

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Белорусского
государственного университета

_____ А.Д.Король

27 июня 2025 г.

Регистрационный № 4164/м.



ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Учебная программа учреждения образования по учебной дисциплине для
специальности:

7-06-0533-04 Математика и компьютерные науки

Профилизация: Математика

2025 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 7-06-0533-04-2025, учебного плана БГУ № М52-5.4-52/уч. от 23.05.2025.

СОСТАВИТЕЛЬ:

В.В.Балащенко, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Н.В.Гриб, заведующий кафедрой математики и методики преподавания математики физико-математического факультета учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», кандидат физико-математических наук, доцент;

Г.В.Матвеев, доцент кафедры фундаментальной математики и интеллектуальных систем факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ (протокол № 13 от 03.06.2025);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 11 от 26.06.2025)

Заведующий кафедрой



Д.Ф.Базылев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – формирование современных представлений об одном из важнейших классов математических объектов – гладких многообразиях, которые широко используются в теоретических и прикладных разделах математики.

Задачи учебной дисциплины:

1. Изучение основ теории гладких многообразий.
2. Изучение основ теории расслоений.
3. Применение методов теории гладких многообразий и расслоений для построения и исследования математических моделей.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с углубленным высшим образованием (магистра).

Учебная дисциплина относится к модулю «Алгебра и геометрия» компонента учреждения образования.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина связана с фундаментальным курсом «Дифференциальная геометрия и топология», а также является основой для учебной дисциплины «Теория групп Ли».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Гладкие многообразия» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

Специализированные компетенции:

Применять актуальные методы геометрии и алгебры в математических моделях.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен:

знать: понятия гладкого многообразия, гладкого векторного поля, основные понятия о расслоениях;

уметь: приводить примеры гладких многообразий и расслоений;

иметь навык: владения основными разделами теории гладких многообразий и расслоений.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1-м семестре. В соответствии с учебным планом всего на изучение учебной дисциплины «Гладкие многообразия» отведено для очной формы получения углубленного высшего образования: 132 часов, в том числе 54 аудиторных часов, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 18 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Гладкие многообразия.

Тема 1.1. Гладкие структуры.

Введение (линии и поверхности). Локальные карты, атласы., гладкая структура. Примеры гладких многообразий. Атласы на двумерной сфере.

Тема 1.2. Гладкие отображения.

Гладкие функции на гладком многообразии. Алгебра гладких функций. Гладкие отображения многообразий. Диффеоморфизм.

Тема 1.3. Элементы классификации.

О классификации гладких многообразий. Гладкие структуры на n -мерном векторном пространстве.

Тема 1.4. Касательное пространство.

Касательный вектор (два подхода). Касательное пространство. Натуральный базис касательного пространства.

Раздел 2. Гладкие векторные поля на многообразии.

Тема 2.1. Дифференциал.

Дифференциал гладкого отображения многообразий. Геометрический смысл дифференциала. Запись в локальных координатах. Цепное правило.

Тема 2.2. Векторные поля.

Гладкие векторные поля (разные подходы). Векторные поля в координатной окрестности. Алгебра Ли гладких векторных полей.

Раздел 3. Расслоения.

Тема 3.1. Расслоения и морфизмы.

Основные понятия (база, слой, сечение, подрасслоение). Примеры. Морфизмы расслоений.

Тема 3.2. Типы расслоений.

Локально тривиальные и векторные расслоения. Примеры. Касательное расслоение к гладкому многообразию.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения углубленного высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела,	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов						Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1.	Гладкие многообразия	14			8				
1.1	Гладкие структуры	4			4			Отчеты	
1.2	Гладкие отображения	2			2			Отчеты	
1.3	Элементы классификации	2						Опрос	
1.4	Касательное пространство	6			2			Отчеты	
2.	Гладкие векторные поля на многообразии	14			6				
2.1	Дифференциал	6			2			Отчеты	
2.2	Векторные поля	8			4			Отчеты	
3.	Расслоения	8			4				
3.1	Расслоения и морфизмы	4			2			Отчеты	
3.2	Типы расслоений	4			2			Опрос	
	Всего по дисциплине	36			18				

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Основная литература

1. Фоменко, А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности "Математика" / А. Т. Фоменко. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2022. - 401 с.
2. Тужилин, А. А. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей / А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко. - Изд. стер. - Москва: URSS: ЛЕНАНД, 2022. - 243 с.

Дополнительная литература

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд. 4, перераб. и доп. - URSS, 2020.
2. Натанзон С.М. Введение в теорию гладких многообразий. – МЦНМО, 2020.
3. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. - М.: «Мир», 1987.
4. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. - М.: «Мир», 1971.
5. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 3. Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
6. Тамура И. Топология слоений. Пер с японского. – М.: Мир, 1979. - 320 с.
7. Шутц Б. Геометрические методы математической физики. Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 304 с.
8. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. Пер. с англ. - М.: Мир, 1970. – 442 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций магистрантов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений магистрантов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний магистрантов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

1. устный опрос;
2. отчет по индивидуальным заданиям.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности

изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Оценка за выполнение индивидуальных заданий отражает степень самостоятельности выполнения задания, соответствие теоретическим положениям, творческий подход.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Гладкие многообразия» учебным планом предусмотрен зачёт.

Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие № 1. Примеры атласов на сфере.

Занятие № 2. Гладкие функции, примеры. Алгебра гладких функций.

Занятие № 3. Гладкие отображения, примеры.

Занятие № 4. Касательные векторы, примеры.

Занятие № 5. Векторные поля.

Занятие № 6. Скобка Ли векторных полей.

Занятие № 7. Алгебра Ли гладких векторных полей.

Занятие № 8. Расслоения и подрасслоения. Морфизмы расслоений.

Занятие № 9. Локально тривиальные и векторные расслоения

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие подходы и методы:

эвристический, ориентированный на: - осуществление магистрантами лично-значимых открытий в процессе подготовки к лекциям и лабораторным занятиям по теории гладких многообразий; - демонстрацию различных способов решений математических задач, методов, форм, средств и приемов организации учебной деятельности магистрантов; - творческую самореализацию магистрантов в процессе использования сложной математической техники из многих фундаментальных и специальных математических дисциплин;

практико-ориентированный, предполагающий: - освоение содержания образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;

метод группового обучения, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности магистрантов, предполагающую совместную работу как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы: – поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по индивидуально заданной проблеме учебной дисциплины; – выполнение домашнего задания; – работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений, выдаваемых на лекционных и лабораторных занятиях; – изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку.

Примерный перечень вопросов к зачету

1. Атласы, гладкие структуры. Гладкие многообразия (определение, примеры).
2. Гладкие функции на гладком многообразии. Алгебра гладких функций.
3. Гладкие отображения гладких многообразий (два определения). Диффеоморфизм.
4. О классификации гладких многообразий малой размерности.
5. Гладкие структуры на n -мерном евклидовом пространстве.
6. Касательный вектор к гладкому многообразию. Касательное пространство.
7. Касательный вектор к гладкому многообразию как специальный линейный функционал.
8. Натуральный базис касательного пространства к гладкому многообразию.
9. Дифференциал гладкого отображения гладких многообразий. Геометрический смысл дифференциала.
10. Запись дифференциала в локальных координатах. Цепное правило.
11. Гладкие векторные поля на вещественной прямой. Гладкие векторные поля на гладком многообразии (разные подходы).
12. Гладкие векторные поля в координатной окрестности.
13. Алгебра Ли гладких векторных полей на гладком многообразии.
14. Расслоения, основные понятия (база, слой, сечение, подрасслоение).
Примеры.
15. Морфизмы расслоений, свойства, примеры.
16. Локально тривиальные и векторные расслоения. Примеры.
17. Касательное расслоение к гладкому многообразию. Гладкая структура на ТМ.
18. Сечения касательного расслоения и векторные поля.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Теория групп Ли	Геометрии, топологии и методики преподавания математики	Предложения отсутствуют	Рекомендовать к утверждению учебную программу (протокол № 13 от 03.06.2025)

Заведующий кафедрой
геометрии, топологии и
методики преподавания математики
кандидат физико-математических наук,
доцент



Д.Ф.Базылев

03.06.2025

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УО

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета
