\text{Sin}\beta}{c}$$

при условіи $a\text{Sin}\alpha + b\text{Sin}\beta <$ или $= c$ и

$$\text{Tg}x = \frac{a^2\text{Tg}^2\alpha + b^2}{c^2 + d^2\text{Sin}^2\alpha}$$

при всякихъ значеніяхъ a, b, c, d.

§ 33. Построеніе однородныхъ формулъ первой степени, содержащихъ въ себѣ, кромѣ данныхъ линій, также и тригонометрическія величины данныхъ угловъ, можетъ быть сведено на знакомое уже намъ построеніе подобныхъ же формулъ, но содержащихъ въ себѣ однѣ лишь линіи.

1-й способъ. Одночлены вида $a\text{Sin}\alpha$, $a\text{Cos}\alpha$, $a\text{Tg}\alpha$, и $a\text{Cot}\alpha$, какъ извѣстно изъ тригонометріи, представляютъ катеты прямоугольныхъ треугольниковъ:

$a\text{Sin}\alpha$ есть катетъ треугольника, въ которомъ α есть уголъ, противолежащій этому катету, и a—гипотенуза.

$a\text{Cos}\alpha$ есть катетъ треугольника, въ которомъ α есть уголъ, прилежащій этому катету, и a—гипотенуза.

$a\mathrm{Tg}\alpha$ есть катетъ треугольника, въ которомъ α есть уголъ, противолежащій этому катету, и a—другой катетъ.

$a\mathrm{Cot}\alpha$ есть катетъ треугольника, въ которомъ α есть уголъ, прилежащій этому катету, и a—другой катетъ.

Такіе треугольники легко строятся.

Положимъ, что одночленъ $a\mathrm{Sin}\alpha$, построенный по этому способу, выразился длиною h; тогда одночлены $a^2\mathrm{Sin}^2\alpha$, $a^3\mathrm{Sin}^3\alpha$,... выразятся степенями h^2, h^3... То же самое относится и къ степенямъ одночленовъ трехъ остальныхъ видовъ.

Положимъ, далѣе, что имѣется одночленъ $a^5\mathrm{Sin}^2\alpha$, гдѣ показатель линейнаго множителя болѣе показателя тригонометрическаго множителя, тогда получаемъ:

$$a^5\mathrm{Sin}^2\alpha = a^3(a\mathrm{Sin}\alpha)^2 = a^3h^2, \text{ гдѣ } h = a\mathrm{Sin}\alpha.$$

Наконецъ, если показатель тригонометрическаго множителя болѣе показателя линейнаго множителя, какъ въ одночленѣ $a^2\mathrm{Sin}^4\alpha$, то получимъ:

$$a^2\mathrm{Sin}^4\alpha = (a\mathrm{Sin}\alpha)^2 \cdot \mathrm{Sin}^2\alpha = h^2\mathrm{Sin}^2\alpha = g^2,$$

гдѣ $h = a\mathrm{Sin}\alpha$ и $g = h\mathrm{Sin}\alpha$. Также точно преобразуются одночлены и съ другими тригонометрическими множителями.

Одночлены вида $\frac{a}{\mathrm{Sin}\alpha}$ и $\frac{a'}{\mathrm{Cos}\alpha}$ выражаютъ, какъ извѣстно изъ тригонометріи, гипотенузы треугольниковъ, въ которыхъ a есть катетъ и α — уголъ, противолежащій ему или прилежащій къ нему. Такіе треугольники также легко строятся.

Одночлены $\frac{a}{\mathrm{Tg}\alpha}$ и $\frac{a}{\mathrm{Cot}\alpha}$, вслѣдствіе извѣстнаго уравненія $\mathrm{Tg}\alpha \cdot \mathrm{Cot}\alpha = 1$, соотвѣтственно равны одночленамъ $a\mathrm{Cot}\alpha$ и $a\mathrm{Tg}\alpha$ и потому строятся, какъ эти послѣдніе.

Такимъ образомъ весьма простымъ построеніемъ прямоугольныхъ треугольниковъ можно исключать тригонометрическія величины изъ всякаго выраженія, въ которое онѣ входятъ, какъ множители или дѣлители линейныхъ чиселъ и ихъ степеней.

Возьмемъ для примѣра выраженіе

$$x = \frac{m^2\mathrm{Sin}^2\alpha + n^2\mathrm{Tg}^3\beta}{p\mathrm{Cos}\gamma}.$$

Примѣняя къ нему объясненный сейчасъ способъ, имѣемъ:

$$m\mathrm{Sin}\alpha = a,\ m^2\mathrm{Sin}^2\alpha = a^2,$$

$$n\mathrm{Tg}\beta = b,\ n^2\mathrm{Tg}^3\beta = b^2 \cdot \mathrm{Tg}\beta = bc, \text{ гдѣ } c = b \cdot \mathrm{Tg}\beta,$$

$$p \cdot \mathrm{Cos}\gamma = d$$

и слѣдовательно

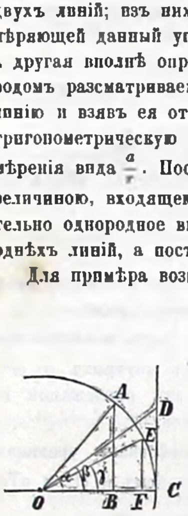
$$x = \frac{a^2 + bc}{d}.$$

Построивъ линіи a, b, c, d на самомъ дѣлѣ, легко построить и зависящую отъ нихъ линію x.

2-й способъ. Изъ тригонометріи извѣстно, что всякая тригонометрическая величина можетъ быть представлена отношеніемъ двухъ линій; изъ нихъ одна, принимаемая за радіусъ дуги, измѣряющей данный уголъ, всегда можетъ быть взята произвольно, а другая вполнѣ опредѣлится величиною угла взятаго радіуса и родомъ разсматриваемой тригонометрической величины. Найдя эту линію и взявъ ея отношеніе къ выбранному радіусу, мы выразимъ тригонометрическую величину даннаго угла дробью нулевого измѣренія вида $\frac{a}{r}$. Поступая такъ съ каждою тригонометрическою величиною, входащею въ данную формулу, мы получимъ окончательно однородное выраженіе первой степени, составленное изъ однѣхъ линій, а построеніе такихъ выраженій намъ уже извѣстно.

Для примѣра возьмемъ то же выраженіе

$$\frac{m^2 \mathrm{Sin}^2\alpha + n^2 \mathrm{Tg}^3\beta}{p \mathrm{Cos}\gamma},$$



изъ котораго уже были удалены тригонометрическіе множители по первому способу. Описавъ дугу круга произвольнымъ радіусомъ OC и построивъ при центрѣ углы α, β и γ, построимъ также и прямыя AB, CD, OF, которыхъ отношенія къ радіусу выражаютъ $\mathrm{Sin}\alpha$, $\mathrm{Tg}\beta$ и $\mathrm{Cos}\gamma$. Измѣривъ радіусъ OC и прямыя AB, CD, OF произвольною единицею, получимъ числа r, a, b, c, выражающія ихъ длину. Тогда искомая x выразится формулою:

$$x = \frac{m^2 \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^2 + n^2 \left(\frac{b}{r}\right)^3}{p \cdot \frac{c}{r}}.$$

По уничтоженіи дробности въ отдѣльныхъ членахъ дѣлимаго и дѣлителя, получимъ:

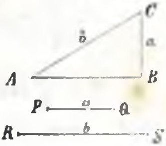
$$x = \frac{m^2 a^2 r + n^2 b^3}{pcr^2}.$$

Такія формулы мы уже умѣемъ строить.

§ 34. Перейдемъ теперь къ построенію искомыхъ угловъ, опредѣляемыхъ какою либо тригонометрической величиною. Выше было замѣчено, что всякая тригонометрическая величина, будучи отвлеченнымъ числомъ, можетъ выразиться не иначе, какъ формулой нулевого измѣренія; а такая формула всегда можетъ быть замѣнена одночленною дробью вида $\frac{a}{b}$. Всякая дробь этого вида можетъ выражать тангенсъ или котангенсъ; но синусъ и косинусъ она можетъ выразить только при $a <$ или $= b$.

Извѣстно, что одна и та же тригонометрическая величина соотвѣтствуетъ безчисленному множеству дугъ. Мы ограничимся построеніемъ угловъ, измѣряемыхъ наименьшею изъ этихъ дугъ.

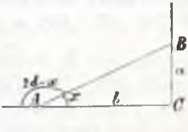
1. Пусть $\operatorname{Sin} x = \frac{a}{b}$, гдѣ a и b положительныя линейныя числа, означающія длину данныхъ прямыхъ PQ и RS. Требуется построить уголъ x. Примемъ $PQ = a$ за катетъ, а $RS = b$ за гипотенузу прямоугольнаго треугольника и построимъ его по этимъ даннымъ. Уголъ A, противолежащій данному катету, будетъ требуемый.



2. Пусть $\operatorname{Cos} x = \frac{a}{b}$. Построимъ такой же треугольникъ. Уголъ C, прилежащій данному катету, будетъ требуемый.

3. Пусть $\operatorname{Tg} x = \frac{a}{b}$. Построимъ прямоугольный треугольникъ, принявъ $PQ = a$ и $RS = b$ за катеты. Уголъ BAC, противолежащій катету BC, равному a, будетъ требуемый.

4. Если $\operatorname{Cot} x = \frac{a}{b}$, то искомый уголъ будетъ равенъ углу ABC, который прилежитъ катету BC.

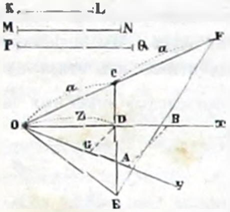


Еслибы тригонометрическая величина искомаго угла y выразилась отрицательной дробью $\left(-\frac{a}{b}\right)$, то сперва строимъ уголъ x, отвѣчающій положительной величинѣ $\frac{a}{b}$; построивъ его, найдемъ и уголъ y по правиламъ, излагаемымъ въ тригонометріи. Напримѣръ, имѣя $\operatorname{Tg} y = -\frac{a}{b}$, строимъ сперва уголъ x по уравненію $\operatorname{Tg} x = \frac{a}{b}$; послѣ чего получимъ $y = 2d - x$, потому что острый уголъ x и смежный съ нимъ тупой $2d - x$ имѣютъ тангенсы, равные по безусловной величинѣ, но различные по знаку.

Чтобы показать на дѣлѣ, какъ можно пользоваться изложенными правилами, рѣшимъ задачу:

Построить треугольникъ, зная его площадь m^2 и двѣ стороны a и b.

Пусть $KL = m$ будетъ бокъ квадрата, равномѣрнаго съ искомымъ треугольникомъ, и $MN = a$, $PQ = b$ — данныя стороны этого треугольника. Примемъ за искомую величину уголъ C, образуемый данными сторонами. Площадь треугольника выразится извѣстною тригонометрическою формулою $\frac{1}{2}ab\mathrm{Sin}C$; но какъ по условію эта площадь равна m^2, то получаемъ уравненіе:



$$\frac{1}{2}ab\mathrm{Sin}C = m^2, \text{ откуда } \mathrm{Sin}C = \frac{2m^2}{ab}.$$

Чтобы построить уголъ C по найденному значенію синуса, приведемъ сперва дробь $\frac{2m^2}{ab}$ къ виду $\frac{p}{q}$. Положивъ $\frac{2m^2}{b} = z$, получимъ пропорцію:

$$b : 2m = m : z,$$

на основаніи которой можемъ построить линію $OD = z$ на одной изъ сторонъ произвольнаго угла XOY (на нашемъ чертежѣ: $OA = b$, $OG = m$, $OB = 2m$); послѣ чего будемъ имѣть

$$\mathrm{Sin}C = \frac{z}{a},$$

и если окажется, что $z <$ или $= a$, то можемъ построить и уголъ C. Для этого возставимъ изъ точки D перпендикуляръ къ линіи OX и пересѣчемъ его въ точкѣ C дугою, описанною изъ центра O радіусомъ, равнымъ прямой $MN = a$. Уголъ OCD будетъ требуемый. Наконецъ, чтобы построить искомый треугольникъ отложимъ на сторонѣ CD угла OCD часть $CE = PQ = b$ и проведемъ прямую OE: треугольникъ OCE будетъ требуемый; дѣйствительно, одна его сторона $OC = a$, а другая $CE = b$, и площадь его равна m^2, потому что составленный этими сторонами уголъ OCD построенъ на основаніи уравненія $\frac{1}{2}ab\mathrm{Sin}C = m^2$.

Извѣстно, что острый уголъ и его дополненіе до двухъ прямыхъ имѣютъ одинъ и тотъ же синусъ; поэтому синусъ тупого угла ECF, смежнаго съ угломъ OCE, также равенъ $\frac{c}{a}=\frac{2m^2}{ab}$. Слѣдовательно, отложивъ на продолженіи стороны OC часть CF, равную $OC=a$ и, проведя прямую EF, получимъ еще треугольникъ ECF, также удовлетворяющій требованіямъ задачи. И точно, треугольники OCE и FCE, имѣющіе общую вершину E и равныя основанія OC и CF, расположенныя на одной прямой, должны быть равномѣрны.

УПРАЖНЕНІЯ. 72. Предпологая, что α, β, γ означаютъ данные углы, построить слѣдующія линейныя формулы:

$$a\,\mathrm{Tg}\,\alpha;\quad \frac{ab\mathrm{Sin}^2\alpha}{c};\quad \frac{a^3}{b\mathrm{Cos}^2\alpha};\quad \frac{abc}{d^2\mathrm{Cot}^2\alpha};\quad \sqrt{ab\mathrm{Sin}\alpha};\quad a\sqrt{\mathrm{Cos}\alpha};$$

$$\sqrt{\frac{a^3b\mathrm{Sin}^4\alpha}{cd}};\quad \frac{a\mathrm{Cos}\alpha-b\mathrm{Sin}\beta}{\mathrm{Sin}\alpha\cdot\mathrm{Cos}\beta};\quad \sqrt{a^2\mathrm{Sin}^2\alpha+b^2\mathrm{Cos}^2\beta-c^2\mathrm{Tg}^2\gamma}.$$

73. Построить углы по формуламъ:

1. $\mathrm{Sin}x=\frac{ab}{cd}$; 2. $\mathrm{Cos}x=\frac{a\mathrm{Sin}\alpha}{b}$; 3. $\mathrm{Tg}x=\frac{a^2}{bc\mathrm{Tg}\alpha}$; 4. $\mathrm{Cot}x=\frac{2}{1+\mathrm{Cos}\,\alpha}$;

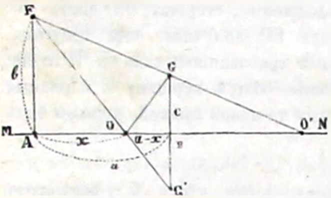
5. $\mathrm{Sin}x=\frac{a+b\mathrm{Sin}\alpha}{a-b\mathrm{Cos}\alpha}$; 6. $\mathrm{Cos}x=\frac{a^2-b\sqrt{ab\mathrm{Sin}\alpha}}{b^2+a\sqrt{ab\mathrm{Cos}\alpha}}$.

Задачи для приложенія пріемовъ построенія формулъ и для изслѣдованія вопросовъ.

§ 35. *Даны прямая MN и внѣ ея двѣ точки F и G, найти такую точку O на линіи MN, чтобы прямыя OF и OG образовали съ этой линіей равные углы.*

Въ условіяхъ задачи не указано, лежатъ ли точки F и G на одной или на обѣихъ сторонахъ линіи MN, въ равныхъ или неравныхъ отъ нея разстояніяхъ. Когда нѣтъ подробныхъ указаній относительно положенія точекъ и линій, упоминаемыхъ въ задачѣ, то рѣшаютъ примѣнительно къ одному изъ возможныхъ положеній, а затѣмъ изслѣдуютъ полученный результатъ при различныхъ частныхъ значеніяхъ величинъ, опредѣляющихъ то или другое положеніе. Такія величины въ нашемъ примѣрѣ суть перпендикуляры FA и GB, опущенные изъ данныхъ точекъ на линію MN, и разстояніе AB между ихъ основаніями.

Предположимъ, что точки F и G лежатъ на одной сторонѣ



линіи MN и что G ближе къ ней, чѣмъ F. Пусть $AB=a$, $AE=b$ и $BG=c$. Эти три длины слѣдуетъ считать извѣстными. Искомую точку O опредѣлимъ по ея разстоянію $AO=x$ отъ основанія перпендикуляра AF. Вслѣдствіе требуемаго равенства угловъ AOF и BOG, треугольники OF и BOG должны быть подобны, и потому должна существовать пропорція:

$$\frac{AO}{OB}=\frac{AF}{BG}, \text{ или } \frac{x}{a-x}=\frac{b}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Рѣшивъ ее, какъ уравненіе, получимъ:

$$x=\frac{ab}{b+c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P).$$

Теперь точка O найдется на самомъ дѣлѣ, когда построимъ $AO=x$, какъ четвертую пропорціональную къ линіямъ $b+c$, a и b (§§ 22 и 23).

При построеніи искомой линіи по найденной для нея формулѣ принято за правило пользоваться линіями данной фигуры и вести построеніе такъ, чтобы искомая заняла, если возможно, то самое положеніе, какое она должна имѣть по смыслу вопроса. Подробности при выполненіи этого правила зависятъ отъ соображеній рѣшающаго. (См. задачи § 7-го.) Въ настоящемъ примѣрѣ достаточно протянуть перпендикуляръ BG за линію MN на равную ему длину $BG'=c$ и соединить точки F и G′ прямою линіей, которая и отдѣлитъ отъ отрѣзка AB часть AO, выражаемую дробью $\frac{ab}{b+c}$. Дѣйствительно, это построеніе доставляетъ подобные треугольники AOF и BOG′ и пропорцію

$$\frac{AO}{OB}=\frac{AG}{BG'};$$

отсюда производится составная пропорція

$$\frac{AO + OB}{AB} = \frac{AF + BG'}{AF} \text{ или } \frac{a}{AO} = \frac{b+c}{b},$$

а изъ нея находимъ

$$AO = \frac{ab}{b+c} = x.$$

Равенство угловъ AOB и BOG повѣряется тѣмъ, что каждый изъ нихъ порознь равенъ углу BOG'.

Очевидно, что требованіямъ задачи удовлетворяетъ еще и точка O', лежащая на пересѣченіи прямыхъ MN и FG. Разстояніе $AO' = x'$ этой второй точки отъ перпендикуляра AF выводится, на основаніи подобія треугольниковъ AFO' и BGO', изъ пропорцій

$$\frac{AO'}{BO'} = \frac{AF}{BG} \text{ или } \frac{x'}{x'-a} = \frac{b}{c}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

которая даетъ

$$x' = \frac{ab}{b-c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (Q).$$

Замѣтимъ, что уравненія (1) и (2) по возвышеніи въ квадратъ становятся тождественными, ибо тогда каждое изъ нихъ принимаетъ видъ:

$$\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2} = \frac{b^2}{c^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Отсюда заключаемъ, что найденныя количества (P) и (Q) суть корни одного и того же квадратнаго уравненія (3-го). Предлагаемъ отыскать эти корни для повѣрки сдѣланнаго сейчасъ заключенія*).

---

*) *Замѣчаніе.* Когда задача видимо имѣетъ два рѣшенія, а между тѣмъ составленное уравненіе, положимъ $S = 0$, будетъ первой степени, и слѣдовательно дастъ только одно изъ нихъ, то для полученія обоихъ рѣшеній мы не имѣемъ права тотчасъ же повысить степень уравненія $S = 0$, ибо, пока не найдемъ другого уравненія первой степени, дающаго второе рѣшеніе, нельзя и убѣдиться, будутъ ли тождественны результаты возвышенія въ квадратъ каждаго изъ этихъ уравненій первой степени. Безъ такой тождественности повышенныя уравненія могутъ дать излишніе корни, вовсе не относящіеся къ задачѣ. Пояснимъ это слѣдующимъ примѣромъ: *даны окружность радіуса r и внѣ ея прямая PQ съ назначенною на ней точкою A; построить вторую окружность, касательную къ данной и къ прямой PQ въ точкѣ A.* Касаніе двухъ окружностей можетъ быть внѣшнее и внутреннее,

Изслѣдованіе. Условимся считать разстояніе точки отъ прямой MN положительнымъ, когда, подобно F и G, она находится надъ этой линіей, и отрицательнымъ, когда она лежитъ ниже ея, какъ G′ *).

а) Пусть $b > 0$ и $c > 0$; значитъ, данныя точки лежатъ выше MN, какъ на приложенномъ чертежѣ.

Если при этихъ условіяхъ будетъ $b > c$, то оба значенія x,

$$x_1 = \frac{ab}{b+c} \text{ и } x_2 = \frac{ab}{b-c} \quad \text{или} \quad x_1 = a \cdot \frac{b}{b+c} \text{ и } x_2 = a \cdot \frac{b}{b-c},$$

будутъ положительными, и опредѣляемыя ими точки O и O′ расположатся вправо отъ *начала разстояній* x, т. е. отъ точки A, какъ предполагалось при составленіи уравненій (1) и (2). Такъ какъ $\frac{b}{b+c} < 1$, $\frac{b}{b-c} > 1$, то $x_1 < a$, $x_2 > a$; значитъ, опять согласно съ нашимъ предположеніемъ, разстояніе x_1 дѣйствительно опредѣляетъ точку O на самомъ отрѣзкѣ AB, а разстояніе x_2 — точку O′ на продолженіи этого отрѣзка. Кромѣ того, изъ условія $c < b$ заключаемъ послѣдовательно, что $b + c < 2b$, $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{2b}$, т. е.

и потому задача видимо имѣетъ два рѣшенія. Составивъ уравненіе, примѣнительно къ внѣшнему касанію, получимъ:

$$r^2 + 2rx = a^2 + b^2 - 2ax \quad \text{и} \quad x = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2(a+r)}. \quad . \quad . \quad (А)$$

гдѣ x — радіусъ искомой окружности, a — длина перпендикуляра, опущеннаго изъ центра данной окружности на прямую PQ, и b — разтояніе точки A отъ основанія этого перпендикуляра. Примѣнительно къ внутреннему касанію окружностей получимъ:

$$r^2 - 2rx = a^2 + b^2 - 2ax, \quad \text{и} \quad x = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2(a-r)}. \quad . \quad . \quad (Б)$$

Ясно, что другихъ рѣшеній, кромѣ (А) и (Б), задача не допускаетъ. Теперь можемъ безошибочно повысить степень одного изъ найденныхъ уравненій такъ, чтобы вновь составленное квадратное уравненіе давало оба рѣшенія (А) и (Б), что и предлагаемъ исполнить.

*) Предполагаемъ, что учащимся извѣстно (изъ курса тригонометріи) правило знаковъ при откладываніи разстояній по нѣкоторой линіи (прямой или кривой) отъ данной на ней точки, какъ въ нашемъ примѣрѣ — по перпендикуляру къ прямой MN отъ его основанія, или по самой линіи MN отъ точки A.

больше $\frac{1}{2}$, и наконецъ $a.\frac{b}{b+c} > \frac{a}{2}$; значитъ, первая точка O ближе къ B, чѣмъ къ A, что согласуется со свойствомъ сторонъ подобныхъ треугольниковъ AOF и BOG при условіи $b > c$ или $AF > BG$.

Если длину c перпендикуляра BG начнемъ увеличивать, оставляя ее меньше b, то $x_1 = a.\frac{b}{b+c}$ начнетъ уменьшаться и точка O будетъ двигаться влѣво, однако не перейдетъ за середину отрѣзка AB, ибо дробь $\frac{b}{b+c}$ тогда только обратится въ $\frac{1}{2}$, когда c возрастетъ до b. Въ то же время значеніе $x_2 = a \cdot \frac{b}{b-c}$, вслѣдствіе постепеннаго уменьшенія знаменателя $b-c$, начнетъ увеличиваться, и точка O′ будетъ безпредѣльно удаляться вправо.

При $c = b$ выйдетъ $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \infty$, т. е точка O придетъ на средину отрѣзка AB, точка же O′ удалится въ безконечность.

Если $BG = c$, продолжая возрастать, превысить $AF = b$ на неизмѣримо малую величину α, то x_1 сдѣлается меньше $\frac{a}{2}$ на нѣкоторую также неизмѣримо малую величину β *), а x_2, перемѣнивъ знакъ, получитъ разрывъ и изъ $+\infty$ обратится въ $-\infty$**); слѣдовательно, точка O неизмѣримо мало отойдетъ влѣво отъ середины AB, точка же O′ изъ неизмѣримо большого разстоянія вправо отъ A разомъ сдѣлаетъ скачекъ на неизмѣримо большое разстояніе влѣво отъ A.

При дальнѣйшемъ возрастаніи длины c перпендикуляра BG первое значеніе x остается положительнымъ, а второе отрицательнымъ и, независимо отъ знака, оба уменьшаются до нуля; слѣдовательно, точки O и O′ будутъ обѣ приближаться къ началу разстояній x, т. е. къ точкѣ A, оставаясь первая правѣе этого начала, а вторая лѣвѣе. При $c = \infty$ они слились бы съ A.

Возвратимся къ условію $b > c$, при которомъ оба значенія x были положительными и точки O и O′ располагались обѣ вправо

---

*) $\beta = \frac{a}{2} - \frac{ab}{2b+\alpha} = \frac{a\alpha}{2(2b+\alpha)} = \frac{a}{2} : \left(\frac{2b}{\alpha} + 1\right)$, гдѣ дѣлитель $\frac{2b}{\alpha} + 1$ безконечно великъ, вслѣдствіе неизмѣримой малости α.

**) Подобный же разрывъ происходитъ въ значеніяхъ тангенса и секанса при переходѣ соотвѣтствующей дуги через 90°.

отъ начала A. Если длина c перпендикуляра BG начнетъ уменьшаться до нуля, то $x_1 = \frac{ab}{b+c}$ будетъ возрастать, а $x_2 = \frac{ab}{b-c}$ убывать и оба стремиться къ величинѣ a; слѣдовательно, точки O и O′ станутъ приближаться къ B; при $c = 0$ онѣ сольются съ B.

б) Пусть $b > 0$, $c < 0$.

Когда c сдѣлается отрицательнымъ, то перпендикуляръ BG и съ нимъ точка G перейдутъ на противоположную сторону линіи MN. При этомъ значенія x помѣняются ролями: первое обратится во второе, а второе въ первое, ибо вторые члены обоихъ знаменателей перемѣнятъ свои знаки на обратные, значитъ, точки O и O′ также помѣняются мѣстами. Во всемъ остальномъ сохранится полная аналогія съ разсмотрѣннымъ случаемъ (а), что видно и прямо изъ уравненія (3), доставляющаго оба значенія x, ибо оно содержитъ въ себѣ только квадратъ количества c и не измѣняется при переходѣ отъ $+c$ къ $-c$. (То же замѣчаніе относится и къ перпендикуляру AF).

Предлагаемъ самимъ учащимся изслѣдовать случай:

в) $b < 0$ и $c < 0$.

Изслѣдованіе можно вести въ томъ же порядкѣ, какъ и въ случаѣ (а); надо только имѣть въ виду, что изъ двухъ отрицательныхъ количествъ то считается меньшимъ, котораго абсолютная величина больше.

Разсмотрите также зависимость значеній x и положенія точекъ O и O′ отъ величины a отрѣзка AB, и особенно когда a уменьшается до нуля и c стремится къ равенству съ b.

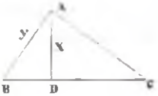
Главнѣйшій выводъ изъ предыдущихъ изслѣдованій: *положительнымъ значеніемъ разстоянія x всегда указывается, что искомая точка находится на той сторонѣ отъ начала, на которой и предполагалось ее найти при составленіи уравненія; а отрицательнымъ, — что искомая точка лежитъ на противоположной сторонѣ отъ начала разстояній.*

УПРАЖНЕНІЯ. 74. Въ подкрѣпленіе послѣдняго вывода примите $BO = y$ за искомую величину, и составьте прямо кв. ур-ніе по пропорціи $OG : OF = BG : AF$. Теперь началомъ разстояній сдѣлается точка B, и положительныя значенія y расположатся влѣво отъ него, а отрицательныя вправо.

75. На прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки A и B, найти третью точку, изъ которой были бы видны подъ однимъ и тѣмъ же угломъ двѣ параллельныя прямыя, выходящія изъ данныхъ точекъ и имѣющія данную длину.

II. *Значенія* искомой величины, найденныя путемъ алгебраическихъ вычисленій, не всегда бываютъ согласны съ сущностью рѣшаемаго геометрическаго вопроса, чему примѣръ уже встрѣтился намъ въ 4-й задачѣ § 7-го, гдѣ отрицательное рѣшеніе пришлось отбросить. Даже положительное рѣшеніе можетъ иногда противорѣчить смыслу вопроса и должно быть откинуто. Таковъ слѣдующій примѣръ:

Построить прямоугольный треугольникъ, зная его гипотенузу BC *и сумму* $AB + AC + AD$ *его катетовъ и высоты.*



Требуемое построеніе легко будетъ исполнить, когда найдемъ высоту треугольника. Пусть $BC = a$, $AB + AC + AD = b$, $AD = x$, $AB = y$ и слѣдов. $AC = b - x - y$. По свойству гипотенузы и катетовъ имѣемъ:

$$y^2 + (b - x - y)^2 = a^2, \text{ или } 2y^2 + x^2 + 2xy - 2bx - 2by + b^2 - a^2 = 0 \;.\;.\; (1).$$

Другое уравненіе съ тѣми же неизвѣстными x и y получаемъ, на основаніи подобія треугольниковъ ABC и DAC, изъ пропорціи

$$a : y = (b - x - y) : x, \text{ которая даетъ}$$

$$y^2 + xy - by + ax = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

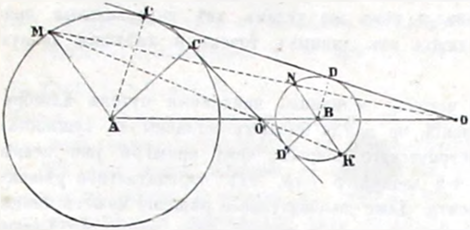
Для исключенія y умножимъ это уравненіе на 2 и вычтемъ изъ (1); выйдетъ:

$$x^2 - 2(a + b)x + b^2 - a^2 = 0, \text{ а отсюда } x = a + b \pm \sqrt{2a^2 + 2ab}.$$

Изслѣдованіе. Оба значенія x положительны, ибо количество $2a^2 + 2ab$ или $a^2 + a^2 + 2ab$ меньше $(a + b)^2$, такъ какъ гипотенуза a меньше длины b, равной суммѣ катетовъ, увеличенной высотою. Высота треугольника, какъ одно изъ слагаемыхъ суммы b, необходимо должна быть меньше b и еще меньше $a + b$; поэтому первое значеніе x слѣдуетъ отбросить.

Построеніе x_2 и самаго треугольника предоставляемъ учащимся.

III. *Къ двумъ кругамъ провести общую касательную.* Пусть $AB = a$ будетъ разстояніе между центрами данныхъ окружностей, R и r ихъ радіусы, причемъ $R > r$. Начертимъ отъ руки общую касательную CO



и разстояніе $AO = x$, на которомъ она встрѣчаетъ линію центровъ, примемъ за искомую величину. Проведя еще радіусы въ точки касанія, получимъ подобные треугольники ACO и BDO, изъ которыхъ имѣемъ:

$$\frac{CO}{DO} = \frac{R}{r} \text{ и } \frac{\overline{CO}^2}{\overline{DO}^2} = \frac{R^2}{r^2};$$

но $CO^2 = x^2 - R^2$ и $DO^2 = (x - a)^2 - r^2$; слѣдовательно

$$\frac{x^2 - R^2}{(x-a)^2 - r^2} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Рѣшивъ это уравненіе, получимъ:

$$*)\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{aR}{R-r} = R\cdot\frac{a}{R-r} \quad \ldots\ldots \quad (1).\\ x_2 &= \frac{aR}{R+r} = R\cdot\frac{a}{R+r} \quad \ldots\ldots \quad (2).\end{aligned}\right.$$

Изслѣдованіе и построеніе. Значенія x выразились раціонально и потому всегда возможны. Легко видѣть также, что $x_1 > a$, $x_2 < a$, и что потому значеніемъ x_1 опредѣляется точка O, лежащая за центромъ меньшей окружности, а значеніемъ x_2 — точка O′ между центрами.

Построеніе обоихъ значеній x можетъ быть исполнено по правиламъ §§ 22 и 23 и не требуетъ новыхъ поясненій.

Хотя это построеніе всегда возможно и *точки O и O′ существуютъ при всякомъ взаимномъ положеніи окружностей*, одна-

*) Значенія x могли быть получены порознь изъ двухъ уравненій первой степени, какъ и въ задачѣ 1-й этого параграфа; мы предпочли общее рѣшеніе.

ко нельзя еще утверждать, что чрезъ каждую изъ этихъ точекъ можно провести общую касательную къ даннымъ окружностямъ: для этого необходимо вообще, чтобы точки O и O′ не лежали внутри окружностей. Разсмотримъ, когда это необходимое условіе будетъ выполнено.

Сперва займемся точкою O. Первое значеніе x опредѣляетъ ея разстояніе AO отъ центра большей окружности; найдемъ еще ея разстояніе BO отъ центра меньшей окружности, для чего вычтемъ a изъ x_1:

$$BO = x_1 - a = \frac{aR}{R-r} - a = \frac{ar}{R-r} = r \cdot \frac{a}{R-r} \cdot \quad . \quad . \quad (3).$$

а) При $a < R - r$, окружности, какъ извѣстно изъ геометріи, лежатъ одна внутри другой и не имѣютъ общихъ точекъ и общей касательной. И дѣйствительно, формулы (1) и (3) показываютъ, что въ этомъ случаѣ $AO < R$ и $BO < r$; значитъ, точка O лежитъ внутри каждой изъ данныхъ окружностей, и всякая прямая, чрезъ нее проведенная, неизбѣжно встрѣтитъ обѣ эти окружности. Такимъ образомъ первое значеніе x въ разбираемомъ случаѣ должно быть откинуто.

а) Если $a = R - r$, то формулы (1) и (3) даютъ: $AO = R$ и $BO = r$; значитъ, точка O лежитъ тогда на обоихъ окружностяхъ и будетъ точкою ихъ взаимнаго касанія; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ чрезъ нее можно провести общую касательную и притомъ —одну. Это заключеніе опять согласно съ извѣстнымъ геометрическимъ выводомъ, по которому при $a = R - r$ окружности касаются взаимно и лежатъ одна внутри другой.

в) Если $a > R - r$, то дробь $\frac{a}{R-r}$ будетъ больше единицы и $BO > r$, точка же O будутъ лежать на продолженіи линіи центровъ за меньшею окружностью. Значитъ, въ этомъ случаѣ изъ точки O можно будетъ провесть по двѣ касательныя къ каждой изъ данныхъ окружностей, и легко видѣть, что касательныя къ одной окружности сольются съ касательными къ другой. Дѣйствительно, пусть OD касается окружности B въ точкѣ D; проведя радіусъ BD и параллельную ему линію AC до встрѣчи съ продолженіемъ OD, получимъ:

$$AC : BD = AO : BO \quad \text{или} \quad AC : r = \frac{aR}{R-r} : \frac{ar}{R-r},$$

откуда найдемъ $AC = R$; а это показываетъ, что продолженіе прямой OD касается окружности A въ точкѣ C. — Изъ геометріи знаемъ, что при условіи $a > R - r$ окружности не лежатъ одна внутри другой и нѣтъ между ними внутренняго касанія, чтó опять согласуется съ нашими заключеніями, ибо при такомъ положеніи окружности могутъ имѣть двѣ общія внѣшнія касательныя.

Предоставляемъ учащимся точно также изслѣдовать, въ какихъ случаяхъ и сколько общихъ касательныхъ можно провести чрезъ точку O′.

Изъ всѣхъ предыдущихъ изслѣдованій сдѣлайте заключеніе: когда двѣ окружности имѣютъ четыре общія касательныя, когда три, двѣ, одну и ни одной?

При $R = r$ формулы (1) и (2) даютъ: $x_1 = \infty$, $x_2 = \frac{a}{2}$; слѣдовательно, въ случаѣ равныхъ окружностей внѣшнія касательныя будутъ параллельны линіи центровъ, а внутреннія, если только a не меньше $2R$, раздѣлятъ разстояніе между центрами пополамъ.

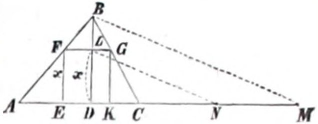
Замѣчаніе 1. Мы разсматривали порознь точки O и O′, имѣя въ виду предоставить учащимся извѣстную долю самостоятельности при изслѣдованіи положенія точки O′ относительно обоихъ центровъ въ различныхъ частныхъ случаяхъ; но можно, и даже лучше, разсматривать обѣ точки одновременно, подраздѣливъ изслѣдованія, примѣрно, на такіе частные случаи:

$$\text{I. } R + r > a \text{ и притомъ } \begin{cases} а)\ R - r > a \\ б)\ R - r = a \\ в)\ R - r < a \end{cases}$$

$$\text{II. } R + r = a \text{ и III. } R + r < a.$$

Замѣчаніе 2. Точки O и O′ лежатъ обѣ вправо отъ центра A, вслѣдствіе чего оба значенія x, опредѣляющія ихъ разстоянія отъ A, получились положительныя; но еслибъ при составленіи уравненія мы приняли за искомую величину разстояніе BO отъ центра B, то значенія x получили бы различные знаки, ибо точки O и O′ лежатъ на противоположныхъ сторонахъ отъ этого центра.

IV. *Въ данномъ треугольникѣ вписать квадратъ.*



Вписать квадратъ въ данный треугольникъ ABC значитъ построить такой квадратъ, котораго одинъ бокъ совпадалъ бы съ одною изъ сторонъ треугольника, а противоположный бокъ опирался своими концами на остальныя стороны треугольника.

Положимъ, что EFGK есть искомый квадратъ. Очевидно, что, найдя точку L, въ которой бокъ его FG встрѣчаетъ высоту BD даннаго треугольника, мы легко исполнимъ требуемое построеніе. Итакъ пусть $DL = EF = FG = x$. Пусть также $AC = b$ и $BD = h$. По параллельности линій FG и AC треугольники FBG и ABC подобны и основанія ихъ пропорціональны высотамъ; слѣдовательно,

$$AC : FG = BD : BL, \text{ или } b : x = h : (h - x).$$

Отсюда вытекаетъ уравненіе

$$hx = bh - bx,$$

которое даетъ

$$x = \frac{bh}{b + h}.$$

Этотъ результатъ показываетъ, что искомое разстояніе DL построится, какъ четвертая пропорціональная къ линіямъ, выраженнымъ числами $b + h$, b и h, т. е. къ $AC + BD$, AC и BD (§ 22). Чтобы воспользоваться линіями чертежа, мы исполнили это построеніе на сторонахъ прямого угла BDC, отложивъ $DN = b$ и $NM = h$.

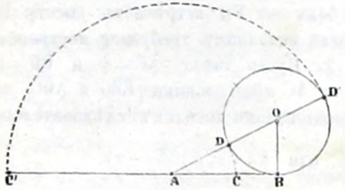
Когда такимъ образомъ опредѣлится точка L, то останется провести чрезъ нее прямую FG параллельно основанію AC и изъ точекъ F и G, въ которыхъ она встрѣтитъ стороны треугольника, опустить перпендикуляры FE и GK на основаніе: четыреугольникъ FGKE будетъ требуемый квадратъ.

Предоставляемъ учащимся изслѣдовать:

а) При какихъ условіяхъ точка L придется на серединѣ высоты.

б) Сколько различныхъ квадратовъ можно вписать въ одинъ и тотъ же треугольникъ, и который изъ нихъ будетъ наибольшимъ? (*Указаніе*: взявъ выраженія сторонъ квадратовъ, опирающихся на двѣ различныя стороны даннаго треугольника, обратите вниманіе на пропорцію, вытекающую изъ сравненія числителей и, пользуясь ею, покажите, что большей сторонѣ треугольника соотвѣтствуетъ меньшая высота и что разность двухъ сторонъ треугольника больше разности соотвѣтствующихъ высотъ; послѣднее неравенство дастъ возможность сравнить знаменателей и проч.).

в) Въ какихъ случаяхъ два изъ вписанныхъ квадратовъ, или всѣ три, будутъ равны между собою?



V. *Раздѣлить прямую линію въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.*

Пусть $AB = a$ данная прямая, C — искомая точка дѣленія и $AC = x$ — большая часть прямой AB. Условіями задачи требуется, чтобы

$$AB : AC = AC : CB, \text{ или } \frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ для x два значенія:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = -\frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right).$$

Построеніе и изслѣдованіе. Построеніе перваго значеніе x приводитъ къ рѣшенію, извѣстному изъ начальной геометріи. Дѣйствительно, $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ выражаетъ длину гипотенузы треугольника ABO, въ которомъ катетъ $AB = a$ и катетъ $BO = \frac{a}{2}$; разность же $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$, или x_1, выражаетъ длину отрѣзка AD, отсѣченнаго отъ гипотенузы окружностью, описанною изъ центра O радіусомъ $OB = \frac{a}{2}$. Перенеся длину $AD = x_1$ на данную прямую посредствомъ дуги DC, описанной изъ центра A радіусомъ AD, получимъ на линіи AB точку C, которая и раздѣлить эту прямую въ требуемомъ отношеніи. Повѣрка этого рѣшенія извѣстна изъ начальной геометріи.

Второе значеніе x представимъ въ видѣ

$$x_2 = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}\right) = -m.$$

Абсолютная величина его m больше a и очевидно равна длинѣ сѣкущей AD'. Такъ какъ при составленіи уравненія предполагалось, что x означаетъ длину части прямой AB, отложенную отъ точки A вправо, то понятно, что количество $x_2 = -m$ не можетъ имѣть прямого отношенія къ нашей задачѣ, какъ потому, что $m > a$, такъ и потому, что сообразуясь со знакомъ, надо отложить длину $AC' = AD' = m$ влѣво отъ точки A. — Замѣтимъ однако, что отрицательное количество $(-m)$ должно удовлетворять уравненію (1), изъ котораго оно получено, и слѣдовательно, положительное количество m должно удовлетворять уравненію

$$\frac{a}{-x} = \frac{-x}{a+x}$$

$$\text{или} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{a+x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

которое выводится изъ (1) перемѣною x на $-x$, т. е. мы должны имѣть тождество

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{a+m},$$

въ которомъ членъ m выражаетъ разстояніе точки C' отъ конца A линіи AB, а членъ $a+m$ — разстояніе той-же точки отъ конца B. Поэтому уравненіемъ 2-мъ выражаются условія слѣдующей задачи: *на продолженіи отрѣзка AB данной прямой найти точку, которой разстояніе отъ одного конца отрѣзка было бы среднимъ пропорціональнымъ между ея разстояніемъ до другого конца и самымъ отрѣзкомъ...*

Рѣшивъ уравненіе 2-е, мы получимъ корни:

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

$$x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2},$$

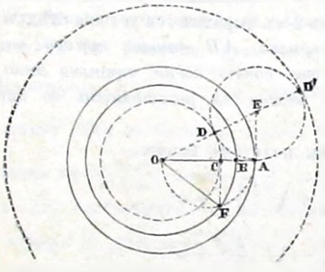
отличающіеся отъ корней уравненія 1-го только знаками, какъ и слѣдовало ожидать; но теперь второй корень (отрицательный), опредѣляющій точку C, не удовлетворяетъ задачѣ, ибо эта точка лежитъ на самой прямой AB, а не на ея продолженіи.

Обѣ задачи — первоначально предложенная и измѣненная — очевидно составляютъ частные случаи слѣдующей общей: *на прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки A и B, найти третью точку, которой разстояніе отъ точки A было бы среднимъ пропорціональнымъ между ея разстояніемъ отъ точки B и разстояніемъ AB.* Эта общая задача приведетъ къ уравненію 1-му, если за искомую точку примемъ C, и ко 2-му, если искомая точка будетъ C′ (см. замѣчаніе 2-е къ задачѣ III-й); притомъ корни того и другого уравненія будутъ оба удовлетворять вопросу и въ обоихъ случаяхъ покажутъ, что существуютъ двѣ точки, имѣющія требуемое свойство и расположенныя по обѣ стороны отъ точки A.

УПРАЖНЕНІЕ 76. а) Составьте уравненіе для рѣшенія той-же задачи, принявъ меньшую часть прямой AB за искомую.

б) Объясните, что сѣкущая AD′ раздѣлена въ точкѣ D въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

в) Докажите, что если прямая AB раздѣлена въ среднемъ и крайнемъ отношеніи и на большей части ея AC, какъ на діаметрѣ, построена окружность, то касательная къ этой окружности, проведенная изъ конца B прямой AB, будетъ равна діаметру. (На этомъ предложеніи можно основать другое, чисто-геометрическое рѣшеніе предложеной задачи).



VI. *Данный кругъ раздѣлить концентрической окружностью въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.*

Пусть $OA = R$ есть радіусъ даннаго круга и $OB = x$ радіусъ искомой окружности. Имѣемъ: πR^2 — площ. даннаго круга, πx^2 — площ. искомаго круга, $\pi(R^2 - x^2)$ — разность ихъ или площадь кольца.

Условія задачи не указываютъ, которая изъ частей раздѣленнаго круга, πx^2 или $\pi(R^2 - x^2)$, должна быть среднею пропорціональною между всѣмъ кругомъ и другою частью. Мы рѣшимъ задачу только въ первомъ смыслѣ.

Если кругъ, ограниченный искомою окружностью, долженъ быть среднимъ пропорціональнымъ между отрѣзаннымъ ею кольцомъ и даннымъ кругомъ, то получается уравненіе:

$$\frac{\pi R^2}{\pi x^2} = \frac{\pi x^2}{\pi (R^2 - x^2)} \text{ или } \frac{R^2}{x^2} = \frac{x^2}{R^2 - x^2},$$

которое даетъ:

$$x^2 = -\frac{R^2}{2} = \sqrt{\left(\frac{R^2}{2}\right)^2 + R^4}.$$

Количество x^2 не можетъ быть отрицательнымъ; поэтому передъ радикаломъ надо удержать только знакъ $+$; слѣдовательно,

$$x^2 = -\frac{R^2}{2} + \sqrt{\frac{R^4}{4} + R^4} = \frac{R^2}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Отсюда

$$x = \sqrt{\frac{R^2}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{R \cdot \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)}.$$

Передъ наружнымъ радикаломъ не поставлено двойного знака потому, что независимо отъ знака оба значенія x равны между собою, направленіе же искомаго радіуса для насъ безразлично.

Построеніе. Множитель $\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ представляетъ длину большей части радіуса R, раздѣленнаго въ среднемъ и крайнемъ отношеніи (задача V); означивъ его буквою k, получимъ

$$x = \sqrt{R \cdot k}.$$

Построеніе длины k извѣстно изъ задачи V-й; построеніе же корня $\sqrt{Rk}$ объяснено въ § 25.

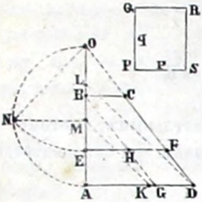
На нашемъ чертежѣ $\sqrt{R \cdot k}$ выразился длиною OF.

УПРАЖНЕНІЕ 77. Рѣшите и изслѣдуйте ту же задачу, предполагая, что площадь кольца должна быть среднею пропорціональною между площадями круговъ: даннаго и концентрическаго съ нимъ искомаго. При изслѣдованіи окажется, что одинъ изъ корней уравненія не удовлетворяетъ вопросу; обобщите вопросъ такъ, чтобы оба корня отвѣчали на него.

78. На данной гипотенузѣ построить треугольникъ, большій катетъ котораго былъ бы среднимъ пропорціональнымъ между гипотенузою и меньшимъ катетомъ.

VII. *Отъ площади прямоугольной трапеціи ABCD отрѣзать часть, равную площади даннаго прямоугольника PQRS, посредствомъ прямой, параллельной основанію трапеціи.*

Стороны даннаго прямоугольника пусть будутъ $PS = p$, $PQ = q$. За данныя величины, опредѣляющія трапецію ABCD примемъ: $AD = a$, $BC = b$, $AB = h$. Къ нимъ же причислимъ и разстояніе



$OA = d$ отъ точки встрѣчи непараллельныхъ сторонъ трапеціи до основанія AD. Это разстояніе зависитъ отъ a, b и h и найдется изъ подобія треугольниковъ AOD и ABG, когда проведемъ $BG \parallel CD$; выйдетъ:

$$\frac{d}{h} = \frac{a}{a-b}, \text{ а отсюда } d = \frac{ah}{a-b} \ldots (A).$$

Условія задачи не указываютъ, къ которому изъ основаній данной трапеціи должна прилежать искомая трапеція; мы будемъ предполагать, что она должна прилегать къ большему основанію AD. Пусть AEFD есть искомая трапеція, $AE = x$ ея высота. По условію площ. $AEFD = pq$; кромѣ того,

$$\text{площ. } AOD = \frac{ad}{2}, \text{ площ. } EOF = \frac{ad}{2} - pq = \frac{ad - 2pq}{2}.$$

Такъ какъ $\triangle AOD \infty \triangle EOF$, то

$$\frac{\text{площ. } EOF}{\text{площ. } AOD} = \frac{OE^2}{OA^2} \text{ или } \frac{ad - 2pq}{ad} = \frac{(d-x)^2}{d^2}.$$

Отсюда получаемъ:

$$x_1 = d - \sqrt{d\left(d - \frac{2pq}{a}\right)}, \quad x_2 = d + \sqrt{d\left(d - \frac{2pq}{a}\right)}.$$

Изслѣдованіе. Значенія x будутъ возможны и *оба положительны*, если $\frac{2pq}{a} <$ или $= d$, или $pq <$ или $= \frac{ad}{2}$, т. е. когда площадь PQRS не больше площ. $\triangle$ AOD. При этомъ будетъ $x_1 < d$, $x_2 > d$. Высота $AE = x$ отсѣкаемой трапеціи очевидно должна быть меньше разстоянія $OA = d$: поэтому второе значеніе x слѣдуетъ отбросить, какъ не соотвѣтствующее вопросу. Кромѣ того и первое значеніе x, для буквальнаго выполненія требованій задачи, должно быть не больше h, для чего произведеніе pq не должно превышать $\frac{(a+b)h}{2}$, т. е. площади данной трапеціи *).

Построеніе. Положивъ $\frac{2pq}{a}=n$, строимъ линію n по пропорціи $a:2p=q:n$ на сторонахъ прямого угла OAD. Для этого откладываемъ $AL=2PS=2p$ и $AK=PQ=q$, проводимъ прямую DL и параллельную ей KM; получаемъ $AM=n$. Теперь имѣемъ:

$$x_2=d-\sqrt{d(d-n)}.$$

Дальнѣйшія построенія видны изъ чертежа, а именно.

$$MO=d-n,\ ON=\sqrt{d(d-n)}\ \text{и}\ AE=x_2.$$

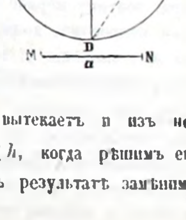
Другое рѣшеніе. Примемъ $EF=y$ за искомую величину. Треугольники AOD и EOF подобны. слѣд.

$$\frac{\text{площ.}\ \triangle\ EOF}{\text{площ.}\ \triangle\ AOD}=\frac{EF^2}{AD^2}\quad\text{или}\quad\frac{ad-2pq}{ad}=\frac{y^2}{a^2}$$

Рѣшите это уравненіе, изслѣдуйте полученный результатъ и постройте искомую величину.

УПРАЖНЕНІЕ 79. Рѣшите ту же задачу, предполагая, что искомая трапеція должна прилегать къ меньшему основанію данной трапеціи.

VIII. *Шаръ пересѣчь плоскостью въ такомъ разстояніи отъ конца діаметра, перпендикулярнаго къ этой плоскости, чтобы вся поверхность отсѣченнаго сегмента была равна площади даннаго круга.*



Пусть r будетъ длина радіуса даннаго шара, a — длина радіуса MN даннаго круга; AD — діаметръ, перпендикулярно которому надо провести сѣкущую плоскость: $AC=x$ — искомое разстояніе этой плоскости отъ конца A діаметра AD; $BC=y$ — радіусъ круга сѣченія. Имѣемъ:

$2\pi r\,.\,x$ — поверхность сегмента, отсѣченная отъ шаровой поверхности.

---

*) Это требованіе, очевидно необходимое, вытекаетъ и изъ неравенства $x_1<h$ или $d-\sqrt{d\left(d-\frac{2pq}{a}\right)}<h$, когда рѣшимъ его относительно произведенія pq и въ полученномъ результатѣ замѣнимъ d его значеніемъ (A).

πy^2 — площадь круга сѣченія,

πa^2 — площадь даннаго круга.

Изъ условій задачи вытекаетъ уравненіе:

$$2\pi r \cdot x + \pi y^2 = \pi a^2, \text{ а по сокращеніи}$$

$$2rx + y^2 = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Другое уравненіе съ тѣми же неизвѣстными получаемъ изъ треугольника BOC:

$$y^2 = r^2 - (r - x)^2$$

$$\text{или } y^2 = 2rx - x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Исключеніе y изъ уравненій (1) и (2) приводитъ къ уравненію

$$x^2 - 4rx + a^2 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

которое даетъ для x два значенія:

$$x_1 = 2r + \sqrt{(2r)^2 - a^2}$$

$$x_2 = 2r + \sqrt{(2r)^2 - a^2}.$$

Изслѣдованіе. Если $a^2 > (2r)^2$ или $a > 2r$, т. е если радіусъ даннаго круга больше діаметра даннаго шара, то значенія x будутъ мнимыми и задача невозможна. Для возможности задачи радіусъ a даннаго круга долженъ содержаться между $2r$ и нулемъ.

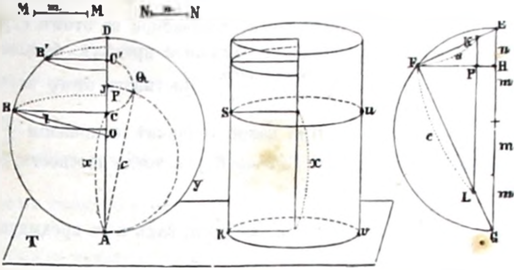
Если $a = 2r$, то оба значенія x становятся равными діаметру шара; искомая сѣкущая плоскость обращается тогда въ касательную плоскость, и сегментъ обращается въ шаръ. Въ этомъ случаѣ поверхность шара $4\pi r^2$ или $\pi(2r)^2$ будетъ равна πa^2 (ибо $2r = a$), т е площади даннаго круга.

Если $a < 2r$, то оба значенія x будутъ положительными, ибо $\sqrt{(2r)^2 - a^2} < 2r$, и притомъ неравныя: $x_1 > 2r$, $x_2 < 2r$.

Высота шарового сегмента не можетъ быть больше діаметра шара; поэтому первое значеніе x, какъ несообразное съ предложеннымъ вопросомъ, должно быть откинуто. При томъ и соотвѣтствующія ему значенія y, т. е. радіуса сѣченія, остаются мнимыми при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ x_1, превышающихъ $2r$, какъ это видно изъ уравненія (2), которое для $x = x_1$ даетъ $y = \sqrt{x_1(2r - x_1)}$, гдѣ $2r - x_1 < 0$.

Построеніе. Построеніе второго значенія x, когда $a < 2r$, не представляетъ никакихъ особенностей: оно исполнено на нашемъ чертежѣ и понятно безъ всякихъ поясненій.

IX. *Шаръ и цилиндръ, поставленные на горизонтальную плоскость, пересѣчь другою горизонтальною плоскостью такъ, чтобы объемы этихъ тѣлъ, заключающіеся между плоскостями, находились въ данномъ отношеніи.*



Пусть r — радіусъ шара, a — радіусъ основанія цилиндра, x — разстояніе отъ плоскости T, на которой эти тѣла поставлены, до искомой сѣкущей плоскости; $\frac{m}{n}$ — отношеніе отсѣкаемыхъ объемовъ, равное, напримѣръ, отношенію двухъ данныхъ прямыхъ MM и NN. Извѣстно, что

$$\text{объемъ сегмента } ABY = \pi x^2\left(r - \frac{x}{3}\right),$$

$$\text{объемъ цилиндра } RSUV = \pi a^2 x.$$

Поэтому, согласно съ условіями задачи, получаемъ уравненіе:

$$\frac{\pi x^2\left(r - \frac{x}{3}\right)}{\pi a^2 x} = \frac{m}{n}.$$

Сокративъ и приведя его къ къ общему виду, найдемъ:

$$x^2 - 3rx + \frac{3a^2 m}{n} = 0,$$

$$\text{а отсюда } x_1 = \frac{3r}{2} + \sqrt{\frac{9r^2}{4} - \frac{3a^2 m}{n}}$$

$$x_2 = \frac{3r}{2} - \sqrt{\frac{9r^2}{4} - \frac{3a^2 m}{n}}.$$

Изслѣдованіе. Предоставляя учащимся всѣ подробности и объясненія, мы намѣтимъ только важнѣйшіе случаи и вопросы, подлежащіе изслѣдованію.

1. $\frac{3a^2m}{n} > \frac{9r^2}{4}$, или $\frac{m}{n} > \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2}{a^2}$. Возможна ли задача?

2. $\frac{m}{n} = \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2}{a^2}$. Гдѣ проходитъ сѣкущая плоскость?

3. $\frac{m}{n} < \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2}{a^2}$. Знаки и величины обоихъ значеній x.

Всякое ли вещественное значеніе x, получаемое въ этомъ случаѣ, можетъ доставить рѣшеніе задачи? Укажите предѣлъ, больше котораго не долженъ быть $\sqrt{\frac{9r^2}{4} - \frac{3a^2m}{n}}$. Частности этого случая:

а) $\sqrt{\frac{9r^2}{4} - \frac{3a^2m}{n}} = \frac{r}{2}$. При какой величинѣ отношенія $\frac{m}{n}$ будетъ выполнено это условіе? Гдѣ пройдутъ тогда плоскости, опредѣляемыя значеніями x?

б) $\sqrt{\frac{9r^2}{4} - \frac{3a^2m}{n}} < \frac{r}{2}$. Тѣ же вопросы, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

в) $\sqrt{\frac{9r^2}{4} - \frac{3a^2m}{n}} > \frac{r}{2}$. Тѣ же вопросы. Сколько рѣшеній получаетъ задача въ этомъ случаѣ?

г) $\sqrt{\frac{9r^2}{4} - \frac{3a^2m}{n}} = \frac{4}{3} r$. Величина отношенія $\frac{m}{n}$ и положеніе искомой плоскости въ этомъ случаѣ?

д) $\sqrt{\frac{9r^2}{5} - \frac{3a^2m}{n}} > \frac{4}{3} r$. Возможна ли задача?

Сдѣлайте общее заключеніе, между какими предѣлами должно заключаться отношеніе $\frac{m}{n}$ для возможности задачи?

Построеніе. Чтобы воспользоваться теоремою Пиѳагора, приведемъ $\sqrt{\frac{9r^2}{4} - \frac{3a^2m}{n}}$ къ виду $\sqrt{\left(\frac{3r}{2}\right)^2 - c^2}$. Для этого надо положить $\frac{3a^2m}{n} = c^2$, что приводитъ къ пропорціи:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{3m}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A).$$

Извѣстно, что квадраты катетовъ пропорціональны отрѣзкамъ, на которые раздѣлится гипотенуза перпендикуляромъ, опущеннымъ на нее изъ вершины прямого угла; поэтому, взявъ на произвольной прямой отрѣзки $GH = 3m$ и $HE = n$, строимъ на суммѣ ихъ GE полуокружность, проводимъ прямую $HF \perp GE$ и точку ея встрѣчи съ полуокружностью соединяемъ съ точками G и E; получается треугольникъ GFE, въ которомъ $\frac{GF^2}{EF^2} = \frac{3m}{n}$. Отложивъ затѣмъ

$FK = a$ и проведи $KL \parallel EG$, получимъ $\frac{FL^2}{FK^2} = \frac{LP}{PK} = \frac{GH}{HF}$, или $\frac{FL^2}{a^2} = \frac{3m}{n}$; сравнимъ съ пропорціей (A), видимъ, что $FL^2 = c^2$. Теперь имѣемъ:

$$x = \frac{3r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3r}{2}\right)^2 - c^2}.$$

Принявъ $AJ = \frac{3r}{2}$ за діаметръ, строимъ опять полуокружность, вписываемъ въ нее хорду $AQ = FL = c$, и проводимъ хорду JQ; тогда получится $JQ = \sqrt{\left(\frac{3r}{2}\right)^2 - c^2} = p$; слѣдовательно,

$$x = \frac{3r}{2} \pm p.$$

Отложивъ отъ точки J по діаметру AD части

$$JC' = JC = JQ = p,$$

находимъ окончательно

$$x_1 = AC',\ x_2 = AC.$$

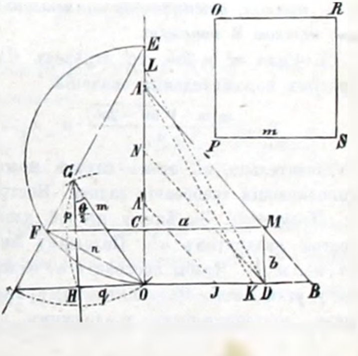
Остается провести чрезъ точки C' и C плоскости, перпендикулярныя къ діаметру AD.

Въ заключеніе предлагаемъ задачу, въ которой при построеніи искомой линіи удобно прилагаются различныя тригонометрическія формулы.

X. *Чрезъ точку M, данную внутри прямого угла AOB, провести сѣкущую AB такъ, чтобы отрѣзанный ею треугольникъ имѣлъ данную площадь m^2.*

Положеніе точки M внутри угла дано — значитъ даны ея разстоянія отъ сторонъ угла: $MC = a$, $MD = b$. Площадь m^2 дана — значитъ данъ квадратъ PQRS, котораго бокъ равенъ m.

Считая задачу рѣшенною, положимъ, что AB есть искомая сѣкущая. Ея положеніе опредѣлится вполнѣ, если найдемъ одно изъ разстояній OA или OB. Пусть $OA = x$, $OB = y$. По условію, площадь треугольника AOB равна m^2; слѣдовательно $\frac{OA \times OB}{2} = m^2$, или $OA \times OB = 2m^2$; отсюда уравненіе:



$$xy = 2m^2 \quad . \; . \; . \; . \; (1).$$

Другое уравненіе съ тѣми же неизвѣстными получится вслѣдствіе подобія треугольниковъ AOB и ACM. Имѣемъ $\frac{OA}{OB}=\frac{CA}{CM}$, но $CA=OA-OC=x-b$ и $CM=a$; слѣдовательно,

$$\frac{x}{y}=\frac{x-b}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Исключивъ y изъ уравненій (1) и (2), получимъ уравненіе:

$$\frac{ax^2}{x-b}=2m^2,$$

которое даетъ:

$$x=\frac{m^2}{a}\mp\sqrt{\frac{m^4}{a^2}-\frac{2m^2b}{a}}$$

$$\text{или}\quad x=\frac{m(m\pm\sqrt{m^2-ab})}{a}.$$

Изслѣдованіе. 1. Если $m^2<2ab$, т. е если требуется отсѣчь такой треугольникъ AOB, котораго площадь была бы меньше удвоенной площади прямоугольника OCMD, то радикалъ $\sqrt{m^2-2ab}$ сдѣлается мнимымъ и рѣшеніе невозможно.

2. Если $m^2=2ab$, то радикалъ обращается въ нуль и оба значенія x становятся равными:

$$x_1=x_2=\frac{m^2}{a}=\frac{2ab}{a}=2b.$$

Въ этомъ случаѣ прямая AB отсѣкаетъ наименьшую площадь, потому что m^2, какъ мы видѣли, не можетъ быть меньше $2ab$. Такъ какъ при этомъ разстояніе $OA=x_1=2b$, то $AC=CO$; а вслѣдствіе параллельности прямыхъ CM и OB, будетъ и $AM=MB$, т. е. *прямая, отсѣкающая наименьшій треугольникъ, дѣлится данною точкою M пополамъ.*

3. Если $m^2>2ab$, то отрѣзокъ OA имѣетъ два различныя и притомъ положительныя значенія:

$$x_1=\frac{m(m+\sqrt{m^2-2ab})}{a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{m(m-\sqrt{m^2-2ab})}{a}.$$

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ можно провести двѣ сѣкущія, выполняющія требованія задачи. Построимъ ихъ.

Построеніе. Замѣнимъ второй членъ $2ab$ подкоренного количества квадратомъ n^2. Положимъ $2ab=n^2$, получимъ пропорцію $2a:n=n:b$. Чтобы построить n, отложимъ на сторонѣ OA даннаго угла часть $OE=2OD=2a$, примемъ OE за діаметръ и опишемъ полуокружность; продолжимъ прямую MC до встрѣчи съ этой полуокружностью въ точкѣ F и проведемъ хорду OF; она и будетъ равна n, какъ средняя пропорціональная между діаметромъ $OE = 2a$ и его отрѣзкомъ $OC = b$. Теперь имѣемъ:

$$x = \frac{m(m \pm \sqrt{m^2 - n^2})}{a}.$$

Если вынесемъ въ подкоренной величинѣ множителя m^2 за скобку, то получимъ:

$$x = \frac{m\left(m \pm \sqrt{m^2\left(1 - \frac{n^2}{m^2}\right)}\right)}{a}$$

$$\text{или } x = \frac{m^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{n^2}{m^2}}\right)}{a}.$$

Такъ какъ по условію $m^2 > n^2$, то $\frac{n^2}{m^2} < 1$, и потому можетъ положить $\frac{n}{m} = \operatorname{Sin}\theta$. Для построенія угла θ проведемъ хорду EF пересѣчемъ ее въ точкѣ C дугою, описанною изъ центра O радіусомъ, равнымъ боку m даннаго квадрата и соединимъ точки G и O прямою; уголъ OGF будетъ равенъ θ. Дѣйствительно, въ треугольникѣ OGF уголъ F прямой, какъ вписанный въ полуокружности; слѣдовательно, синусъ угла OGF равенъ отношенію $\frac{OF}{OG} = \frac{n}{m}$. И такъ

$$x = \frac{m^2(1 \pm \sqrt{1 - \operatorname{Sin}^2\theta})}{a} = \frac{m^2(1 \pm \operatorname{Cos}\theta)}{a}, \text{ или}$$

$$x_1 = \frac{m^2(1 + \operatorname{Cos}\theta)}{a}, \quad x_2 = \frac{m^2(1 - \operatorname{Cos}\theta)}{a}.$$

Но извѣстно изъ тригонометріи, что $1 + \operatorname{Cos}\theta = 2\operatorname{Cos}^2\frac{\theta}{2}$, $1 - \operatorname{Cos}\theta = 2\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{2}$; слѣдовательно,

$$x_1 = \frac{2m^2\operatorname{Cos}^2\frac{\theta}{2}}{a} = \frac{2\left(m\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2}\right)^2}{a}, \quad x_2 = \frac{2m^2\operatorname{Sin}^2\frac{\theta}{2}}{a} = \frac{2\left(m\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}\right)^2}{a}.$$

Количества $m\operatorname{Cos}\frac{\theta}{2}$ и $m\operatorname{Sin}\frac{\theta}{2}$ выражаютъ длину катетовъ прямоугольнаго треугольника, котораго гипотенуза равна m и одинъ изъ острыхъ угловъ равенъ $\frac{\theta}{2}$. Мы его получимъ, раздѣливъ уголъ $OGF = \theta$ пополамъ прямою GH и проведя OH перпендикулярно къ равнодѣлящей: ибо это построеніе доставляетъ треугольникъ OGH, изъ котораго имѣемъ:

$$GH = OG \cdot \mathrm{Cos}\,\frac{\theta}{2} = m\mathrm{Cos}\,\frac{\theta}{2} = p \text{ и } OH = m\mathrm{Sin}\,\frac{\theta}{2} = q. \text{ Поэтому}$$

$$x_1 = \frac{2p^2}{a},\ x_2 = \frac{2q^2}{a}.$$

Значеніе x_1 построится по пропорціи $a : 2p = p : x_1$. Исполнимъ это построеніе на сторонахъ угла AOB. Отложимъ $OL = 2GH = 2p$, и $OK = p$; такъ какъ $OD = a$, то соединивъ точки D и L прямою и проведя KA параллельно DL, получимъ $OA = x_1$. Точно также найдется разстояніе OA′ по пропорціи $a : 2q = q : x_2$. Остается провести двѣ прямыя: одну чрезъ точки A и M, другую чрезъ точки A′ и M; обѣ онѣ отдѣлятъ отъ угла AOB требуемые треугольники.

Общіе выводы изъ предыдущихъ изслѣдованій и особенно объ отрицательныхъ рѣшеніяхъ.

§ 36. Пересматривая всѣ рѣшенныя нами задачи, можемъ сдѣлать нѣкоторыя общія заключенія:

1. *Отрицательное рѣшеніе не можетъ служить отвѣтомъ на геометрическій вопросъ, когда опредѣляется длина какой нибудь линіи, положеніе же этой линіи по свойству вопроса безразлично.* (См. § 7, зад 4). Подобное обстоятельство легче всего встрѣтить въ задачахъ на вычисленіе; напр., опредѣливъ діагональ x прямоугольнаго параллелепипеда по даннымъ его ребрамъ a, b, c, получаемъ $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ безъ двойного знака $\pm$.

2. *Если на какой нибудь линіи, прямой или кривой, опредѣляется точка по ея разстоянію отъ нѣкоторой извѣстной точки, данной на той же линіи, то положительныя значенія этого разстоянія надо откладывать въ ту именно сторону отъ данной точки, въ которой при составленіи уравненія предполагалась искомая точка, а отрицательныя — въ обратную.* (См. § 35, задачи I, III, V). Точка, отъ которой откладываются разстоянія, называется *началомъ* этихъ разстояній.

3. Въ случаяхъ, указанныхъ предыдущимъ пунктомъ, *не всякое положительное или отрицательное рѣшеніе пригодно для задачи.* Это обстоятельство всегда обнаруживается изслѣдованіемъ (см. зад. VII, VIII). Причину его можно искать въ томъ, что одно и то же уравненіе можетъ соотвѣтствовать многимъ вопросамъ, не-

имѣющимъ никакой взаимной связи, и количество, отвѣчающее на нѣкоторые изъ этихъ вопросовъ, можетъ не отвѣчать на остальные, смотря по характернымъ особенностямъ тѣхъ и другихъ.

Задачи для упражненія въ составленіи уравненій, въ построеніи формулъ и въ изслѣдованіяхъ *).

A. Задачи, приводящія къ раціональнымъ формуламъ.

1. Построить треугольникъ по даннымъ: сторонѣ, площади и углу, противолежащему данной сторонѣ.

2. Чрезъ точки A и B провести такую окружность, чтобы касательная къ ней, проведенная изъ третьей данной точки C, имѣла данную длину.

3. Данный параллелограммъ, или данную трапецію, раздѣлить въ отношеніи $m:n$ прямою, параллельною данной прямой RS **).

4. Въ данный треугольникъ вписать прямоугольникъ даннаго периметра.

5. Шаръ радіуса r разсѣчь плоскостью такъ, чтобы выпуклыя поверхности полученныхъ сегментовъ относились, какъ $m:n$.

6. Шаръ радіуса r разсѣчь плоскостью такъ, чтобы объемы цилиндра и конуса, вписанныхъ въ большій сегментъ и имѣющихъ общимъ основаніемъ кругъ сѣченія, относились какъ $m:n$.

7. На прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки A и B, найти такую третью точку, чтобы разность квадратовъ, построенныхъ на ея разстояніяхъ до точекъ A и B, равнялась данному квадрату k^2.

8. На данныхъ основаніяхъ AB и CD построить два такихъ прямоугольника, чтобы сумма ихъ площадей равнялась площади даннаго квадрата, а сумма периметровъ — длинѣ данной прямой.

9. Провести окружность, касательную къ данной прямой PQ въ данной на ней точкѣ A и къ данной окружности радіуса r.

---

*) Задачи распредѣлены по степени сложности формулъ, къ которымъ онѣ приводятъ.

**) Въ этой и въ послѣдующихъ задачахъ подъ буквами m и n подразумѣвать длину двухъ данныхъ прямыхъ линій.

10. Данный треугольникъ раздѣлить въ отношеніи $m:n$ прямою, проходящею чрезъ точку M, данную на одной изъ его сторонъ.

11. Въ треугольникъ вписать прямоугольникъ, котораго стороны относились бы, какъ $m:n$.

12. Шаръ радіуса r разсѣчь плоскостью такъ, чтобы отношеніе поверхности меньшаго сегмента къ боковой поверхности конуса, имѣющаго общее съ нимъ основаніе и вершину въ центрѣ шара, равнялось $m:n$.

Б. Задачи, приводящія къ ирраціональнымъ формуламъ

13. Данный треугольникъ обратить въ равномѣрный съ нимъ квадратъ.

14. Чрезъ двѣ данныя точки провести окружность, касательную къ данной прямой.

15. Удвоить данный квадратъ, т. е. построить другой квадратъ, имѣющій вдвое большую площадь.

16. Уменьшить данный квадратъ вдвое.

17. Построить квадратъ, равномѣрный [illegible] даннаго квадрата.

18. Построить квадратъ, равномѣрный данному кругу.

19. Построить кругъ, равномѣрный данному квадрату.

20. Данный кругъ раздѣлить концентрическими окружностями на нѣсколько равномѣрныхъ частей, напримѣръ, на пять.

---

21. Даны два треугольника, имѣющіе общій уголъ; построить треугольникъ, подобный одному изъ нихъ и равномѣрный другому.

22. Прямой круговой конусъ разсѣчь плоскостью, параллельною основанію такъ, чтобы плоскость сѣченія относилась къ плоскости основанія, какъ $m:n$.

23. Построить конусъ одной высоты съ даннымъ цилиндромъ такъ, чтобы объемъ его относился къ объему цилиндра, какъ $m:n$.

24. Раздѣлить треугольникъ въ отношеніи $m:n$ прямою, параллельною данной прямой RS.

25. На данной гипотенузѣ построить треугольникъ, котораго катеты относились бы, какъ $m:n$.

---

26. Треугольникъ раздѣлить въ среднемъ и крайнемъ отношеніи прямою, параллельною его основанію.

27. Конусъ разсѣчь плоскостью, параллельною основанію такъ, чтобы боковая поверхность усѣченнаго конуса была вдвое меньше полной поверхности даннаго конуса.

28. Шаръ радіуса r разсѣчь плоскостью такъ, чтобы боковыя поверхности цилиндра и конуса, вписанныхъ въ большій сегментъ и имѣющихъ общимъ основаніемъ кругъ сѣченія, относились, какъ $m : n$.

29. Шаръ радіуса r разсѣчь плоскостью такъ, чтобы объемъ меньшаго изъ отсѣченныхъ сегментовъ составлялъ одну треть объема конуса, имѣющаго общее съ нимъ основаніе, а вершину въ центрѣ шара.

30. Въ шаръ радіуса r вписать цилиндръ, равномѣрный съ суммою сферическихъ сегментовъ, имѣющихъ общія съ нимъ основанія.

---

31. Построить радіусъ шара, котораго поверхность равномѣрна съ поверхностью даннаго правильнаго тетраедра.

32. Построить радіусъ шара, котораго поверхность равномѣрна съ поверхностью даннаго правильнаго октаедра.

---

33. Построить прямоугольный треугольникъ такъ, чтобы его площадь равнялась площади bh даннаго прямоугольника, а высота, опущенная на гипотенузу, дѣлила бы эту послѣднюю па части, пропорціональныя бокамъ того же прямоугольника.

---

34. Построить прямоугольникъ по даннымъ площади и периметру.

35. Построить прямоугольникъ по даннымъ площади и разности между основаніемъ и высотою.

36. Построить равнобедренный треугольникъ, зная его основаніе и діаметръ описаннаго около него круга.

37. Въ квадратъ, котораго бокъ равенъ линіи AB, вписать другой квадратъ, котораго бокъ равенъ линіи CD.

38. На прямой, проходящей чрезъ двѣ данныя точки A и B, найти такую третью точку, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на ея разстояніяхъ отъ точекъ A и B, равнялась данному квадрату k^2.

39. Чрезъ точку A, данную внутри круга радіуса r, провести хорду данной длины.

40. Чрезъ точку A, данную внѣ круга радіуса r, провести сѣкущую такъ, чтобы часть ея, заключающаяся внутри круга, имѣла данную длину.

41. Въ данный треугольникъ вписать правильный треугольникъ такъ, чтобы одна изъ сторонъ послѣдняго была параллельна основанію даннаго треугольника.

42. Въ данный треугольникъ вписать прямоугольникъ, имѣющій данную площадь.

43. Чрезъ центръ круга, вписаннаго въ треугольникъ, провести прямую такъ, чтобы она раздѣлила треугольникъ на двѣ равномѣрныя части.

44. Построить треугольникъ, зная длину линій, соединяющихъ вершины съ серединами противоположныхъ сторонъ.

45. Шаръ радіуса r разсѣчь плоскостью такъ, чтобы отношеніе выпуклой поверхности меньшаго сегмента къ боковой поверхности конуса, имѣющаго общее съ нимъ основаніе и вершину въ вершинѣ большаго сегмента, равнялось $m : n$.

46. Шаръ радіуса r разсѣчь плоскостью такъ, чтобы отношеніе объема меньшаго изъ отсѣченныхъ сегментовъ къ объему конуса, вписаннаго въ большій сегментъ, равнялось $m : n$.

47. Чрезъ точку A, находящуюся въ равныхъ разстояніяхъ отъ сторонъ прямого угла, провести прямую такъ, чтобы часть ея, заключающаяся между боками угла, имѣла данную длину. Эта замѣчательная задача взята изъ *„Всеобщей ариѳметики“* Ньютона, гдѣ она рѣшена различными способами съ цѣлью показать, какое вліяніе на простоту рѣшенія имѣетъ выборъ искомой величины.

48. Чрезъ точку A, данную внѣ окружности радіуса r, провести сѣкущую такъ, чтобы сумма квадратовъ, построенныхъ на внѣшней и внутренней ея частяхъ, равнялась данному квадрату k^2.

Дозв. ценз. СПБ., 28-го мая 1897 г. Тип. Тов. М. О. Вольфъ (В. О., 16 л., д. № 5—7).