

ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

Фундаментальная
библиотека БГУ



01262529



БІБЛІЯТЭКА
БЕЛАРУССКаго Універсітэта
імя В. І. ЛЕНИНА

МИНСК · ИЗДАТЕЛЬСТВО БГУ имени В. И. ЛЕНИНА · 1979

Главная редакционная коллегия журнала:

М. Д. ТИВО (главный редактор),
П. Н. БАРАНОВСКИЙ (ответственный секретарь), В. С. ГРИ-
ГОРЬЕВ, Г. П. ДАВИДОК, В. Г. ИВАШИН, В. Г. РУДЬ
(зам. главного редактора), А. М. САРЖЕВСКИЙ, А. Е. СУ-
ПРУН, И. Г. ТИЩЕНКО

Редакционная коллегия серии:

А. М. САРЖЕВСКИЙ (ответственный редактор),
Ю. С. БОГДАНОВ (зам. ответственного редактора), Э. И. ЭЗВЕ-
РОВИЧ, Е. А. ИВАНОВ, В. В. ИЗОХ, Л. И. КОМАРОВ,
Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ,
А. С. ФЕДЕНКО, Б. Ю. ХАНОХ (ответственный секретарь),
М. П. ХАЛИМАНОВИЧ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, С. С. ШУШ-
КЕВИЧ

**ВЕСТНИК БЕЛАРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА**

Серия I, 1979, № 2

Редактор И. Л. Стрельчена

Художественный редактор Л. Г. Медведева

Технический редактор и корректор Г. И. Хмарун

Сдано в набор 22.01.79. Подписано в печать 08.05.79. АТ 03096. Формат
70×108^{1/16}. Печать высокая. Усл. печ. л. 7,7. Уч.-изд. л. 7,77. Тираж
1170 экз. Зак. 82. Цена 80 коп.

Издательство Белорусского государственного университета имени
В. И. Ленина. Минск, Парковая магистраль, 11. Дом книги. Ордена
Трудового Красного Знамени типография Издательства ЦК КП Бело-
руссии. Минск, Ленинский пр., 79.

Адрес редакции: 220080. Минск, Университетский городок, юридический
факультет, к. 62, тел. 22-87-54.

ВЕСТНИКУ БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ В. И. ЛЕНИНА — 10 ЛЕТ

В марте 1979 г. исполнилось 10 лет со дня выхода в свет первого номера первой серии журнала «Вестник БГУ имени В. И. Ленина», в которой публикуются научные труды математиков, физиков, механиков. Появление первого научно-теоретического журнала явилось важным событием в научной и культурной жизни университета. Задачей журнала была систематическая публикация основных результатов теоретических и экспериментальных исследований ученых университета, а также отклик на важнейшие проблемы научной, культурной и политической жизни.

Первую редакционную коллегию журнала возглавил чл.-кор. АН БССР проф. В. Г. Вафиади, который совместно с членами редколлегии, известными учеными университета (академиками АН БССР профессорами Ф. Д. Гаховым, М. А. Ельяшевичем, В. П. Платоновым, чл.-кор. АН БССР проф. В. Д. Ткачевым, профессорами Ю. С. Богдановым, А. Н. Писаревским, доцентами Н. Н. Посновым, М. П. Халимановичем) в период становления журнала приложил немало усилий по организации научного редактирования и своевременного выхода в свет журнала.

Уже с первого номера была определена теоретическая направленность серии: систематически печатать оригинальные и обзорные статьи по таким разделам математики, физики, механики, как математический анализ, дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика, математическая теория уравнений, квантовая теория поля, теория относительности, квантовая радиофизика и электроника, атомная и молекулярная спектроскопия, теплофизика и физика полупроводников, теория антенн и др. Со статьями об основных направлениях научных исследований по физике и математике в университете выступили акад. АН БССР А. Н. Севченко «Развитие физических исследований в Белоруссии», проф. Ю. С. Богданов «Метод инвариантов в асимптотической теории дифференциальных уравнений», доц. И. Н. Поснов «О некоторых проблемах системы счисления в остаточных классах», академики АН БССР А. Н. Севченко, Л. В. Володько, профессора Д. С. Умрейко, А. И. Комяк «Природа спектров люминесценции ураниловых соединений», чл.-кор. АН БССР В. Д. Ткачев «Энергетический спектр и свойства структуры нарушений в полупроводниках», проф. А. Н. Писаревский «Особенности действия ионизирующей радиации на надмолекулярную структуру нуклеопротеида», чл.-кор. АН БССР В. Г. Вафиади «Фотоэлектрическая автоматика и фотометрия в инфракрасных лучах».

Создание «Вестника БГУ имени В. И. Ленина» совпало с периодом интенсивного развития научных исследований по физике и математике

в университете. В области теоретической физики развивались метод проективных операторов и применение его к решению многих задач квантовой теории поля, а также строилась общая теория оптических свойств кристаллов методами тензорного исчисления (акад. АН БССР Ф. И. Федоров); применительно к общей теории относительности разрабатывался так называемый тетрадный формализм (проф. А. Е. Левашев); рассчитывалось влияние высших приближений на величину круговой поляризации, определялись коэффициенты внутренней конверсии на высших оболочках атомов с учетом конечных размеров ядра и эффекта экранирования (проф. Л. А. Борисоглебский); исследовалась магнитное рассеяние нейтронов на электронах на малые углы и возможность существования обменных смещений спектральных линий атомов в поляризованных веществах (проф. В. Г. Барышевский); разрабатывался метод расчета колебаний молекулярных комплексов (акад. АН БССР М. А. Ельяшевич). В области экспериментальной физики изучалась связь между строением и спектрально-люминесцентными свойствами соединений урана (академики АН БССР А. Н. Севченко, Л. В. Володько, профессора Д. С. Умреко, А. И. Комяк); исследовалась поляризация люминесценции растворов сложных молекул при мощном лазерном возбуждении (проф. А. М. Саржевский); разрабатывались методы комплексного исследования подвижной низкотемпературной плазмы (проф. И. Г. Некрашевич, доц. А. А. Лабуда); исследовались энергетический спектр и свойства остаточных и радиационных нарушений, природа дефектов и их взаимодействие в полупроводниках (чл.-кор. АН БССР В. Д. Ткачев), а также влияние ионизирующей радиации на надмолекулярную структуру нуклеопroteида (проф. А. Н. Писаревский). В области технической физики разрабатывались методика энергетического расчета фотоэлектрических систем, методы модуляции и демодуляции света и инфракрасные радиационные методы измерения температур слабонагретых тел (чл.-кор. АН БССР В. Г. Вафиади); выявились особенности распространения радио- и акустических волн в плоско-слоистых средах (проф. В. В. Изох); разрабатывались статистические методы анализа случайных сигналов применительно к ядерно-физическому эксперименту (проф. А. Ф. Чернявский); создавались алгоритмы детектирования детерминированных оптических сигналов (проф. С. С. Щушкевич).

В области математики успешно развивались исследования по алгебре (акад. АН БССР В. П. Платонов), разрабатывался метод граничного перехода в римановых и однородных пространствах (проф. А. С. Феденко); обобщалась теория нормализации поверхностей на случай расслоенных пространств (проф. В. И. Веденников); проводились широкие исследования в области краевых задач теории аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений (акад. АН БССР Ф. Д. Гахов); строилась теория асимптотических инвариантов сильно нелинейных дифференциальных систем (проф. Ю. С. Богданов); создавалась общая схема решения большого класса экстремальных задач дискретной оптимизации на конечных множествах (проф. В. А. Емеличев); проводились исследования по аналитической, качественной и асимптотической теориям дифференциальных уравнений (акад. АН БССР Н. П. Еругин) и конструктивной теории функций (проф. А. Х. Турецкий); широко велись исследования по вычислительной математике (акад. АН БССР В. И. Крылов).

В области механики проводились исследования по теории упругости, термоупругости, гидромеханике и другим разделам механики сплошной среды, теоретической механике (профессора И. А. Прусов, М. Д. Мартыненко).

За прошедшее десятилетие круг физических и математических проблем и задач значительно расширился, появились новые научные направ-

ления. Начались исследования по нелинейной оптике (доценты А. П. Хаплюк, Л. М. Барковский) и нелинейной спектроскопии (проф. А. М. Саржевский, доцент Е. С. Воропай), голографии (доц. А. С. Ключников), развивались приборостроение и автоматизация научных исследований (проф. А. Ф. Чернявский).

Получили широкое развитие исследования не только в теоретической, но и в прикладной математике. Изучены проблемы устойчивости, качественной и конструктивной теории статистических и динамических систем планирования и управления (акад. АН БССР Е. А. Барбашин, проф. Р. Габасов); разработаны аддитивные процедуры оценивания низвестных параметров и случайных процессов (проф. Г. А. Медведев); решены новые краевые задачи, имеющие приложения в электродинамике (проф. Э. И. Зверович), и краевые задачи теории дифракции волн на телах различной конфигурации (чл.-кор. АН БССР Е. А. Иванов).

Журнал своевременно освещал актуальные проблемы, откликался на знаменательные даты и события в жизни университета, республики и страны. Под рубриками «Научная жизнь», «Критика и библиография», «Письма в редакцию», «Защита диссертаций», «Хроника» публиковались материалы университетских, республиканских и всесоюзных научных и юбилейных сессий и конференций, рецензии на монографии и учебные пособия, полемические заметки, информация о работе ученых советов по защите диссертаций. Журнал тепло поздравлял наших юбиляров — наиболее достойных и заслуженных ученых университета, которые внесли большой вклад в развитие науки и подготовку высококвалифицированных кадров. Со статьями, посвященными главным вехам в истории университета, республики, а также знаменательным событиям в нашей стране, выступали академики АН БССР А. Н. Севченко, Л. В. Володько, Ф. Д. Гахов, профессора Ю. С. Богданов, Е. А. Иванов и др.

Большую помощь журнал оказывал аспирантам, соискателям и молодым ученым в оперативной публикации основных полученных результатов.

Редколлегия журнала за 10 лет провела большую работу по улучшению качества научного редактирования, рецензирования публикаций и оформлению журнала. В журнал была введена экспрессная форма публикаций — депонирование рукописей, затем аннотирование депонированных статей.

Вступая во второе десятилетие, редколлегия журнала полна желания и решимости сделать все возможное для превращения «Вестника БГУ имени В. И. Ленина» в одно из авторитетных научных изданий страны.



УДК 681.31:378.1

Л. В. КАЛАЦКАЯ

О ГЕНЕРИРОВАНИИ ЗАДАЧ В АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ОБУЧАЮЩИХ СИСТЕМАХ

Автоматическое генерирование задач в автоматизированных обучающих системах (АОС), устанавливающих оптимальные значения показателей процесса обучения для каждого обучаемого, расширяет логические возможности таких систем.

Автоматические генераторы задач делятся на три типа: синтаксические по примитивам и семантические порождающие системы.

Синтаксическое генерирование задач осуществлялось в обучающей системе Флоридского университета по алгоритмическому языку Фортран в задачах определения синтаксических типов элементов и непригодных конструкций языка [1]. Примером может служить набор выражений, для каждого из которых следует определить тип выражения: правильный арифметический оператор присваивания, правильный оператор перехода, правильный оператор ввода или вывода, правильный оператор спецификации или ни один из названных:

1. GO_TO_NNBL
2. WRITE (6,17) GQU, YB7, VY
3. FORMAT (6X,18)
4. READ, V9E, LI
5. GO_TO(17,5148), СОРАAF
6. G = ALOG (0.E - 2)*9462.56

Правила вывода включают операторы обращения к датчику последовательности псевдослучайных чисел, и выражения для получения вероятностей, при которых осуществляется замена i -го нетерминального символа, несложны. При этом используются контекстно-свободные вероятностные грамматики.

Модели грамматик естественных языков представляют особый интерес для АОС, но контекстно-свободные грамматики в чистом виде не дают адекватного механизма для отыскания тонкостей естественных языков. Контекстно-зависимые грамматики справляются со слабым порождением различных частей предложения, но ценой потери лингвистической значимости «структуры составляющих», приписываемой грамматикой. Поэтому семантические генераторы основываются на моделях грамматик типа «рекурсивная сеть переходов» [2]. Семантическое генерирование задач реализовано для обучения машинным языкам программирования [1], где путь по дереву задач выбирался с некоторой вероятностью, зависящей от уровня знаний обучаемого.

Правила порождения при генерировании по задачным примитивам имеют вид:

$$p_i : C \rightarrow AaBb,$$

где p_i — вероятность замены символа C выражением справа, включающим a, b -задачные примитивы, которые представляют собой постоянные элементы задачи, соединяемые числовыми параметрами, принадлежащими определенным отрезкам числовой оси и извлекаемые с помощью датчика последовательности псевдослучайных чисел [3].

В более общем случае задачные примитивы могут соединяться цепочками, порождаемыми вероятностными или стохастическими грамматиками [4]. Такой способ задачного генерирования является комбинацией синтаксического и семантического способов порождений.

Характерной особенностью АОС с генераторами задач является наличие в системе блоков интерпретации или решения задач для дальнейшего анализа ответов [5].

Вероятностная контекстно-свободная грамматика $G_s = (N, T, P_s, S)$, порождающая логические выражения для обучающей программы по математической логике [5], имеет конечное множество правил подстановки P_s :

$$\begin{aligned} p_a : A \rightarrow (A * A), \quad p_b : A \rightarrow (-A), \quad p_1 : A \rightarrow x_1, \quad p_2 : A \rightarrow x_2, \\ p_3 : A \rightarrow x_3, \quad p_4 : A \rightarrow x_4, \quad p_5 : A \rightarrow x_5, \quad p_c : * \rightarrow \vee, \\ p_e : * \rightarrow \wedge, \quad p_d : * \rightarrow \rightarrow, \quad p_d : * \rightarrow \equiv, \end{aligned}$$

где вероятности замены нетерминальных символов на цепочки справа удовлетворяют условиям:

$$p_a + p_b + \sum_{i=1}^5 p_i = 1, \quad 2(p_c + p_d) = 1.$$

Здесь N, T — множества нетерминальных и терминальных символов, начальный символ $S = A$.

Язык, порождаемый грамматикой G_s , является λ -свободным вероятностным контекстно-свободным языком, так как соответствующий язык без вероятностей правил подстановки или характеристический язык не содержит пустой цепочки λ . В силу теоремы эквивалентности [4] этот язык будет вероятностным контекстно-зависимым языком. Генератор логических задач, реализованный на основе приведенной грамматики, является синтаксическим генератором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vickers F. D.—«Fall. Joint. Computer Conference», 1972, 41, p. 2, 649.
2. Вудс В. А.—«Кибернетический сборник. Новая серия», М., 1976, вып. 13, 120.
3. Koffman E. B., Bount S. E.—«IEEE Transactions of Systems and Cybernetics», 1974, smc-4, 335.
4. Фу К. Структурные методы в распознавании образов. М., 1977, 142—167.
5. Барановский Л. К., Калацкая Л. В. и др.—В сб.: Диалоговые и обучающие системы. Киев, 1973, 112.

Поступила в редакцию
25/IX 1977 г.

Кафедра ЭММ

Б. Н. КРАСНОГОЛОВЫЙ

ПРИНЦИПЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ РАЗВЕРТОК С УЧЕТОМ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ ЭКРАНА И ЕМКОСТИ ОТКЛОНЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

В осциллографических приборах и устройствах отображения информации, использующих электронно-лучевые трубы (ЭЛТ) с электростатическим отклонением, искажения отклонения в значительной степени связаны с неоптимальной формой поверхности экрана и паразитной емкостью отклоняющих пластин.

Для электростатического отклонения луча при малых углах отклонения α и однородном отклоняющем поле в области параллельных пластин можно записать [1, 2]:

$$\operatorname{tg} \alpha = Mu, \quad (1)$$

где M — постоянный коэффициент для выбранной ЭЛТ; u — отклоняющее напряжение.

Линейное перемещение пятна по плоскому экрану

$$x'' = R_o \operatorname{tg} \alpha = R_o Mu, \quad (2)$$

где R_o — расстояние от центра отклонения O до экрана — радиус отклонения (рис. 1).

Чувствительность к отклонению

$$S_o = \frac{x''}{u} = R_o M. \quad (3)$$

Таким образом, с точки зрения линейности отклонения, как видно из выражения (2), плоский экран является идеальным: чувствительность к отклонению постоянна и равна $R_o M$.

В общем случае для перемещения пятна, отсчитанного по хорде, можно записать

$$x = (L_1 + L_2) \operatorname{tg} \alpha' = R_o \cos \alpha' \operatorname{tg} \alpha' = \\ = R_o \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}}}, \quad (4)$$

где R_o — радиус кривизны экрана.

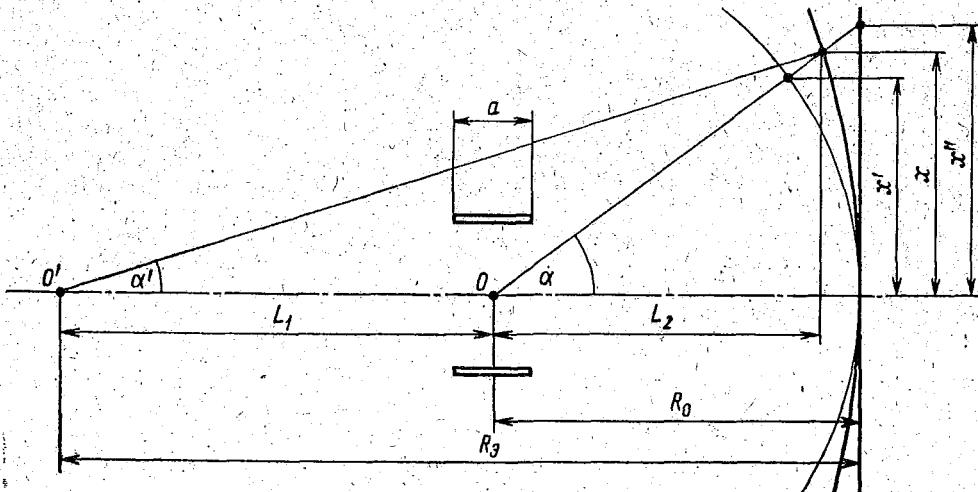


Рис. 1. Геометрические соотношения в ЭЛТ для анализа искажений при отклонении

Для сферического экрана ($R_s = R_0$, $L_1 = 0$) имеем

$$x' = R_0 \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = R_0 \frac{Mu}{\sqrt{1 + M^2 u^2}}, \quad (5)$$

что в явном виде отражает нелинейную зависимость величины отклонения x' от приложенного к пластинам напряжения u .

Нелинейность отклонения может быть выражена через относительную ошибку отклонения

$$\gamma' = \frac{x'' - x'}{x'} = \frac{R_0 \operatorname{tg} \alpha - \frac{R_0 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}}{\frac{R_0 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - 1 = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}. \quad (6)$$

Для сферического экрана ошибки γ' при углах отклонения α , близких к максимальным, как нетрудно подсчитать, могут превышать 5%.

Для плоского экрана $L_2 = R_0$, $L_1 + L_2 = R_s = \infty$, и выражение (4) преобразуется в $x'' = R_0 \operatorname{tg} \alpha$, что совпадает с (2). Для плоского экрана ошибка отклонения $\gamma'' = \frac{x'' - x''}{x''}$ равна нулю.

Обратимся теперь к представляющему наибольший практический интерес случаю выпуклого экрана.

Подставляя в общее выражение (4) $\frac{L_1 - L_2}{L_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{x} (R_s - R_0) + 1$, получаем квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{2R_0(R_s/R_0 - 1)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{R_0^2(2R_s/R_0 - 1)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \operatorname{tg}^2 \alpha = 0, \quad (7)$$

решением которого является

$$x = R_0 \operatorname{tg} \alpha \left[- \left(\frac{R_s/R_0 - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{(R_s/R_0 - 1)^2 + (2R_s/R_0 - 1)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} \right]. \quad (8)$$

Относительная ошибка отклонения

$$\gamma = \frac{x'' - x}{x} = \frac{R_0 \operatorname{tg} \alpha}{x} - 1 = \frac{1}{-\left(\frac{R_s/R_0 - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{(R_s/R_0 - 1)^2 + (2R_s/R_0 - 1)(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}} - 1. \quad (9)$$

На рис. 2 показаны зависимости $\gamma(\alpha)$, рассчитанные по формуле (9) для некоторых типов ЭЛТ, имеющих различные значения R_s/R_0 .

Теоретически наибольшие ошибки отклонения (около 7% при $\alpha = 18^\circ$) присущи трубкам 13Л036В и 13Л037И, имеющим $R_s/R_0 \approx 0,78$.

Нелинейность отклонения здесь больше, чем в случае сферического экрана при $R_s/R_0 = 1$.

Если учесть, что у этих трубок $a_{\max} = \operatorname{arctg} \left(\frac{D_{\text{раб}}}{2R_0} \right) \approx 12^\circ$, где $D_{\text{раб}}$ — рабочий диаметр экрана, ошибки отклонения не выходят за пределы 3%.

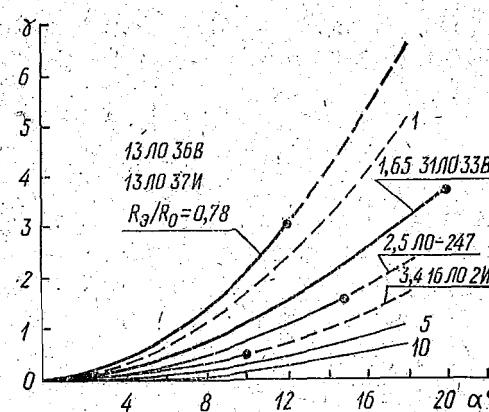


Рис. 2. Графики зависимостей $\gamma(\alpha)$ для некоторых типов ЭЛТ

Пределные углы отклонения для других типов ЭЛТ помечены на рис. 2 точками.

Нужно заметить, что геометрические соотношения в ЭЛТ для $R_a/R_0 < 1$ не полностью будут соответствовать рис. 1: центр отклонения O сместится левее (далее от экрана) центра кривизны O' . Сохранив те же обозначения, что и на рис. 1, и взяв L_1 с минусом, для отклонения x и относительной ошибки γ получим полностью совпадающие с (8) и (9) расчетные формулы.

Для остальных типов ЭЛТ, имеющих $R_a/R_0 > 1$, ошибки отклонения при α_{\max} находятся в пределах 0,5—3,5%, уменьшаясь с ростом R_a/R_0 . При $R_a/R_0 = 5$ и $\alpha_{\max} = 18^\circ \gamma \approx 1\%$, а при $R_a/R_0 = 10 \gamma = 0,5\%$, т. е. начиная с $R_a/R_0 = 5$ нелинейностью отклонения можно вполне пренебречь.

При малых предельных углах α и $R_a/R_0 \gg 1$, что характерно для ЭЛТ с почти плоским экраном, $L_2 \approx R_0$ и $L_1 + L_2 \approx R_0$.

После подстановки значений L_2 и $L_1 + L_2$ в формулу (4) при $R_a/R_0 \gg 1$ получаем более простые выражения для отклонения и относительной ошибки:

$$x \approx \frac{R_a \operatorname{tg} \alpha}{V \operatorname{tg}^2 \alpha + (R_a/R_0)^2} = \frac{R_0 \operatorname{tg} \alpha}{V 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{(R_a/R_0)^2}} = \frac{x''}{V 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{(R_a/R_0)^2}} \quad (10)$$

$$\gamma \approx \frac{x'' - x}{x} = V \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{(R_a/R_0)^2}} - 1. \quad (11)$$

Для выяснения характера зависимости отклонения от приложенного напряжения в выражение (8), или в более простое выражение (10) при $R_a/R_0 \gg 1$, нужно подставить из формулы (1) $\operatorname{tg} \alpha = Mu$.

Во втором упрощенном случае связь между отклонением и напряжением будет описываться выражением

$$x = \frac{R_0 Mu}{V 1 + \frac{M^2 u^2}{(R_a/R_0)^2}}, \quad (12)$$

что при подстановке линейного отклоняющего напряжения $u = k_1 t$ ($k_1 = \frac{D_{\text{раб}}}{2S_a \cdot t_p}$; $D_{\text{раб}}$ — рабочий диаметр экрана, S_a — чувствительность к отклонению; t_p — длительность линейной развертки) дает

$$x = \frac{R_0 M k_1 t}{V 1 + \frac{(M k_1)^2 t^2}{(R_a/R_0)^2}}. \quad (13)$$

Подставив $\operatorname{tg} \alpha = Mu = M k_1 t$ в выражение (11), получим относительную ошибку отклонения во времени при линейной развертке:

$$\gamma = V \sqrt{1 + \frac{(M k_1)^2 t^2}{(R_a/R_0)^2}} - 1. \quad (14)$$

На рис. 3 приведены зависимости $x(t)$ и $\gamma(t)$, построенные по формулам (13) и (14), из которых следует, что за счет кривизны поверхности экрана отклонение x нарастает медленнее, чем линейно изменяющееся напряжение $k_1 t$, и стремится к асимптоте R_a при $t \rightarrow \infty$ (рис. 3, а).

Ошибка отклонения также нарастает во времени, приближаясь к асимптоте $\frac{M k_1 t}{R_a/R_0} - 1$. При $t \rightarrow \infty$ ошибка отклонения уходит в бесконечность, так как при этом теоретически стремится к бесконечности отклонение по плоскому экрану x'' ($t \rightarrow \infty$ соответствует $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \infty$ или $\alpha \rightarrow 90^\circ$).

Решив уравнение (12) относительно u и подставив затем $\dot{x} = k_2 t$, найдем форму отклоняющего напряжения для получения линейной развертки:

$$u = \frac{k_2 \frac{R_0}{R_0} t}{M \sqrt{\frac{R_0^2 - k_2^2 t^2}{R_0^2}}}, \quad (15)$$

где $k_2 = \frac{D_{\text{раб}}}{2t_p}$.

Таким образом, для линейного перемещения пятна по экрану отклоняющее напряжение должно нарастать с увеличивающейся скоростью, стремясь при $t = t_1 = R_0/k_2 = \frac{2R_0}{D_{\text{раб}}} t_p$ к бесконечности (рис. 3, а). Это означает, что для трубы 13Л037И, в частности, $u = \infty$ при $t_1 = 3,76t_p$ или, по-другому, $t_p \approx 0,27t_1$, т. е. развертка занимает примерно 1/4 часть интервала t_1 .

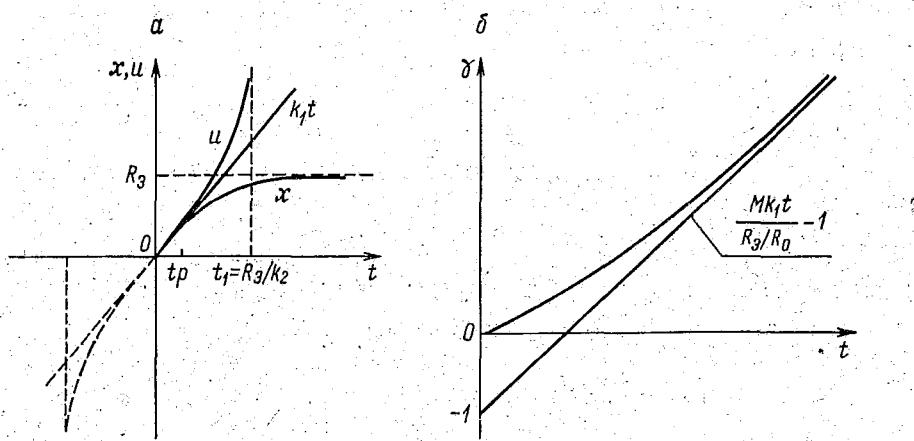


Рис. 3. Временные диаграммы для линейной развертки:
а — графики зависимости $x(t)$ и $u(t)$; б — график зависимости $\gamma(t)$

При развертке на рабочий диаметр экрана необходимая форма напряжения получается симметричным продолжением графика u в область отрицательных значений напряжения (на рис. 3, а показана пунктиром).

Заметим, что расчеты по формулам (13) и (14) дают заниженные значения искажений и соответственно меньшую нелинейность отклоняющего напряжения в выражении (15) для реально существующих ЭЛТ, у которых условие $R_0/R_0 \gg 1$, как правило, не выполняется.

Если ставится задача получить высоко линейную развертку, нужно обратиться к более точному выражению (8), выполнив последующие громоздкие расчеты на ЭВМ.

Для оценки влияния емкостей пластин на процессы отклонения луча воспользуемся схемой на рис. 4, в которой $R_{\text{вых}}$ — выходное сопротивление усилителя (или генератора) напряжения развертки, $C_{\text{вых}}$ — выходная емкость усилителя; C_p , R_p — разделительная цепь, $C_{\text{пл}}$ — емкость отклоняющей пластины на корпус; $C''_{\text{пл}}$ — взаимная емкость между пластинами.

Выходное напряжение $u_{\text{вых}}$ усилителя прикладывается к отклоняющей пластине X_1 через цепь $R_{\text{вых}}C_0$, где $C_0 = C_{\text{вых}} + C_{\text{пл}}$, а $C_{\text{пл}} = C'_{\text{пл}} + 2C''_{\text{пл}}$ — эквивалентная емкость пластины на корпус (обычно $R_p \gg R_{\text{вых}}$ и $C_p \gg C_0$).

Напряжение, непосредственно приложенное к пластине, оказывается равным

$$u_{\text{пл}} = u_{\text{вых}}(1 - e^{-t/\tau}), \quad (16)$$

где $\tau = R_{\text{вых}}C_0$ — постоянная времени цепи.

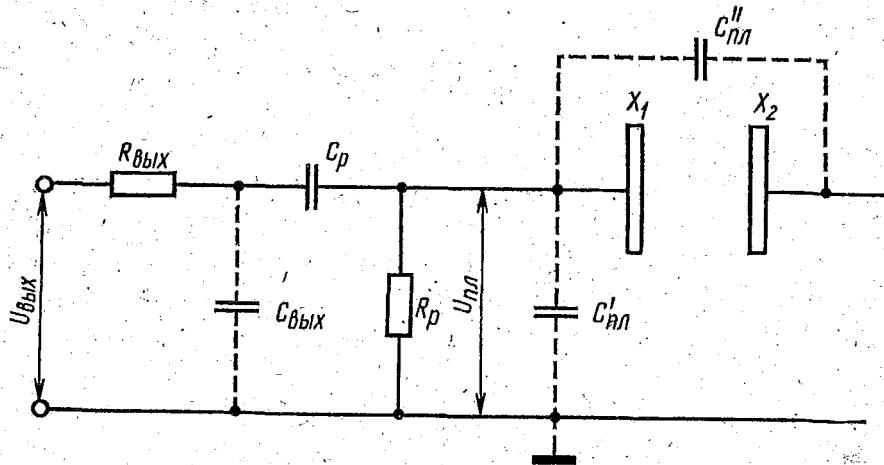


Рис. 4. К оценке искажений, вносимых ёмкостью отклоняющих пластин

Таким образом, паразитная ёмкость пластины совместно с выходным сопротивлением и выходной ёмкостью усилителя вызывает искажение начала развертки в течение времени $t_0 \approx 4\tau$.

Задаваясь временем t_0 и определив суммарную ёмкость C_0 , можно рассчитать максимально допустимую величину $R_{вых}$:

$$R_{вых} \leq \frac{t_0}{4C_0}. \quad (17)$$

Если принять $t_0 \leq 0,01t_p$, для $R_{вых}$ получим

$$R_{вых} \leq 0,0025 \frac{t_p}{C_0}. \quad (18)$$

Для большинства ЭЛТ $C'_{пл} = 10 - 15$ пФ, $C''_{пл} = 1 - 4$ пФ. Приняв $C_0 = C_{вых} + C_{пл} = 25 + 25 = 50$ пФ и $t_p = 100$ мкс, найдем, что выходное сопротивление не должно превышать 5 кОм.

При той же эквивалентной ёмкости для $t_p = 10$ мкс получим $R_{вых} \leq 500$ Ом, для $t_p = 1$ мкс — $R_{вых} \leq 50$ Ом.

Следовательно, даже при весьма строгих требованиях к протяженности искаженного участка t_0 (1% от длительности развертки) и значительной суммарной ёмкости C_0 величина $R_{вых}$ получается не очень малой и вполне реализуемой в практических схемах.

В противном случае необходимо ввести коррекцию сигналом, т. е. найти $u_{вых}$ из выражения (16):

$$u_{вых} = \frac{u_{пл}}{1 - e^{-t/\tau}}. \quad (19)$$

Здесь $u_{пл}$ — напряжение, которое непосредственно нужно приложить к пластине для получения линейной развертки с учетом влияния кривизны поверхности экрана.

Разработанная для линейной развертки методика оценки искажений может быть распространена и на случай формирования специальных электростатических разверток (неравномерной линейной, логарифмической, кольцевой и др.).

Подробное освещение этих достаточно сложных вопросов выходит за рамки данной статьи, но общая схема метода, независимо от закона отклонения луча, представляется в следующем виде.

1. При выбранной ЭЛТ для заданного закона перемещения пятна $x(t)$ оцениваются искажения развертки за счет кривизны экрана: в формулу (8) подставляется $\operatorname{tg} \alpha = M u$, где u пропорционально $x(t)$, и находят

дятся ошибки отклонения во времени аналогично (12), (13) и (14) для упрощенного анализа линейной развертки.

2. Если ошибки отклонения превышают допустимые, определяется форма напряжения развертки, корректирующая искажения отклонения: после подстановки $\operatorname{tg} \alpha = M u$ уравнение (8) решается относительно u , а затем делается подстановка подобно выражениям (12), (15) для линейной развертки.

3. Оцениваются искажения, вносимые емкостью отклоняющих пластин, т. е. определяется при заданных искажениях максимально допустимое выходное сопротивление оконечного каскада канала развертки по формуле (17).

Если найденное значение $R_{\text{вых}}$ практически обеспечить невозможно, вводится дополнительная коррекция сигналом в соответствии с выражением (19), где $u_{\text{пл}}$ — найденная форма напряжения по п. 2.

4. В результате расчетов по пп. 2 и 3 может получиться очень сложная форма напряжения развертки. В этом случае целесообразно ввести аппроксимацию напряжения и дать оценку ошибкам.

5. Проектируются схемы формирования напряжения развертки, корректирующего искажения за счет кривизны экрана и емкости пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллер В. А., Куракин Л. А. Приемные электроннолучевые трубы. М., 1971.
2. Красноголовый Б. Н. Проектирование и расчет элементов индикаторных устройств. Минск, 1971.

Поступила в редакцию
1/IX 1977 г.

Кафедра ЭММ

УДК 535.33/34:539.193:539.194

Е. В. БАРКОВСКИЙ, Н. А. ПРОКОШИНА,
Н. Н. ХОВРАТОВИЧ, С. Н. ЧЕРЕНКЕВИЧ

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ ТВЕРДОЙ ФАЗЫ ТРОМБИНА

Тромбин — важнейший фермент системы свертывания крови. В результате ряда исследований показано [1], что молекула тромбина содержит ряд цепей с различными молекулярными весами и первичной структурой, однако пространственная структура тромбина изучена недостаточно, и поэтому целесообразно привлечение различных физико-химических методов для исследования молекул этого белка.

В настоящей работе анализируются колебательные спектры — инфракрасные спектры поглощения (ИК) и комбинационного рассеяния (КР) — твердой фазы тромбина, полученного в результате лиофильной сушки растворов с различными pH. Интерпретация экспериментального материала основана на литературных данных по колебательным спектрам простых пептидов, полипептидов и белков [2—9].

Использован коммерческий препарат тромбина, выпускаемый Каунасским предприятием бакпрепаратов. Очистка тромбина производилась методом колоночной гель-хроматографии на сефадексах G-75 и G-100. Растворы тромбина готовили в трис-HCl буфере; pH растворов изменяли добавлением соляной кислоты или гидроокиси натрия. ИК-спектры твердой фазы тромбина записывали на спектрофотометре UR-20.

Скорость регистрации ИК-спектров $64 \text{ см}^{-1}/\text{мин}$. Спектральная ширина щели в области 1600 см^{-1} составляла 7 см^{-1} , в области 3300 см^{-1} — 4 см^{-1} . Лиофильно высущенный тромбин спрессовывался с KBr в вакууме в прозрачные таблетки (3—4 мг на 2 г KBr). КР-спектры получены на спектрофотометре Spex-Ramalog-4 при возбуждении аргоновым лазером.

($\lambda=514,5$ нм). Рабочая мощность 100—200 мВт, вещество помещалось в капилляр. Регистрация спектров производилась с помощью счетчика фотонов. Колебательные спектры твердой фазы тромбина в области 400—3600 см⁻¹ представлены на рисунке.

В колебательных спектрах белков проявляются полосы колебаний полипептидных цепей и аминокислотных остатков. Характеристическими для цепей являются полосы амид A, B, I—VII, свойственные обычным вторичным амидам и отражающие в основном колебания CONH-групп. Имеются дополнительные полосы, обусловленные колебаниями связей C—H, C—N, C—C.

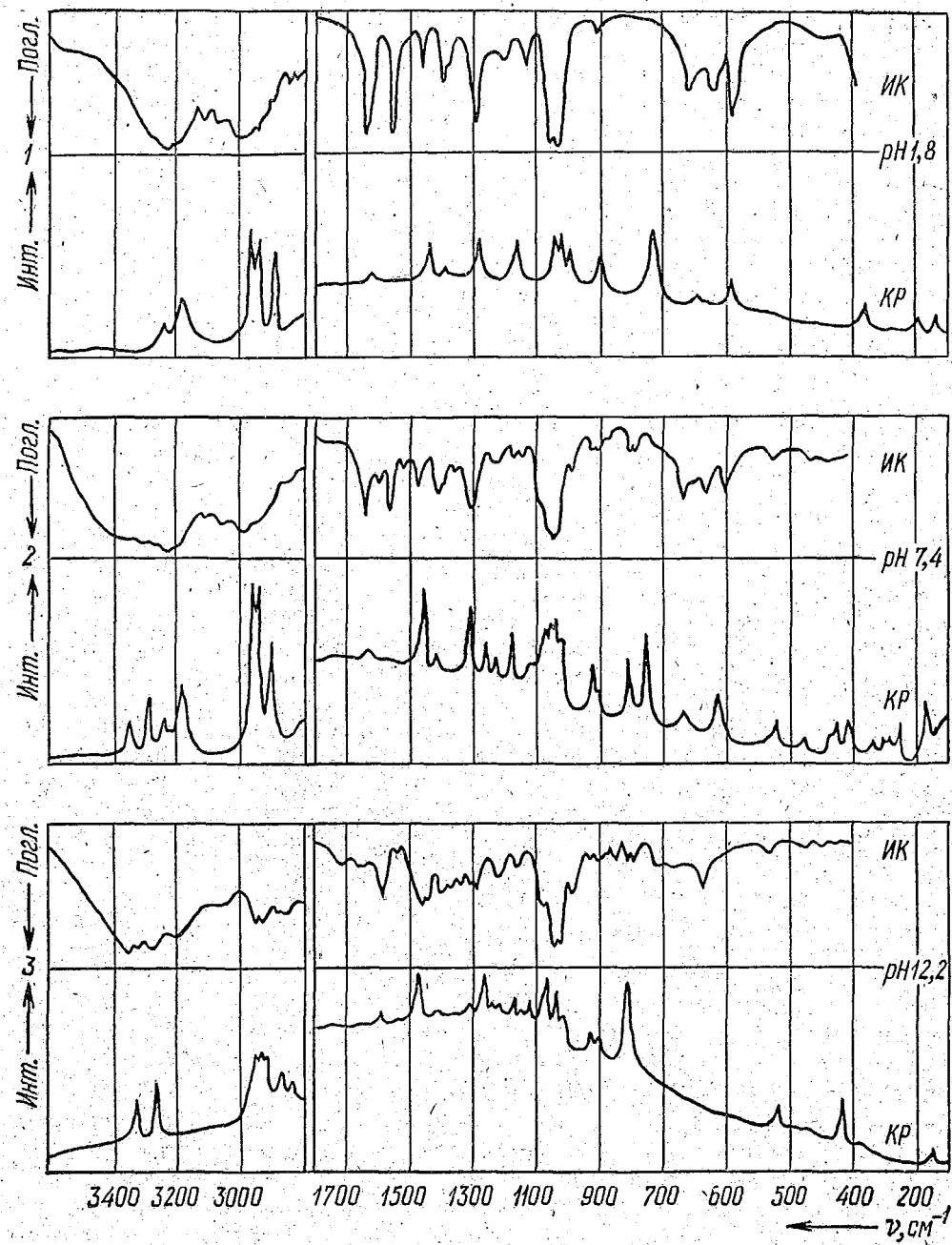
Амид A принадлежит валентному колебанию N—H-групп, связанных водородной связью, амид B — резонансу Ферми этого колебания с обертоном колебания амид II. Этим колебаниям присущи в ИК-спектре полосы соответственно при 3300 см⁻¹ и 3100 см⁻¹. Полоса амид I (1620—1660 см⁻¹) относится в основном к валентному колебанию карбонильных связей пептидных групп — ν(C=O). Полоса амид II (1520—1590 см⁻¹) обусловлена валентным колебанием C—N связей и деформационным N—H с преобладанием последнего. Полоса амид III (1200—1300 см⁻¹) — валентными C—C, C=O, C—N и деформационными N—H колебаниями. Полосы амид IV—VII (область более низких частот) обусловлены еще более смешанными колебаниями и поэтому их интерпретация часто затруднена.

Для белков и полипептидов в твердом состоянии ν(C=O) по расчетам Кримма [7] составляет 1658 см⁻¹. Полоса с этой частотой наблюдается только для неупорядоченных конформаций. Для упорядоченных конформаций эта частота из-за взаимодействия между соседними пептидными группами расщепляется на несколько составляющих с различными частотами и интенсивностями [8, 9]. Для антипараллельной структуры складчатого слоя (β -структур) наиболее интенсивная составляющая наблюдается около 1632 см⁻¹, а более слабая около 1685 см⁻¹. Для α -спирали характерны сильная полоса при 1650 см⁻¹ и более слабая при 1646 см⁻¹. Эти смещения обусловлены в основном изменением геометрии и вторичной структуры молекулы. В спектрах полипептидов и белков с упорядоченной структурой полосы амид II и III также могут расщепляться и смещаться подобно полосе амид I. Колебания амид I и II чувствительны к конформационным изменениям.

Среди низкочастотных колебаний для структурных исследований информативно колебание амид V (600—700 см⁻¹), включающее неплоское деформационное N—H связей пептидных групп, существенно зависящее от конформации основной цепи. В случае α -спирали ему соответствует полоса вблизи 600 см⁻¹, полоса при 650 см⁻¹ характерна для неупорядоченной конформации и при ~ 700 см⁻¹ — для антипараллельного складчатого слоя.

Таким образом, методом колебательной спектроскопии можно воспользоваться при изучении динамики молекул сложных систем и их конформаций. Правда, частоты, наблюдаемые в спектрах препаратов белка, не всегда проявляются четко в силу присутствия одновременно в одной молекуле белка участков различной структурной упорядоченности.

Как видно из рисунка, спектры твердой фазы тромбина существенно отличаются в зависимости от pH. При переходе от нейтральных значений pH к крайним (кислым и щелочным) возможны структурные перестройки белка. Значительные изменения интенсивностей и положений полос в области 900—1100 см⁻¹ возможного проявления валентных колебаний C—C и C—N связей цепи [6] позволяют предположить, что в молекуле тромбина при этих условиях имеют место денатурационные перестройки, приводящие к изменению пространственной организации полипептидных цепей.



Колебательные спектры твердой фазы тромбина, полученного из растворов с различными рН в результате лиофильной сушки:
1 — рН 1,8; 2 — рН 7,4; 3 — рН 12,2

Из сопоставления ИК- и КР-спектров следует, что колебания СОНГ-групп полипептидных цепей четко проявляются в ИК-спектрах полосами амид A (3200 см^{-1}), амид B (3050 см^{-1}), амид I (1630 см^{-1}), амид II ($1550—1560 \text{ см}^{-1}$), амид III (1300 см^{-1}), амид V ($600—700 \text{ см}^{-1}$). В КР-спектрах аналогичные полосы слабы либо вовсе не проявляются (амид A, B). Следует отметить необычайно низкую интенсивность полосы амид I в КР-спектрах 1 и 2 тромбина по сравнению с другими белка-

ми [5]. Резкое отличие спектров 1 и 3 свидетельствует о значительных конформационных изменениях молекул тромбина в кислой и щелочной областях. Спектр 2 является отражением промежуточной структуры между этими крайними формами. Действительно, в нем содержатся полосы, характерные для спектров 1 и 3. Положение полос амид II (1554 см^{-1}) и V (600 см^{-1}) в ИК-спектре 1 позволяет допустить наличие α -спиралей в молекулах тромбина, хотя положение полосы амид I (1630 см^{-1}) не совсем соответствует такой интерпретации. Правда, полоса амид I в спектрах КР наблюдалась при такой же низкой частоте для полипептидов, содержащих α -спирали [10]. Полоса амид III в КР-спектре панкреатического ингибитора трипсина, принадлежащая α -спирали, проявляется при 1289 см^{-1} [11]. В КР-спектрах 1 и 2 тромбина она обнаруживается при 1300 см^{-1} , что является дополнительным подтверждением возможного наличия α -структур в молекуле тромбина. Обнаружение в этих спектрах полос амид V, характерных для антипараллельного β -складчатого слоя (670 см^{-1}) и неупорядоченной конформации (640 см^{-1}), указывает на возможное присутствие фрагментов всех трех конформаций в молекулах тромбина (полосы значительно слабее по интенсивности в спектре 2).

В спектре 3 не наблюдается полос, характеризующих упорядоченные участки молекул тромбина. В ИК-спектре в низкочастотной области остается лишь полоса 640 см^{-1} , а вместо полос 1630 см^{-1} и 1554 см^{-1} появляется сравнительно широкая полоса при 1590 см^{-1} (слабая полоса с той же частотой имеется и в КР-спектре). Полоса 1300 см^{-1} заменяется полосой при 1260 см^{-1} , а полоса 765 см^{-1} — полосой при 800 см^{-1} (КР-спектр).

Сильная зависимость спектров тромбина от pH проявляется в области 3000 — 3600 см^{-1} . В ИК-спектре 3 наряду с полосами валентных колебаний N—H-связей пептидных групп цепи (амид A, B) наблюдаются сравнительно узкие интенсивные полосы 3293 , 3355 см^{-1} и полосы 3288 , 3343 см^{-1} в КР-спектре. Положение, форма и соотношение интенсивностей этих полос позволяют отнести их к симметричным и антисимметричным валентным колебаниям связанных NH₂-групп. Как и следовало ожидать, полосы симметричных колебаний более интенсивны в КР-спектрах, а антисимметричных — в ИК-спектрах. Полосу при 3335 см^{-1} в ИК-спектре, вероятно, можно приписать валентному колебанию NH-групп аминокислотных остатков. В спектре 2 наряду с этими полосами появляются более широкие полосы, соответствующие валентным колебаниям ионизированных аминогрупп. Сильная и широкая полоса в области 3000 см^{-1} обусловлена валентными колебаниями NH₃⁺-групп, а полосы при 3115 , 3240 см^{-1} (ИК) и 3188 , 3235 см^{-1} (КР) — NH₂⁺-группам. В КР-спектре 1 остаются лишь полосы ионизированных групп.

Наблюдаемые различия в спектрах тромбина, соответствующих нейтральным, кислым и щелочным значениям pH, позволяют допустить существование различных структурных состояний молекул тромбина, проявляющихся в виде двух «спектральных форм» 1 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

- Чулкова Г. М., Орехович В. Н.—«Биология», 1973, 38, вып. 3, 461.
- Чиргадзе Ю. Н. Инфракрасные спектры и структура полипептидов и белков. М., 1965.
- Эlliott A. Инфракрасные спектры и структура полимеров. М., 1972.
- Структура и стабильность биологических макромолекул. Пер. с англ. Под ред. член-корр. АН СССР М. В. Волькенштейна. М., 1973, гл. 5.
- Кёниг Л. Л.—«Успехи химии», 1975, 44, вып. 8, 1475.
- Кёниг Л. Л. Там же, вып. 6, 1109.
- Krimm S.—«J. Molec. Biol.», 1962, 4, 528.
- Miyazawa T.—«J. Chem. Phys.», 1960, 32, 1647.

9. Miyazawa T., Blout E. R.— «J. Amer. Chem. Soc.», 1961, 83, 712.
 10. Lenormant H., Baudras A., Blout E. R.— «J. Amer. Chem. Soc.», 1958,
 80, 6191.
 11. Вруппер H., Holz M.— «Bioch et Biophys. Acta», 1975, 379, 408.

Поступила в редакцию
1/XI 1977 г.

Кафедра биофизики

УДК 621.372

А. Г. БУДАЙ, Г. П. ЛИЧКО

О ПРИМЕНЕНИИ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ СОКРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ РАСЧЕТА АНТЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Использование результатов измерений амплитудно-фазового распределения (АФР) антенн в ближней зоне для расчета диаграмм направленности (ДН) антенн [1] и для локализации дефектов антенной системы [2] предполагает малый уровень ошибки дискретизации. Это достигается измерением АФР с малым шагом выборок, что приводит к избыточности данных, необходимых для расчета. Предлагаемая работа посвящена нахождению условий, при которых для уменьшения избыточности целесообразно использовать цифровые фильтры с ограниченным импульсным откликом. При расчете диаграмм направленности и локализации дефектов антенных систем основным является алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), поэтому критерием служит отношение времени, необходимого для осуществления БПФ исходного двумерного массива и для проведения обработки с применением фильтрации.

В зависимости от величины исходного массива выделяются три случая.

1. Массив исходных данных $N_{ii} = n \cdot m$ не превышает объема оперативного запоминающего устройства (ОЗУ) ЭВМ. Здесь время T_{ii} , необходимое для проведения двумерного БПФ:

$$T_{ii} = T_{tr_1} + 2N_{ii}(T_+ + T_*) \log_2 N_{ii}, \quad (1)$$

где T_+ , T_* — время единичного сложения и умножения соответственно; T_{tr_1} — время, необходимое для транспонирования массива исходных данных.

Предположим, что для фильтрации используется фильтр с длиной импульсного отклика N_Φ , соответствующий двумерный фильтр реализуется с помощью метода проекций [3] и частотная характеристика фильтра позволяет сократить исходные данные в j раз, тогда

$$T_{if} = N_\Phi \cdot N_{ii} (T_+ + T_*) + \frac{2N_{ii}}{j} (T_+ + T_*) \log_2 \frac{N_{ii}}{j} + T_{tr_2}, \quad (2)$$

где T_{tr_2} — время, необходимое для транспонирования массива данных после фильтрации.

Выражая выбранный критерий в виде $K = \frac{T_{ii}}{T_{if}}$ и пренебрегая T_{tr_2} и T_{tr_1} , малыми в данном случае, из (1) и (2) получаем:

$$K = \frac{2j \cdot \log_2 N_{ii}}{jN_\Phi + 2 \log_2 \left(\frac{N_{ii}}{j} \right)}, \quad (3)$$

2. Массив исходных данных превышает объема ОЗУ до фильтрации и после нее.

Предполагая использование в этом случае запоминающего устройства с прямым доступом (накопитель на магнитных дисках), обеспечивающего наибольшее быстродействие после ОЗУ, в (1) и (2) необходимо

димо учитывать $T_{\text{тр}_1}$ и $T_{\text{тр}_2}$. При размещении одной записи, содержащей строку исходных данных, на одной дорожке диска имеем:

$$T_{\text{тр}_1} = \frac{2 \cdot N_{\text{и}} \cdot V}{W} (n + 1) + N_{\text{и}} T_{\text{и}}, \quad (4)$$

$$T_{\text{тр}_2} = \frac{2 \cdot N_{\text{и}} \cdot V}{j \cdot W} \left(\frac{n}{j} + 1 \right) + \frac{N_{\text{и}}}{j} T_{\text{и}}, \quad (5)$$

где V — длина слова, байт; W — скорость обмена информацией с ОЗУ; $T_{\text{и}}$ — время поиска записи.

С учетом времени записи на диск исходных данных и их последующей обработки получим без фильтрации

$$T_{\text{и}} = m \cdot T_{\text{и}} + \frac{N_{\text{и}} V}{W} + 2N_{\text{и}} (T_{+} + T_{*}) \log_2 N_{\text{и}} + T_{\text{тр}_1}, \quad (6)$$

а при использовании фильтрации

$$T_{\text{и}\Phi} = m \cdot T_{\text{и}} + \frac{2N_{\text{и}}}{j} (T_{+} + T_{*}) \log_2 \left(\frac{N_{\text{и}}}{j} \right) + N_{\Phi} (T_{+} + T_{*}) + T_{\text{тр}_2}. \quad (7)$$

Используемый в качестве критерия коэффициент

$$K = \frac{\frac{N_{\text{и}} \cdot V}{W} + m \cdot T_{\text{и}} + 2N_{\text{и}} (T_{+} + T_{*}) \log_2 N_{\text{и}} + T_{\text{тр}_1}}{\frac{N_{\text{и}} \cdot V}{j \cdot W} + N_{\Phi} (T_{+} + T_{*}) + \frac{2N_{\text{и}}}{j} (T_{+} + T_{*}) \log_2 \left(\frac{N_{\text{и}}}{j} \right) + m \cdot T_{\text{и}} + T_{\text{тр}_2}}. \quad (8)$$

3. Массив исходных данных меньше объема ОЗУ только после фильтрации.

Используя (6) и (7), получаем

$$K = \frac{\frac{N_{\text{и}} \cdot V}{W} + m \cdot T_{\text{и}} + 2N_{\text{и}} (T_{+} + T_{*}) \log_2 N_{\text{и}} + T_{\text{тр}_1}}{N_{\Phi} (T_{+} + T_{*}) + \frac{2N_{\text{и}}}{j} (T_{+} + T_{*}) \log_2 \left(\frac{N_{\text{и}}}{j} \right)}. \quad (9)$$

При обработке массивов, превышающих объем ОЗУ, значительную часть времени занимает транспонирование матриц, поэтому была исследована зависимость K от степени уменьшения времени транспонирования p при использовании быстрых алгоритмов, например, алгоритма, предложенного в [4].

На рис. 1, 2 приведены зависимости, рассчитанные в соответствии с формулами (3), (8), (9) для ЭВМ ЕС1020. Из полученных результатов можно прийти к следующим выводам.

При размещении исходного массива в ОЗУ ЭВМ применение фильтрации дает выигрыш во времени вычислений, т. е. $K \geq 1$ только для $N_{\Phi} \leq 20$ и $j \geq 2$.

Использование фильтрации в случаях 2 и 3 дает значительное сокращение времени почти во всех режимах обработки.

Наиболее оптимальным для применения фильтрации является случай 3.

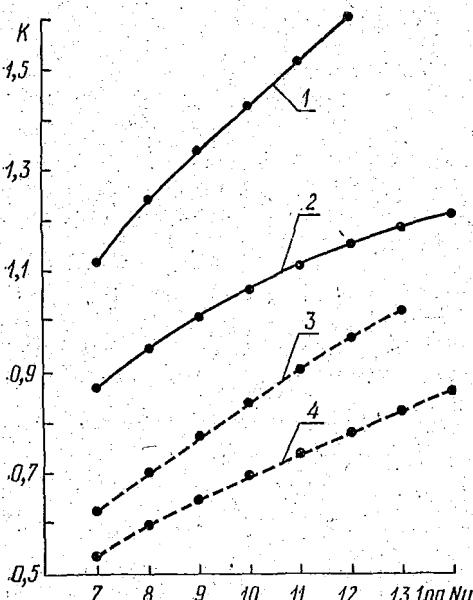


Рис. 1. Зависимость K от величины исходного массива:

1 — $j = 4$, $N_{\Phi} = 10$; 2 — $j = 2$, $N_{\Phi} = 10$;
3 — $j = 4$, $N_{\Phi} = 20$; 4 — $j = 2$, $N_{\Phi} = 20$.

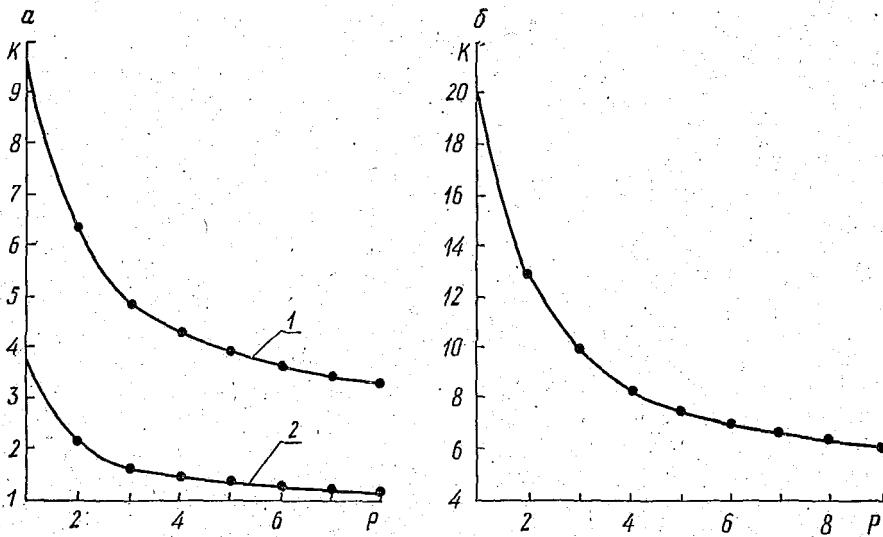


Рис. 2. Зависимость К от степени сокращения времени транспортирования:
а — случай 2: $N_{ii} = 65536$; $N_{\Phi} = 20$, $m = 256$, $1 - j = 4$, $2 - j = 2$; б — случай 3:
 $N_{ii} = 16384$, $N_{\Phi} = 20$, $j = 2$

Использование алгоритмов быстрого транспортирования уменьшает K до определенного предела, большего 1.

Таким образом, получены аналитические соотношения, позволяющие оценить степень сокращения времени вычисления антенных характеристик при использовании цифровой фильтрации в зависимости от объема исходных данных, характеристик цифровых фильтров и способов обработки и найти условия, при которых целесообразно применение фильтров с ограниченным импульсным откликом для сокращения избыточности данных измерений АФР антенн.

ЛИТЕРАТУРА

- Джонсон и др.— «ТИИЭР», 1973, 61, № 12, 5.
- Рэнсом, Миттра.— «ТИИЭР», 1971, 59, № 6, 212.
- Mersereau R. M., Dodgeon D. E.— «IEEE Trans. Acoust. speech, signal proc.», 1974, ASSP-22, 5, 320.
- Eklundh J. O.— «IEEE Trans. Computers», 1972, C-21, 7, 801.

Поступила в редакцию
4/XI 1977 г.

НИИ ПФП

УДК 541.141

И. Г. БЫКОВА, О. В. БУТРИМОВИЧ, Л. А. ИСАЧЕНКОВА,
В. А. РЯБЦЕВА, А. М. САРЖЕВСКИЙ

РОЛЬ ФОТОХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ПРОЦЕССЕ ТУШЕНИЯ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ РАСТВОРОВ 1, 3 5-ТРИФЕНИЛПИРАЗОЛИНА ГАЛОИДЗАМЕЩЕННЫМИ МЕТАНА

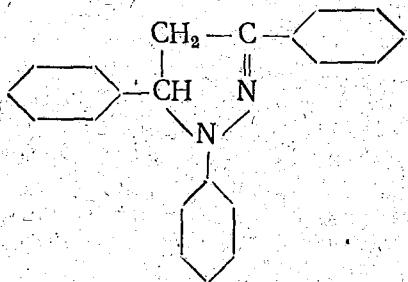
Известно [1—5], что четыреххлористый углерод (CCl_4), хлороформ ($CHCl_3$) и другие галоидзамещенные метана являются весьма распространенными тушителями флуоресценции, причем относительно ме-

низма тушения для различных классов соединений существуют разные точки зрения.

Тушение флуоресценции некоторых ароматических аминов [1], бензола, ксиола [2], антрацена [3] галоидзамещенными метанами связывается с образованием комплекса с переносом заряда между молекулами флуоресцирующего вещества и тушителя, в котором последний играет роль акцептора электронов.

В случае N-терфенила [4], N-этил- и N-винилкарбазола [5] тушение флуоресценции галоидсодержащими углеводородами объясняется диффузионным механизмом. При этом флуоресцирующая молекула из синглетного возбужденного состояния в результате столкновения с молекулой тушителя может перейти либо в основное синглетное, либо в возбужденное триплетное состояние, либо претерпеть химическое изменение. Два последних процесса являются весьма вероятными путями дезактивации энергии возбуждения при использовании в качестве тушителя галоидзамещенных метана. Для некоторых соединений [6] интеркомбинационные переходы усиливаются при столкновениях с молекулами, содержащими тяжелые атомы. С другой стороны, в ряде работ [1, 5, 7—9] указывается на фотохимическую нестабильность растворов некоторых соединений в присутствии CCl_4 , CHCl_3 и других галоидзамещенных метана.

Исследования спектров флуоресценции растворов 1, 3, 5-трифенилпиразолина (ТФП) со структурной формулой молекулы



показали, что флуоресценция в них тушится при добавлении галоидзамещенных метана. Кроме того, эти растворы подвергаются фотохимическим превращениям при действии на них света. Представляло интерес исследовать механизм тушения ТФП и выяснить роль фотохимической реакции в процессе тушения.

В качестве тушителя флуоресценции использовались следующие галоидзамещенные метаны: CCl_4 , CHCl_3 , CH_2Cl_2 , CBr_4 , CHBr_3 , CH_2Br_2 , из которых только CBr_4 представляет собой твердое вещество, остальные являются жидкостями. Все используемые в работе растворители и жидкие галоидметаны подвергались тщательной очистке. Спектры поглощения растворов с концентрацией ТФП $6 \cdot 10^{-2}$ моль/м³ записывались на двухлучевом автоматическом спектрофотометре Specord UV VIS, спектры флуоресценции — на обычной фотоэлектрической установке. При записи спектров поглощения и люминесценции возбуждающий свет не оказывал существенного влияния на исследуемые растворы, так как при неоднократном повторении записи их спектры практически не изменялись. При исследовании фотохимических реакций освещение растворов производилось ртутной лампой ДРШ-500 через фильтр УФС-3, область пропускания которого совпадает с положением длинноволновой полосы поглощения ТФП. Число падающих на раствор квантов энергии измерялось с помощью ферриоксалатного актинометра. Обескислороживание растворов проводилось неоднократной откачкой замороженных растворов.

При исследовании тушения флуоресценции ТФП отношение B_0/B квантового выхода непотушенного раствора B_0 к потушенному B опреде-

лялось по отношению интенсивностей флуоресценции I_0/I в максимуме полосы флуоресценции, так как в области тех значений концентраций галоидзамещенных метана, при которых исследовалось тушение, спектры поглощения практически не изменялись, а в спектрах флуоресценции наблюдалось лишь падение интенсивности.

На рис. 1 представлены графические зависимости B_0/B для этанольного раствора ТФП при $\lambda_{\text{возб}} = 365$ нм от концентрации CBr_4 , CCl_4 , CHBr_3 , CH_2Br_2 . Как следует из рис. 1, тушение флуоресценции растворов ТФП галоидзамещенными метанами вплоть до концентрации $1,5 \cdot 10^2$ моль/м³ вполне удовлетворительно описывается линейным законом, т. е. тушение подчиняется уравнению Штерна — Фольмера [10]:

$$\frac{B_0}{B} = 1 + K(C), \quad (1)$$

где C — концентрация тушителя; K — константа тушения Штерна — Фольмера:

$$K = K_c \cdot \tau_0. \quad (2)$$

Здесь K_c — константа скорости тушения; τ_0 — значение длительности возбужденного состояния молекул ТФП в отсутствии тушителя.

Как известно, тушение флуоресценций подчиняется уравнению Штерна — Фольмера в двух случаях: когда оно обусловлено столкновением флуоресцирующей молекулы в возбужденном состоянии с молекулами тушителя, т. е. протекает по диффузионному механизму, а также если тушитель сам по себе не тушит возбужденные состояния молекулы, но образует с ней слабый нефлуоресцирующий комплекс в основном состоянии, существование которого может проявляться в спектре поглощения [10, 11].

В первом случае должно наблюдаться падение длительности возбужденного состояния τ молекул ТФП. Образование слабого комплекса тушитель — флуоресцирующая молекула в основном состоянии не должно вызывать изменений τ [10, 11]. Измерение длительности возбужденного состояния растворов ТФП показало (рис. 2), что τ падает с увеличением в растворе концентрации CCl_4 , CBr_4 , CHBr_3 (кривые 1, 2, 3). Это указывает на то, что основным механизмом тушения в данном случае,

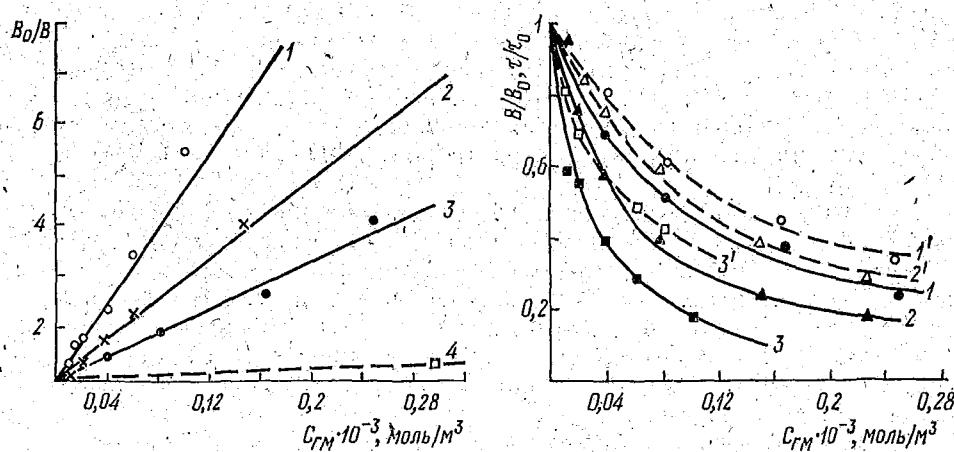


Рис. 1. Зависимость B_0/B этанольного раствора ТФП от концентрации CBr_4 (1); CHBr_3 (2); CCl_4 (3); CH_2Br_2 (4); ($\text{CCH}_2\text{Br}_2 = C_{\text{TFP}} \cdot 10^3$ моль/м³)

Рис. 2. Зависимость относительного квантового выхода B/B_0 (1, 2, 3) и длительности возбужденного состояния τ/τ_0 (1', 2', 3') этанольного раствора ТФП от концентрации CCl_4 , CHBr_3 , CBr_4

Таблица 1

Константы тушения флуоресценции K и квантовые выходы реакции Φ этанольных растворов ТФП ($C = 6 \cdot 10^{-2}$ моль/м³) с различными галоидзамещенными метана

Галоидзамещенные метана	$K \cdot 10^{-2}$, моль/м ³	Φ		
		$C_{\text{ГМ}} = 0,4 \cdot 10^2$ моль/м ³	$C_{\text{ГМ}} = 2,5 \cdot 10^2$ моль/м ³	$C_{\text{ГМ}} = 40 \cdot 10^2$ моль/м ³
CBr_4	36	0,320		
CHBr_3	19	0,190		
CCl_4	11	0,080	0,200	
CH_2Br_2	0,07		0,022	
CHCl_3	не тушит		0,001	0,020
CH_2Cl_2	не тушит			0,0013

по всей вероятности, является диффузионный, т. е. основное тушение происходит вследствие столкновения возбужденной молекулы ТФП с молекулой тушителя. Тушение флуоресценции ТФП за счет образования нефлуоресцирующего слабого комплекса с тушителем в основном состояния, если и присутствует, то играет незначительную роль.

Из рис. 2 видно, что падение длительности возбужденного состояния происходит несколько медленнее, чем падение квантового выхода флуоресценции ТФП, что обычно наблюдается при тушении флуоресценции посторонними, непоглощающими веществами. В рамках строгой диффузионной теории тушения эта непропорциональность в падении B и τ связывается с отклонением закона затухания потушенных растворов от экспоненциального [12].

На основании полученных данных по уравнению (1) рассчитаны константы тушения K флуоресценции растворов ТФП галоидзамещенными метана (табл. 1), а также константы скорости реакции K по уравнению (2) и измеренному значению длительности возбужденного состояния молекул непотушенного этанольного раствора ТФП $\tau_0 = 5,0 \cdot 10^{-9}$ с. Для тушения CBr_4 , CHBr_3 , CCl_4 они равны соответственно $7,4 \cdot 10^9$, $4,0 \cdot 10^9$ и $2,1 \cdot 10^9$ моль⁻¹·с⁻¹, что по порядку величины совпадает с бимолекулярной константой скорости процесса, контролируемого диффузией, равной $5,4 \cdot 10^9$ (моль⁻¹·с⁻¹) при 20° С [10] в этаноле. Наблюданное совпадение, по-видимому, подтверждает предположение о диффузионном механизме тушения флуоресценции растворов ТФП в присутствии CCl_4 , CHBr_3 , CBr_4 .

Как указывалось, растворы ТФП, содержащие галоидзамещенные метана, фотохимически нестабильны. Сопоставляя данные по тушению флуоресценции с кинетическими данными фотохимической реакции, можно сделать некоторые предположения о природе фотохимической реакции, в частности, установить, через какое возбужденное состояние молекулы ТФП, синглетное или триплетное, протекает реакция. Кроме того, если реакция идет через синглетное состояние, можно оценить ее вклад в тушение флуоресценции.

Фотохимическая нестабильность растворов ТФП проявляется в существенном изменении их спектров поглощения в присутствии CCl_4 и других галоидзамещенных метана при действии на растворы света. На рис. 3 показаны изменения спектров поглощения этанольных растворов ТФП с концентрацией $\text{CCl}_4 2,5 \cdot 10^2$ моль/м³ в зависимости от времени облучения растворов УФ-светом. Все кривые поглощения сохраняют изобестиическую точку. Наличие этой точки указывает на образование в ходе реак-

ций преимущественно одного устойчивого продукта [13], максимум поглощения которого сильно сдвинут в коротковолновую область по отношению к спектру ТФП. По изменению оптической плотности в области длинноволновой полосы поглощения можно контролировать изменение концентрации реагирующих молекул в растворе и рассчитать квантовый выход расходования ТФП в ходе реакции. Расчет квантового выхода реакции ограничивался ее начальным этапом, когда изменение оптической плотности раствора составляло не более 5% первоначального значения, что позволило пренебречь поглощением нового образующегося продукта в исследуемой области. Кроме того, в этом случае с достаточным приближением можно считать, что оптическая плотность меняется линейно со временем, и для расчета числа поглощенных квантов использовать приближенную формулу. В табл. 1 приведены рассчитанные квантовые выходы фотохимической реакции ТФП в этаноле, содержащем различные галоидзамещенные метана. Квантовый выход реакции увеличивается при переходе от хлорзамещенных к соответствующим бромзамещенным метана, а в ряду галоидзамещенных — по мере увеличения количества атомов галоида в молекуле.

Провести реакцию при одинаковой молярной концентрации хлор- и бромзамещенных метана не представлялось возможным, так как квантовый выход реакции, наблюдаемой с CH_2Cl_2 в качестве галоидсодержащей добавки, более чем на два порядка меньше квантового выхода реакции с CBr_4 . Это определяет предел минимально возможных значений концентраций CH_2Cl_2 и CHCl_3 . С другой стороны, использованию больших количеств галоидзамещенных метана препятствовало поглощение CBr_4 и CHBr_3 . Концентрация галоидзамещенных метана подбиралась такой, чтобы они практически не поглощали в области длинноволновой полосы поглощения ТФП.

Как следует из табл. 1, константы тушения флуоресценции изменяются параллельно квантовым выходам реакции, т. е., чем выше квантовый выход реакции при переходе от одного галоидзамещенного метана к другому, тем больше константа тушения флуоресценции. Если квантовый выход реакции пренебрежимо мал, флуоресценция растворов ТФП практически не тушится.

Такая зависимость, очевидно, будет иметь место в том случае, когда фотохимическая реакция протекает через то же синглетное возбужден-

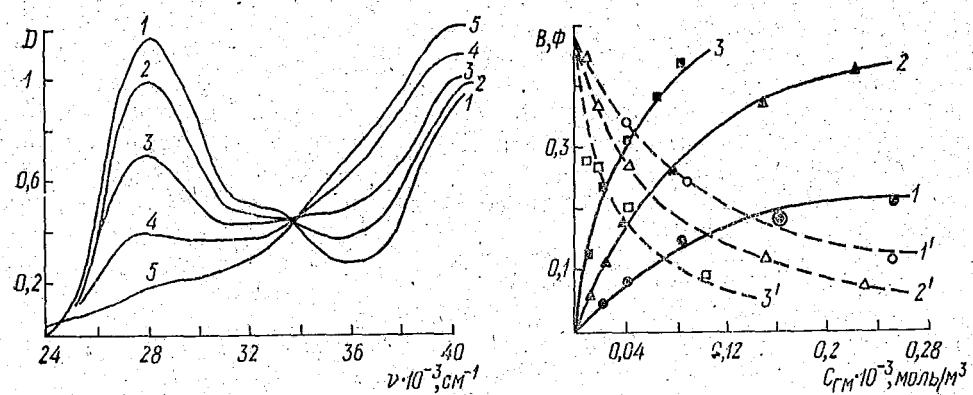


Рис. 3. Спектры поглощения этанольного раствора ТФП с $2,5 \cdot 10^2 \text{ моль}/\text{м}^3 \text{CCl}_4$ в зависимости от времени облучения:

$1 - t = 0 \text{ с}; 2 - 15; 3 - 45; 4 - 95 \text{ и } 5 - t = 200 \text{ с}$.

Рис. 4. Зависимость квантового выхода реакции Φ (1, 2, 3) и квантового выхода флуоресценции B ($1'$, $2'$, $3'$) этанольного раствора ТФП от концентрации CCl_4 , CHBr_3 , CBr_4

Таблица 2

Квантовый выход обескислорожденных Φ_0
и необескислорожденных Φ этанольных растворов ТФП
($C = 6 \cdot 10^{-2}$ моль/м³) с различными галоидметанами

Галоидметан	Концентрация, моль/м ³	Φ	Φ_0
CCl ₄	30	0,06	0,03
CCl ₄	100	0,15	0,08
CCl ₄	250	0,20	0,12
CHBr ₃	52	0,24	0,14
CBr ₄	26	0,27	0,14

ное состояние, что и флуоресценция и приводит, следовательно, к тушению флуоресценции, или когда реакция идет через триплетное возбужденное состояние, а тушение флуоресценции обусловлено переводом молекул из синглетного возбужденного состояния в триплетное вследствие столкновений возбужденных молекул ТФП с молекулами галоидзамещенных метана. Как показали исследования, в данном случае наиболее вероятным является первое предположение. Действительно, тетрахлорэтилен содержит четыре атома хлора в молекуле, как и CCl₄, однако, в отличие от последнего, он практически не тушит флуоресценцию растворов ТФП. Более того, бром- и дигромбензол также не вызывают заметного тушения, что, по-видимому, исключает существенную роль влияния тяжелого атома в процессе дезактивации энергии синглетного возбужденного состояния молекул ТФП галоидсодержащими метанами. С другой стороны, использование CS₂, механизм тушения флуоресценции которого связан с переводом молекул из синглетного состояния в триплетное [13], тушит флуоресценцию растворов ТФП, однако, не ускоряет, а, наоборот, несколько замедляет исследуемую фотохимическую реакцию, что, по всей вероятности, указывает на невозможность протекания реакции исключительно через триплетное состояние. Исследование обескислорожденных растворов показало, что при этом квантовый выход реакции несколько уменьшается (табл. 2). Если бы реакция протекала через триплетное состояние, то эффект, по-видимому, был бы более значительным и противоположным, так как кислород является эффективным тушителем триплетного состояния [10].

Дополнительным подтверждением того, что реакция в основном проходит через синглетное возбужденное состояние, является существование зависимостей выхода реакций и квантового выхода флуоресценций растворов ТФП от концентрации галоидсодержащей добавки. На рис. 4 представлены указанные зависимости для этанольных растворов ТФП при изменении концентрации CCl₄, CHBr₃, CBr₄. С увеличением концентрации галоидзамещенных метана возрастает квантовый выход и уменьшается интенсивность флуоресценции. Более того, сумма квантовых выходов флуоресценции B и реакции Φ для различных концентраций CHBr₃ и CBr₄ меняется очень слабо, и в пределах погрешности эксперимента совпадает со значением квантового выхода флуоресценции непотушенного этанольного раствора ТФП $B_0=0,48$ [14]. Такой параллелизм в изменении квантового выхода реакции и флуоресценции будет наблюдаться, по-видимому, лишь в том случае, когда реакция протекает через синглетное возбужденное состояние и является основным путем дезактивации энергии возбуждения молекул, приводящих к тушению флуоресценций.

Таким образом, тушение флуоресценции растворов ТФП, содержащих галоидзамещенные метаны, обусловлено преимущественно фотохимической реакцией, протекающей через синглетное возбужденное состояние по диффузионному механизму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Meyer W. C.— «J. Phys. Chem.», 1970, 74, № 10, 2118.
2. David Saper Stein— «J. Chem. Phys.», 1975, 62, № 9, 3560.
3. Colin Lewis, William R. Ware— «Chem. Phys. Lett.», 1972, 15, № 2, 290.
4. Килин С. Ф. и др.— «Опт. и спектр.», 1961, 11, вып. 3, 390.
5. Shigeo Tazuke— «J. Phys. Chem.», 1970, 74, № 11, 2390.
6. Medinger T., Wilkinson F.— «Trans. Faraday Soc.», 1965, 61, 620.
7. Stevenson D. P., Coppinger J. M.— «J. Amer. Chem. Soc.», 1962, 84, № 3, 149.
8. Fitzgerald E. A. et al.— «J. Phys. Chem.», 1971, 75, № 13, 2737.
9. Bowen E. J., Miss Pohatgi K. K.— «Disc. Faraday Soc.», 1953, 14, 146.
10. Паркер С. Фотолюминесценция растворов. М., 1972.
11. Гуринович Г. П., Севченко А. Н., Соловьев К. Н. Спектроскопия хлорофилла и родственных соединений, Минск, 1968.
12. Свешников Б. Я.— «Успехи физических наук», 1961, 75, в. 2, 287.
13. Bowen E. J.— «Disc. Faraday Soc.», 1953, 14, 143.
14. Керимбеков А. В. и др.— В сб.: Люминесцентные материалы и особо чистые вещества, 4, Ставрополь, 1970, 115.

Поступила в редакцию
16/XII 1977 г.

Кафедра общей физики

УДК 577.3

В. И. КРОТ, А. С. ЕГОРОВ, Л. Н. НЕОКЛАДНОВА,
Л. А. ИЛЬЮКЕВИЧ, Р. М. ОРИШЕВА,
Д. С. УМРЕЙКО, И. В. ЛИПНИЦКИЙ

О МЕХАНИЗМАХ АНТИОПУХОЛЕВОГО ДЕЙСТВИЯ НЕКОТОРЫХ КОМПЛЕКСОВ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ

Анализ результатов работ по изучению антиопухолевого действия комплексов переходных металлов на биологические объекты приводит к заключению о существенном влиянии этих соединений на клеточный метаболизм: изменяются структура и свойства мембран, ингибируется синтез ДНК; модифицируются белки и полипептиды [1—3], нарушается первичная и вторичная структура ДНК [4—6]. В то же время можно предположить, что остановка пролиферации при взаимодействии комплексов переходных металлов с внутриядерными структурами клетки может быть обусловлена и глубокими изменениями свойств хроматина, связанными с уменьшением числа дерепрессированных структурных генов, что напоминает процессы, происходящие в нормальных условиях в онтогенезе [7]. В опухолевых клетках вследствие фосфорилирования, ацетилирования и метилирования белков может нарушаться связь гистонов между собой и с ДНК, а также взаимодействие молекул ДНП хроматина и, следовательно, кроме качественного и количественного изменения белков, а также изменения содержания ДНК в этих клетках (анеу-, гетеро- и полиплоидия) может изменяться и надмолекулярная структура дезоксирибонуклеопротеидного комплекса в целом [8]. Можно допустить поэтому, что для понимания механизмов антиопухолевого действия указанных комплексов большое значение могут иметь изменения, затрагивающие систему межмолекулярных связей в хроматине опухолевых клеток.

Поскольку речь идет о выяснении принципиальной возможности модификации комплексными соединениями переходных металлов надмолекулярной структуры хроматина, проверку высказанного предположения проводили, используя препараты ДНП, выделенные из зобной железы

**Число узлов в пространственной сетке ДНП
в расчете на одну молекулу в зависимости от концентрации комплекса
переходных металлов в физиологическом растворе**

Комплекс	Концентрация комплекса переходных металлов в физиологическом растворе, моль/л				
	0	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$
$\text{Na}_2\text{PtCl}_6 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	33 ± 8	27 ± 7	215 ± 54	430 ± 107	—
$[\text{CoPy}_4\text{Cl}_2]\text{Cl} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	35 ± 9	30 ± 8	51 ± 13	64 ± 16	187 ± 47

интактных кроликов. Реологические и термомеханические исследования свойств надмолекулярных ДНП-структур в физиологическом растворе, подвергнутых воздействию гексахлороплатината натрия и дихлоротетрапиридинокобальтихлорида (10^{-4} – $5 \cdot 10^{-3}$ моль/л), проведены по методам, представленным в работе [9]. Препараты ДНП выделяли в 0,7 М растворе NaCl . Содержание ДНК и белка в препаратах ДНП определяли по методам Спирина и Лоури, молекулярный вес — вискозиметрически. Изучаемые макроскопические одноосноориентированные (длина ~ 100 мм, диаметр $\sim 0,3$ мм) надмолекулярные структуры ДНП получали в 0,14 М растворе NaCl по методу Д. М. Спитковского путем нанесения раствора ДНП ($\sim 0,025$ мл) на мениск физиологического раствора, находящегося в рабочем цилиндре. Соединения переходных металлов вводили в физиологический раствор до получения в нем ДНП-структур. Деформирование и нагревание исследуемых ДНП-систем проводили в специальных терmostатирующих устройствах. О процессах, происходящих в надмолекулярных ДНП-структурах, судили по изменению вели-

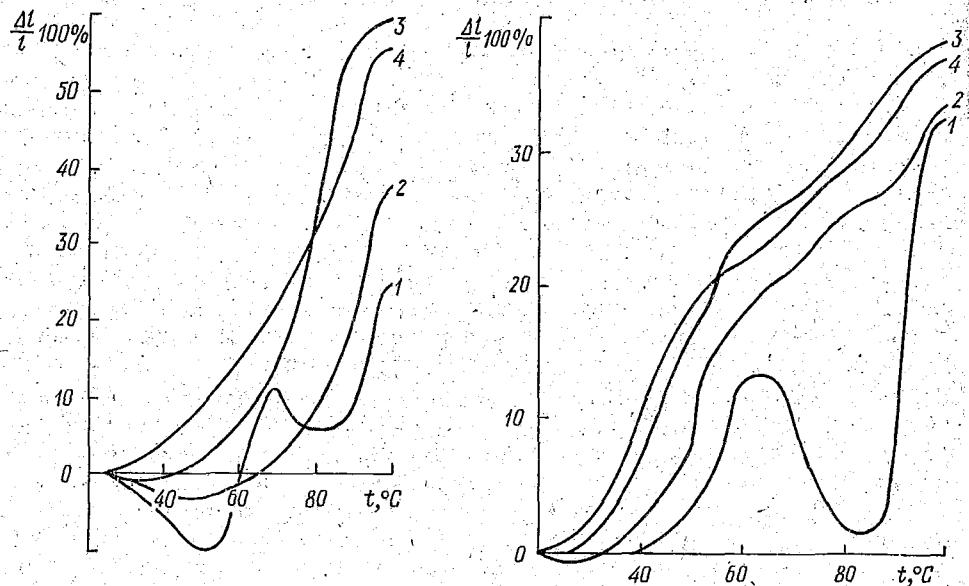


Рис. 1. Кривые плавления надмолекулярных ДНП-структур в физиологическом растворе (1) и растворе, содержащем гексахлороплатинат натрия ($2-5 \cdot 10^{-4}$; $3-5 \cdot 10^{-3}$ моль/л), $C_{\text{ДНП}} = 0,2$ мг/мл; содержание белка — 70%, $M = 2 \cdot 10^7$

Рис. 2. Кривые плавления ДНП-систем в физиологическом растворе (1), содержащем дихлоротетрапиридинокобальтихлорид ($2-5 \cdot 10^{-4}$; $3-10^{-3}$, $4-5 \cdot 10^{-3}$ моль/л). $C_{\text{ДНП}} = 0,3$ мг/мл, содержание белка — 70% $M = 2 \cdot 10^7$

чины релаксации и деформации, а также значения равновесного модуляя высокомодульной деформации, температуры плавления и ширины температурного интервала плавления.

Было обнаружено, что при наличии в физиологическом растворе указанных соединений резко возрастает число узлов (увеличивается значение модуля высокомодульной деформации) в пространственной сетке, образованной молекулами ДНП (см. таблицу). Кроме того, наблюдается изменение профиля кривых плавления надмолекулярных ДНП-структур, по-видимому, связанное с изменением взаимодействия ДНК-белок и ДНП-ДНП (рис. 1, 2).

Такое действие использованных соединений, по-видимому, связано с их способностью вступать в реакции внутрисферного замещения, в результате чего в ДНП-структурах возникает новая система межмолекулярных связей.

Таким образом, эксперимент подтверждает высказанное предположение о том, что в основе механизмов антиопухолевого действия комплексов переходных металлов может лежать существенная модификация надмолекулярной структуры хроматина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomson A. J. et al.—«Struct. Bonding.», 1972, 11, 1.
2. Harder H. C., Rosenberg B.—«Intern. J. Cancer», 1970, 6, 207.
3. Howle J. A., Gale G. H.—«Biochem. Pharmacol.», 1970, 19, 2757.
4. Robins A. B.—«Rec. Results Cancer Res.», 1974, 48, 1.
5. Roberts J. J., Passon J. M.—«Nature», 1972, 235, 282.
6. Rosenberg B.—«Naturwiss.», 1973, 60, 399.
7. Федорова Н. А. и др.—«ДАН СССР», 1976, 230, 2.
8. Зеленин А. В. и др.—«ДАН СССР», 1976, 230, 3.
9. Андрианов В. Т. и др.—Радиационная биофизика ДНП хроматина. М., 1976.

Поступила в редакцию
26/XII 1977 г.

Кафедра биофизики

УДК 621.396

Н. Ф. ДАНЕЙКО, В. В. ИЗОХ, Е. Л. КОРХОВ,
В. И. ЛАВРУКОВИЧ, А. В. СИДОРЕНКО

ФЛУКТУАЦИИ МОДУЛИРУЮЩЕГО ЛАЗЕРНЫЙ ЛУЧ СВЧ-СИГНАЛА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

При эксплуатации оптических линий связи, в системах оптической локации [1] и дальномерии [2] необходимо оценить возмущающее действие турбулентной атмосферы на параметры переданного по лучу лазера радиосигнала. Расчет дисперсии флуктуаций фазы модулирующего колебания для горизонтальной трассы и трассы с отражением приводится в [3, 4].

В предлагаемой работе экспериментально исследуются статистические характеристики амплитуды и фазы СВЧ-сигнала с выхода фотоприемника в оптической линии связи с прямым детектированием в приземном слое атмосферы.

Измерения проводились на горизонтальной трассе с отражением общей длиной 600 м в мае—октябре 1976 г. Высота луча над подстилающей поверхностью в среднем составляла 8 м.

Источником излучения служил одномодовый HeNe лазер ЛГ-38. Модуляция лазерного излучения по интенсивности непрерывным СВЧ-сигналом (глубина модуляции $m = 80\%$) осуществлялась в электрооптическом модуляторе на ниобате лития. Коллимированный с помощью коллиматора теневого прибора ИАБ-455 (фокусное расстояние $F = 1000$ мм) луч диаметром 0,1 м выходит на трассу и, отразившись от зеркала, обес-

печивающего полный перехват энергии пучка, пройдя повторно тот же слой атмосферы, попадает в приемную оптическую антенну-объектив «Уран-16» ($F=750$ мм, относительное отверстие 1:3,5). Расстояние между передатчиком и приемником 1,3 м. В качестве фотоприемника использовался германиевый лавинный фотодиод ЛФД-2, отношение сигнал/шум на выходе которого превышает 30 дБ. Установка для калибровки аттенюаторов ДК1-5 позволяет производить измерения амплитуды (в децибеллах) и дифференциальный сдвиг фазы (в градусах) СВЧ-сигнала одновременно.

Оценка частотного спектра флуктуаций СВЧ-сигнала с выхода фотодиода проводилась СВЧ-приемниками и спектроанализатором С4-12. Скорость и направление ветра измерялись анерумбометром М-62. Структурная постоянная C_n^2 определялась оптическим методом из оценки эффективных радиусов пучка a_0 и a_1 в плоскости выходной апертуры и плоскости приема соответственно [5].

В процессе статистической обработки вычислялись следующие характеристики: среднее значение, дисперсия, закон распределения вероятностей флуктуаций амплитуды и дифференциального сдвига фаз, их автокорреляционные и взаимокорреляционные функции, а также частотный спектр флуктуаций амплитуды СВЧ-излучения в зависимости от условий турбулентности.

Полученные реализации флуктуаций амплитуды и фазы (средней длительностью 2 отсчета в минуту по фазе и амплитуде) оцифровывались, группировались по параметру C_n^2 и подвергались анализу. На рис. 1 приведены типичные гистограммы записей амплитуды и фазы при различных значениях C_n^2 :

а) среднее значение фазы СВЧ-сигнала $\Delta\phi_{cp} = 327,5^\circ$, дисперсия $D_{\Delta\phi} = 71,06$ град 2 , $C_n^2 = 0,14 \cdot 10^{-12}$ м $^{-2/3}$;

б) $\Delta\phi_{cp} = 345^\circ$, $D_{\Delta\phi} = 98,46$ град 2 , $C_n^2 = 0,23 \cdot 10^{-12}$ м $^{-2/3}$;

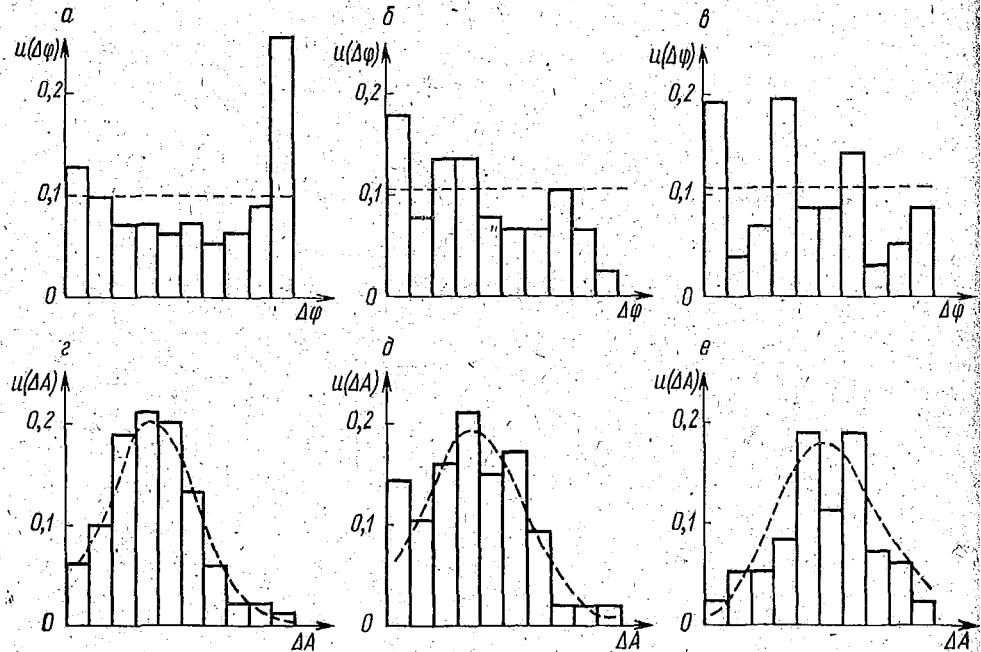


Рис. 1. Гистограммы распределения параметров СВЧ-сигнала при различных условиях турбулентности:

фазы (а) и амплитуды (г) при $C_n^2 = 0,14 \cdot 10^{-12}$ м $^{-2/3}$; фазы (б) и амплитуды (д) при $C_n^2 = 0,23 \cdot 10^{-12}$ м $^{-2/3}$; фазы (в) и амплитуды (е) при $C_n^2 = 0,46 \cdot 10^{-12}$ м $^{-2/3}$

в) $\Delta\Phi_{cp} = 112,1^\circ$, $\Delta\phi = 80,59$ град 2 , $C_n^2 = 0,46 \cdot 10^{-12}$ м $^{-2/3}$;

г) среднее значение амплитуды СВЧ-сигнала $\Delta A_{cp} = -37,25$ дБ, дисперсия $D_{\Delta A} = 1,765$ дБ 2 , $C_n^2 = 0,14 \cdot 10^{-12}$ м $^{-2/3}$;

д) $\Delta A_{cp} = -42,43$ дБ, $D_{\Delta A} = 0,6046$ дБ 2 , $C_n^2 = 0,23 \cdot 10^{-2/3}$ м $^{-2/3}$;

е) $\Delta A_{cp} = -45$ дБ, $D_{\Delta A} = 3,331$ дБ 2 , $C_n^2 = 0,46 \cdot 10^{-12}$ м $^{-2/3}$.

Пунктирной линией нанесены плотности вероятностей, соответствующие нормальному распределению (для амплитуды) и закону равномерной плотности (для фазы) со средним значением и дисперсией, вычисленными из экспериментальных данных. Для проверки закона распределения вероятности использовался критерий χ^2 .

Рассчитанные по [4] значения дисперсии флуктуаций фазы СВЧ-сигнала для трассы с параметрами $L=300$ м,

$L_0=6,32$ м, $l_0=2 \cdot 10^{-3}$ м, $\lambda=6328$ Å, $\lambda_a=0,2$ м при отражении строго назад в различных условиях турбулентности приводятся в таблице. Если передатчик и приемник разнесены, то значения дисперсии будут ниже. При сравнении с экспериментально полученными данными (см. рис. 1) видно различие с расчетными значениями дисперсии, что объясняется рядом факторов: глубина модуляции лазерного излучения ниже 100%, невоз-

Дисперсия флуктуаций фазы модулирующего лазерный луч колебания

Структурная постоянная $Cu^2 \cdot 10^{-12}$, м $^{-2/3}$	Расчетное значение дисперсии D , град 2
0,14	$6,25 \cdot 10^{-4}$
0,23	$9,61 \cdot 10^{-4}$
0,46	$1,986 \cdot 10^{-3}$

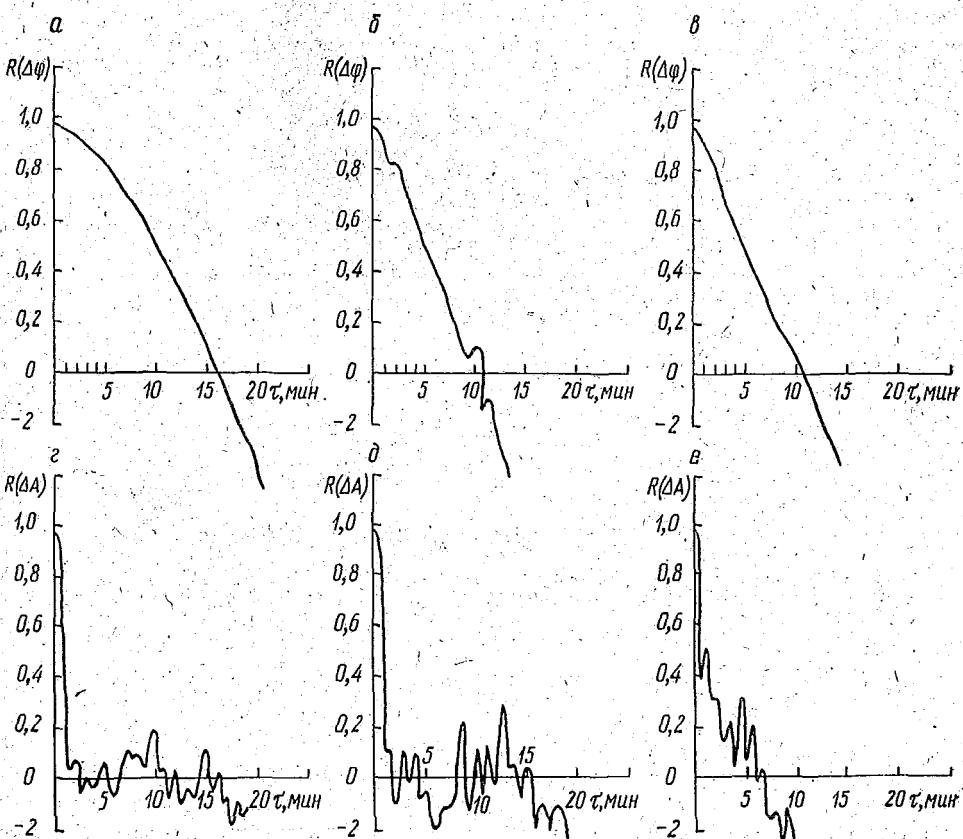


Рис. 2. Автокорреляционные функции флуктуаций фазы (а, б, в) и амплитуды (д, е, ж) СВЧ-сигнала для распределений и условий турбулентности рис. 1.

можно исключить наличие нелинейных искажений и температурных градиентов в модуляторе и т. д.

Автокорреляционные функции для реализаций, представленных на рис. 1, приведены на рис. 2. Время корреляции амплитуды, взятое по уровню 0,5, составляет 30 с и не меняется с увеличением C_n^2 . Характерным для автокорреляционных функций флуктуаций фазы является большое время корреляции (10 мин для $C_n^2 = 0,14 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-2/3}$). С ростом силы турбулентности время корреляции фазы падает и при $C_n^2 = 0,46 \cdot 10^{-12} \text{ м}^{-2/3}$ составляет 4,5 мин. Проведенный расчет взаимокорреляционных функций амплитуды и фазы СВЧ-сигнала указывает на отсутствие корреляции.

Частотные спектры флуктуаций амплитуды СВЧ сигнала обнаруживают четкую зависимость от дисперсий флуктуаций логарифма амплитуды плоской волны:

$$\beta_0^2 = 0,308 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6},$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; L — длина трассы.

При увеличении β_0^2 за счет интенсивности турбулентности спектр расширяется и уровень низкочастотных составляющих повышается.

В результате проведенных экспериментальных исследований получено, что закон распределения вероятностей хорошо аппроксимируется нормальным распределением для флуктуаций амплитуды и равномерно для флуктуаций фазы модулирующего лазерный луч СВЧ-колебания. Корреляционный анализ показал, что влияние турбулентных неоднородностей оказывается в большей степени на амплитуде СВЧ-сигнала (время корреляции для амплитуды равняется десяткам секунд, а для фазы — нескольким минутам). Частотный спектр флуктуаций амплитуды лежит ниже 250 Гц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schappert O. T. — «Appl. Opt.», 1971, 10, 2325.
2. Froom K. D. — «J. Sci. Instr.», 1961, 38, 458.
3. Лукин В. П. и др. — «Радиотехника и электроника», 1973, 18, № 3, 502.
4. Лукин И. П. и др. — Тез. докладов IV Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Секция «Распространение лазерного излучения в турбулентной атмосфере». Томск, 1977, 214.
5. Brown W. P. — «JOSA», 1971, 61, № 8, 1051.

Поступила в редакцию
11/1 1978 г.

Кафедра радиофизики
и электроники СВЧ

УДК 621.372.413

А. С. РУДНИЦКИЙ, А. П. ХАПАЛЮК

О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ МОД ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

В квантовой электронике широко используются планарные диэлектрические структуры, являющиеся основой для создания оптических интегральных схем. В связи с этим представляются необходимыми дальнейшие исследования структуры поля мод плоскопараллельных диэлектрических слоев. Большинство проводимых исследований связано с изучением волноводно-резонансных свойств слоя. Для этого достаточно двухмерных и одномерных решений уравнений Максвелла, которые в общем не отражают реальной картины поля плоскопараллельных волноводов и резонаторов. Структура поля их может быть в зависимости от условий

возбуждения весьма разнообразной. Например, в диэлектрическом слое с идеальными границами волноводная мода может иметь, как показано в работе [1], вид гауссова пучка. В данной работе получено общее выражение для структуры поля однородного диэлектрического слоя с неидеальными границами.

Рассмотрим бесконечный в направлениях y, z плоскопараллельный слой (см. рисунок) толщиной b с показателем преломления N . Показатель преломления ограничивающей слой среды обозначим n . Двумерные собственные решения уравнений Максвелла для такого слоя можно представить [2, 3] в виде суперпозиции двух плоских волн. Направления распространения волн показаны на рисунке условно стрелками 1 и 2. Поле вне волновода имеет вид преломленных волн 3 и 4. Естественное обобщение получается при переходе к более общему трехмерному представлению парциальных волн.

Выделенным направлением в данной задаче является перпендикулярное границам слоя направление вдоль оси x . Зависимость поля от координаты x возьмем в экспоненциальном виде $\exp(-ik \cdot m_{jxx})$. В этом случае система уравнений Максвелла разбивается аналогично [4] на две подсистемы соответственно двум поляризациям, или двум (E и H) типам волн. Границные условия для этих волн также разделяются, и их можно рассматривать независимо одна от другой. Все компоненты электромагнитного поля парциальных H -волн выражаются через поперечные компоненты магнитного поля

$$H_{jx} = A_j u_j(y, z) \exp[ik(ct - m_{jxx})] \quad (1')$$

по формулам:

$$E_{jy} = \frac{1}{ik(N_j^2 - m_{jx}^2)} \cdot \frac{\partial H_{jx}}{\partial z}, \quad E_{jz} = -\frac{1}{ik(N_j^2 - m_{jx}^2)} \cdot \frac{\partial H_{jx}}{\partial y}, \quad (1'')$$

$$H_{jy} = -m_{jx} E_{jz}, \quad H_{jz} = m_{jx} E_{jy}, \quad j=1, 2, 3, 4,$$

$$N_1 = N_2 = N, \quad N_3 = N_4 = n.$$

Аналогично все компоненты электромагнитного поля E -волн выражаются через поперечные компоненты электрического поля:

$$E_{jx} = B_j u_j(y, z) \exp[ik(ct - m_{jxx})], \quad (2')$$

$$H_{jy} = -\frac{N_j^2}{ik(N_j^2 - m_{jx}^2)} \cdot \frac{\partial E_{jx}}{\partial z}, \quad H_{jz} = \frac{N_j^2}{ik(N_j^2 - m_{jx}^2)} \cdot \frac{\partial E_{jx}}{\partial y}, \quad (2'')$$

$$E_{jy} = m_{jx} H_{jz} / N_j^2, \quad E_{jz} = -m_{jx} H_{jy} / N_j^2.$$

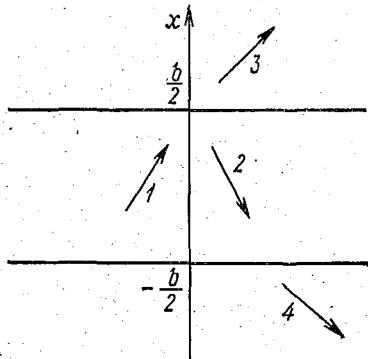
Функции $u_j(y, z)$, в (1), (2) удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial z^2} + k^2(N_j^2 - m_{jx}^2) u_j = 0. \quad (3)$$

Парциальные волны (1), (2) будут удовлетворять требованию непрерывности тангенциальных составляющих поля на границах слоя

$$\begin{aligned} x = b/2 & \quad E_{1y} + E_{2y} = E_{3y}, \quad E_{1z} + E_{2z} = E_{3z}, \\ & \quad H_{1y} + H_{2y} = H_{3y}, \quad H_{1z} + H_{2z} = H_{3z}, \\ x = -b/2 & \quad E_{1y} + E_{2y} = E_{4y}, \quad E_{1z} + E_{2z} = E_{4z}, \\ & \quad H_{1y} + H_{2y} = H_{4y}, \quad H_{1z} + H_{2z} = H_{4z} \end{aligned} \quad (4)$$

при условии выполнения соотношений Снелла, которые в данном случае имеют вид



Плоскопараллельный диэлектрический слой и набор парциальных волн

$$N_1^2 - m_{1x}^2 = N_1^2 - m_{1x}^2, \quad (5)$$

и двух известных [2, 3] дисперсионных соотношений

$$e^{2ikm_{1x}b} = \left(\frac{m_{1x} - m_{3x}}{m_{1x} + m_{3x}} \right)^2, \quad e^{2ikm_{1x}b} = \left(\frac{n^2 m_{1x} - N^2 m_{3x}}{n^2 m_{1x} + N^2 m_{3x}} \right)^2 \quad (6)$$

соответственно двум (E и H) типам волн. Постоянные распространения волн взаимосвязаны условиями Снелла (5). Из них следует, что $m_{3x} = \pm \sqrt{n^2 - N^2 + m_{1x}^2}$. Правая часть дисперсионных соотношений формально совпадает с коэффициентами отражения Френеля, которыми обычно описывают отражение и преломление плоских волн на плоской границе раздела двух сред. Здесь они получены при более общих предположениях для не-расходящихся ($u_j = u_1$) неоднородных плоских волн общего вида.

Поперечная компонента поля H -мод с учетом граничных и дисперсионных условий после несложных преобразований записывается с точностью до постоянного множителя в виде

$$H(x, y, z, t) = v(x) u(y, z) \exp(ikct), \quad (7)$$

где

$$v(x) = \begin{cases} -i \sin\left(km_{1x} \frac{b}{2}\right) e^{-ikm_{3x}\left(x - \frac{b}{2}\right)} & x \geq \frac{b}{2} \\ -i \sin\left(km_{1x}x\right) & -\frac{b}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \\ i \sin\left(km_{1x} \frac{b}{2}\right) e^{ikm_{3x}\left(x + \frac{b}{2}\right)} & x \leq -\frac{b}{2}. \end{cases} \quad (8)$$

Поперечная компонента поля E -мод записывается аналогично с той лишь разницей, что функция $v(x)$ внутри слоя умножается на n^2/N^2 . Таким образом, структура поля мод плоскопараллельного диэлектрического слоя определяется в общем случае выражениями (1), (2), (7), (8) с теми же, что и в двумерном случае, дисперсионными соотношениями (6).

Парциальные неоднородные плоские волны типа (1), (2) в совокупности дают возможность решения ряда граничных задач с разными на бортах плоскопараллельных слоев. Решения этих задач будут отличаться функциями $v(x)$, вид которых зависит как от геометрических и оптических свойств структуры, так и от типа решаемой задачи (задача на отражение, на резонансное поглощение и т. д.). Функция $u(y, z)$ согласно соотношениям Снелла, одинакова для всех слоев. Удовлетворение граничных условий на поверхности слоя не затрагивает структуры решений уравнения (3). Поэтому конкретный вид ее зависит от некоторых дополнительных условий, устанавливаемых при решении конкретных практических задач по электродинамике планарных структур.

В частности, возбуждение электромагнитных волн в оптическом плоском волноводе осуществляется обычно излучением от оптических квантовых генераторов. Поэтому для планарной и интегральной оптики наибольший интерес представляют волноводные моды в виде узконаправленных световых пучков. Направленный пучок света можно представить как известно, суперпозицией плоских волн разных направлений распространения. Соответствующее такому представлению решение уравнения (3) записывается в виде

$$u(y, z, m_{1x}) = \int_{-\infty}^{\infty} A(m_{1y}) e^{-ik(m_{1y}y + m_{1z}z)} dm_{1y}, \quad (9)$$

где $m_{1z} = \sqrt{N^2 - m_{x1}^2 - m_{1y}^2}$; $A(m_{1y})$ — плотность углового спектра волн.

вого поля, являющаяся Фурье-преобразованием граничного значения $u(y, 0)$. Для узконаправленных вдоль z пучков $A(t_{1y})$ имеет заметную величину лишь при малых значениях t_{1y} . Асимптотические оценки интеграла для этого случая имеются в ряде работ, в том числе некоторые из них в работе [1]. В частности, если граничное значение задавать функцией Гаусса, которому соответствует угловой спектр, имеющий также вид функции Гаусса, то волноводная мода будет иметь вид пучка с синусоидальной зависимостью поля от поперечной координаты x внутри слоя, убывающей экспоненциальной вне слоя и приближенно гауссовым распределением в плоскостях y, z . Параметры волноводных пучков зависят как от условий возбуждения, так и от размеров и оптических характеристик волноводного слоя. Распространение и преобразование их хорошо описывается решениями волнового уравнения в параболическом приближении, поэтому эффективным средством исследований может быть метод параболического приближения решения уравнения (3) и многочисленные результаты, полученные этим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carter W. H.—«Opt. Comput.», 1974, 11, 410.
2. Вязышев В. Ф. Диэлектрические волноводы. М., 1970.
3. Методы расчета оптических квантовых генераторов. Под ред. Б. И. Степанова. Минск, 1966.
4. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М., 1973.

Поступила в редакцию
7/II 1978 г.

НИИ ПФП

УДК 616—073.75.(088.8)

А. К. ГРИБКОВ, А. М. ЛЮЦКО, И. Г. ТАРУТИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ШУМОВ И ВОЗМОЖНОСТЕЙ УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ИЗОБРАЖЕНИЯ В КОМПТОНОВСКОЙ ТОМОСКОПИИ

Индивидуальная анатомо-топографическая информация является источником ценных диагностических данных и служит основой планирования лучевого лечения онкологических заболеваний. Представляется перспективным ее получение методом комптоновской томоскопии [1—5], использующим пропорциональную зависимость интенсивности рассеяния гамма-излучения от электронной плотности среды. При этом, в отличие от распространенных методов томографии (рентгеновская, ультразвуковая, рентгено-компьютерная), измеряется электронная плотность тканей. Отсюда возникает возможность повышения точности дозиметрических расчетов с учетом параметров терапевтического пучка излучения.

Качественные характеристики метода томографии определяются пространственным Δl и плотностным δr разрешениями, длительностью измерения t_i и лучевой нагрузкой D на объект исследования. Как и для любой системы наблюдения, имеет место взаимосвязь [6]:

$$C^2 \cdot d^2 \cdot \Theta \cdot n \cdot t_i = \eta^2,$$

где C — минимальный различимый контраст ($C \sim \delta \rho$); d — диаметр разрешаемого при этом элемента изображения ($d \sim \Delta l$); Θ — эффективность регистрации квантов; n — плотность потока квантов; η — отношение сигнал/шум (для $\sim 100\%$ идентификации элементов площадью d^2 и контрастом $C \eta \approx 5$); при $D \sim nt_i$.

В комптоновской томоскопии достигнуты удовлетворительные значения $\Delta l \approx 0,5 \cdot 10^{-2}$ м [1—5]; $\delta \rho \approx (1 \div 5)\%$ [4, 5]; $D \approx (0,1 \div 3,0)$ рад [2, 5], однако, $t_i \approx (0,3 \div 6,0) \cdot 10^2$ с [2, 4] еще велика. Это объясняется тем, что разработанные устройства [1—5] позволяют регистрировать $10^{-4} \div 10^{-3}\%$

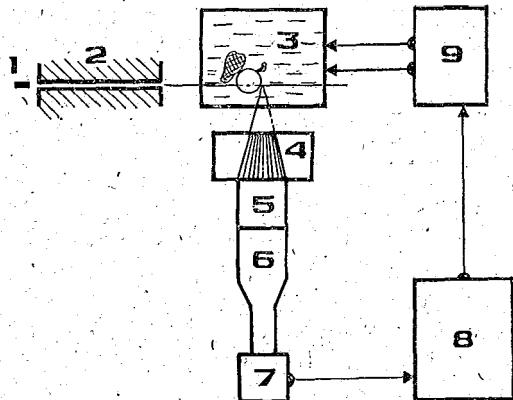


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки (объяснение в тексте)

от рассеиваемой энергии излучения главным образом в результате низкой геометрической эффективности регистрации, а также из-за особенностей составляющих шума.

В данной работе исследовались составляющие шума, возможности устранения, ослабления или учета их влияния на результаты измерений. Блок-схема экспериментальной установки изображена на рис. 1. Источник 1 (Co^{60} выбран вследствие широкого применения в лучевой терапии) активностью $1,3 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ коллимирован 2 так, что пучок потоком $8,8 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$

и диаметром $5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ направлен на фантом 3. Однократно рассеянное на угол $\pi/2$ излучение через фокусирующий 15-щёлевой коллиматор 4 детектируется кристаллом $\text{NaI}(\text{Tl})$ диаметром $70 \times 40 \text{ мм}^2$ 5, просматриваемым ФЭУ-43 6. Источник и детектор помещены в свинцовую защиту. Сигналы ФЭУ через предусилитель 7 регистрируются многоканальным анализатором (МАА) 8. Просматриваемый элемент объема ограничен зоной пересечения пучка диаметром 10^{-2} м с полем зрения детектора полушириной $0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$. Фантом дискретно сканировался в выбранной плоскости сечения с шагом $0,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ при длительности измерения 10 с в каждой точке. Перемещение осуществлялось двухкоординатной системой 9, управляемой МАА.

На рис. 2 показаны: схема сечения водного фантома со вставками, имитирующими костную ткань ($\rho_1 \approx 1500 \text{ кг}/\text{м}^3$) и воздушную полость (круг), на фоне полученной томограммы (a), а также результаты ее обработки (б, в). Из рис. 2, а видно, что наиболее существенной составляющей шума является ослабление средой первичного и рассеянного излучения. Гетерогенность среды вызывает образование теней от неоднородностей, подчеркивающих контрастные и маскирующих слабоконтрастные детали. Интенсивность теней пропорциональна плотности и размерам неоднородностей. Тени противоположных знаков взаимно компенсируются при наложении (j=9, см. рис. 2а, б). Возможно также появление ложных деталей из-за охвата полем зрения детектора слоев объекта, прилегающих к просматриваемому. Эти детали отражают неоднородности в тех слоях и не имеют теней в направлении от источника. Благо-

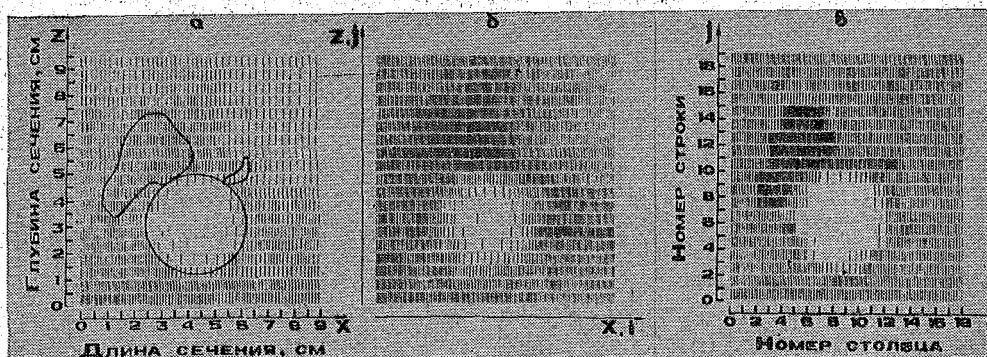


Рис. 2. Схема сечения и томограммы водного фантома (объяснение в тексте)

для этому они легко идентифицируются и устраняются из томограммы. Причиной неравномерности ослабления излучения является также криволинейность поверхности объекта на входе первичного пучка и выходе рассеянного, что не всегда в достаточной мере отображается формой снимаемой томограммы.

Влияние фона спектрометра и эффекта накопления за счет многократных процессов минимизируется защитными экранами, коллимацией, фильтрацией детектируемого излучения и дискриминацией сигналов (регистрировались только импульсы в пике полного поглощения для энергии рассеянных на $\pi/2$ квантов $E' \approx 0,36$ МэВ). Вклад накопления в сигнал не превышал 10% для максимальных значений i и j (см. рис. 2). Визуальное восприятие существенно улучшается (см. рис. 2, б) после локального усреднения по окрестности из девяти элементов (сглаживание статистической «пестроты») и коррекции ослабления излучения:

$$N_{ij}' = N_{ij}^* \exp [-(i-1)\Delta_x \mu_0' + (j-1)\Delta_z \mu_0''], \quad (1)$$

где N_{ij}' , $N_{ij}^* = \sum_{m=i-1}^{i+1} \sum_{n=j-1}^{j+1} N_{mn}/9$ и N_{ij} — «скорректированное», локально усредненное и экспериментально полученное число отсчетов для элемента (i, j) интограммы с координатами $x = i\Delta_x$ и $z = j\Delta_z$ в плоскости сечения объекта (см. рис. 2, а); $\Delta_x = \Delta_z$ — шаг сканирования; μ_0' и μ_0'' — коэффициенты линейного ослабления первичного и однократно рассеянного излучения для воды.

Следы накопления («усиление» изображения с ростом i и j — см. рис. 2, б) стираются, если вместо вычислений по (1) использовать результаты измерений гомогенного (плотностью ρ_0) фантома N_{ij}^0 при тех же аппаратурных условиях. Тогда распределение тканей по плотности:

$$\rho_{ij}' = \rho_0 N_{ij}' / N_{ij}^0. \quad (2)$$

Сглаживание поверхностей реальных объектов исследования с помощью тканеэквивалентных материалов [3] не всегда допустимо. Результаты измерения гомогенного фантома позволяют найти зависимость вклада многократных процессов в сигнал детектора от i и j . С учетом этой зависимости всегда можно перед обработкой согласовать размеры и форму изображения фантома со снятой томограммой исследуемого объекта.

Частичная коррекция эффекта «тканей» выполнима по соотношению

$$\rho_{ij}'' \approx \rho_0 N_{ij} \exp \left(\Delta_x \sum_{k=1}^{i-1} \mu_{kj} + \Delta_z \sum_{l=1}^{j-1} \mu_{il} \right) / N_{1,1}^0, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{kj} &= \mu_0 \rho_{kj}'' / \rho_0, \\ \mu_{il} &= \mu_0 \rho_{il}'' / \rho_0. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом (2) оператор (3) примет вид:

$$\rho_{ij}'' \approx \rho_{ij}' N_{ij}^0 \exp \left(\Delta_x \sum_{k=1}^{i-1} \mu_{kj} + \Delta_z \sum_{l=1}^{j-1} \mu_{il} \right) / N_{1,1}^0. \quad (5)$$

Более точное решение получается методом последовательных приближений с учетом различий самоослабления в элементах объема фантома и объекта. Возможные искажения из-за ослабления излучения в прилегающих к сканируемому слоям объекта устраняются на основе выполнения объемного (послойного) сканирования [2].

При вычислениях по (4) и (5) из-за статистической неопределенности значений N_{ij} происходит накопление ошибки. Для исключения этого параллельно или последовательно с основными измерениями объект однократно сканировался в той же плоскости излучением Co^{60} и I^{131} ($E_1 \approx 0,36$ МэВ). При этом оценивалось интегральное ослабление пучка для каждой строки (Co^{60}) и столбца (I^{131}) томограммы. Полученные данные служили для контроля результатов обработки томограммы и последующей коррекции их.

Локальное усреднение ведет к сглаживанию деталей изображения (ср. рис. 2, а и б). Для выделения или усиления контуров уместно воспользоваться одной из разработанных для этого методик [7]. Томограмма после локального усреднения ρ_{ij}^* вычиталась из исходной ρ_{ij} , в результате получалось изображение r_{ij} контуров неоднородностей на фоне статистического шума. Далее идентифицировались все r_{ij} , не принадлежащие контурам [7, 8], с заменой знака перед ними — получалось новое распределение r'_{ij} . Последующее сложение:

$$\rho''_{ij} = \rho_{ij} + kr'_{ij}$$

(k — константа, выбираемая в зависимости от параметров конкретного изображения) даёт томограмму с более резким очертанием контуров (см. рис. 2, в) при значительно меньшей статистической «пестроте». Дальнейшее приближение контуров деталей изображения к действительным контурам неоднородностей в сечении объекта достигается аппроксимацией их гладкой кривой.

В результате обработки при $100\% N_{ij}^{-1/2}$ в пределах 3—7 % значение ρ вычислено с погрешностью $\sim 2\%$, а границы неоднородностей определены с точностью $\pm 2 \cdot 10^{-3}$ м. Проведенные испытания показали, что при выбранных экспериментальных условиях достигается разрешение по плотности $\delta\rho = 5\%$ при пространственном разрешении $\Delta l = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м и длительности измерения элемента изображения $t_i = 10$ с. Несложная обработка позволяет в значительной мере ослабить влияние ряда составляющих шума на качество изображения.

Таким образом, основными факторами, ограничивающими чувствительность метода комптоновской томоскопии, являются: ослабление первичного и рассеянного излучения гетерогенной средой, эффекты накопления, статистические шумы. Простейшие методы обработки с использованием результатов измерения гомогенного фантома позволяют повысить точность идентификации распределения тканей по плотности. При этом удовлетворительное по качеству изображение может быть получено за меньшее время и с менее активными источниками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lale P. G.—«Phys. Med. Biol.», 1959, 4, 159.
2. Lale P. G.—«Radiology», 1968, 90, 510.
3. Clarke R. L., Van Dyk G. Medical Radioisotope Scintigraphy, I. Vienna, IAEA, 1969, 247.
4. Farmer F. T., Collins M. P.—«Phys. Med. Biol.», 1971, 16, 577.
5. Battista J. J. et al.—«Phys. Med. Biol.», 1977, 22, 128.
6. Роуз А. Зрение человека и электронное зрение. М., 1977.
7. Розенфельд А. Распознавание и обработка изображений. М., 1972.
8. Rosenfeld A. et al.—«IEEE Trans. Comput.», 1972, C-21, 677.

Поступила в редакцию
9/II 1978 г.

НИИ ПФП, НИИ онкологии и
медицинской радиологии МЗ БССР

М. А. БАРАНОВСКИЙ, И. В. КАЧАНОВ,
Ю. П. МАКАРОВ, А. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА КОНТАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИЗДЕЛИЯ В ПРОЦЕССЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЫДАВЛИВАНИЯ

В процессах пластического формоизменения энергия, воспринимаемая деформируемым телом, превращается в потенциальную энергию упругого искажения кристаллической решетки и в тепловую энергию пластической деформации [1]. Интенсивность тепловыделения в процессах обработки металлов давлением определяется в основном скоростью деформации, соотношением температур заготовки и инструмента, теплоизоляционными свойствами смазки и степенью деформации. С увеличением скорости деформации время, необходимое для получения образцом одной и той же степени деформации, уменьшается. Вследствие этого при постоянной скорости теплообмена изделия с окружающей средой, все меньшее количество тепла успевает рассеяться в окружающее пространство. Поэтому при скоростях деформации (10^3 — 10^4) с^{-1} , когда время деформации заготовки (300—600) мкс, процесс можно считать адиабатическим. Исследование процесса выдавливания высоколегированных штамповочных сталей (45Х3В3МФС, 3Х2В8Ф, 5ХНМ, и т. д.) в указанном диапазоне скоростей деформации показало возможность получения точных изделий с высоким качеством поверхности [2]. Проведение данного процесса в режиме высокотемпературной термомеханической обработки (ВТМО) позволило существенно повысить механические свойства выдавленных изделий. Однако необходимо учитывать, что у легированных сталей узкие температурные интервалы деформирования и закалки, поэтому значительное повышение температуры в процессе деформации приводит к разрушению изделия, а несоблюдение температурного режима закалки исключает получение высоких механических свойств в готовом изделии.

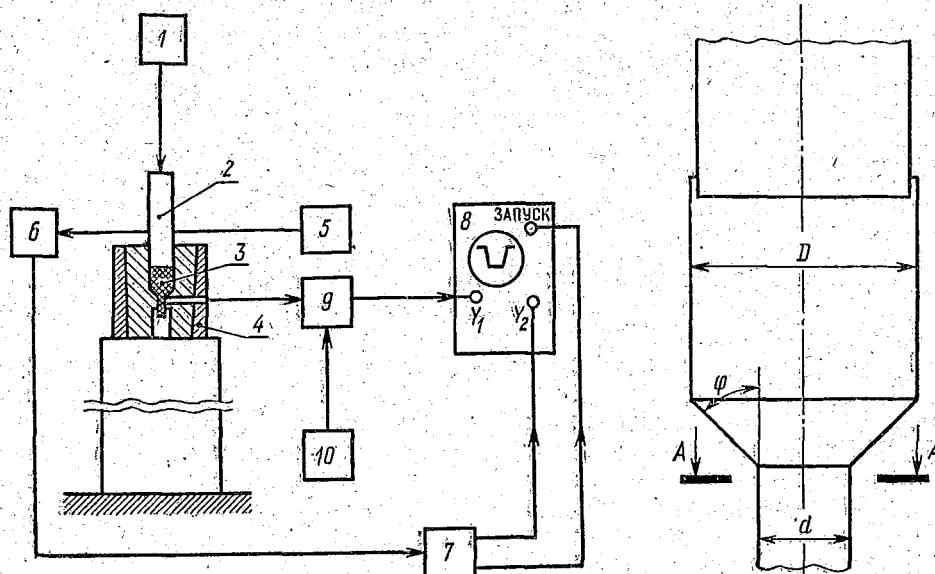


Рис. 1. Блок-схема устройства для регистрации температуры на контактной поверхности изделия в процессе высокоскоростного выдавливания. Пояснение в тексте

Рис. 2. Схема штамповки выдавливанием чрез коническую матрицу

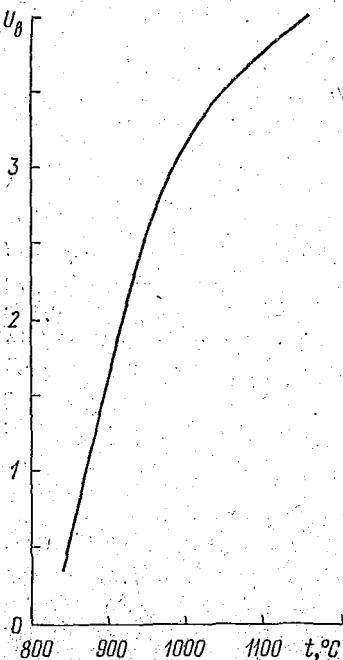


Рис. 3. Градуировочная кривая системы фотоэлектронной регистрации температуры.

Следовательно, для получения высококачественных изделий методом высокоскоростного выдавливания в режиме ВТМО крайне важно знать изменение температуры в очаге деформации и температурное поле детали в момент окончания процесса деформации.

В литературе описаны методики для регистрации температуры на поверхности выдавленного из очка матрицы изделия с использованием термопар [3] и различных приемников инфракрасного излучения [4—6]; последние, однако, способны регистрировать лишь сравнительно медленные (постоянная времени $\tau = (10^{-2}—10^{-3})$ с вариации температуры, что, по крайней мере, на два — три порядка больше быстродействия, необходимого для регистрации температуры на поверхности изделия, перемещающегося в поле приемника со скоростью (300—900) м/с. Таким образом, зарегистрированная с помощью этих приемников динамика температуры на контактной поверхности изделия будет представлять собой искаженную картину переходных процессов фотоприемника и, в лучшем случае, будет сохранять лишь пиковые значения исходного процесса.

Предлагаемая методика позволяет осуществлять регистрацию температуры на поверхности изделия бесконтактным методом в реальном масштабе времени и с высокой точностью. Блок-схема устройств, реализующих указанный метод регистрации температуры, изображена на рис. 1.

В результате разгона в стволе порохового копра 1, пуансон 2 приобретает кинетическую энергию, необходимую для пластического формоизменения заготовки 4. Перед соударением с заготовкой базовый выступ пуансона пересекает луч гелий-неонового лазера 5 ($\lambda = 0,63 \text{ мкм}$), направленный в фотодиод ФД-9К 6. При этом формируется импульс напряжения, который после усиления в широкополосном усилителе 7 запускает ждущую развертку и поступает на один из входов (Y_2) осциллографа С1-16 8. Начальная скорость подлета пуансона к заготовке определяется по формуле

$$U_0 = \frac{l}{t},$$

где l_0 — длина базового выступа на пуансоне; t — длительность импульса напряжения, соответствующая пересечению луча базовым выступом длиной l .

После соударения пуансона с заготовкой начинается пластическое истечение металла в коническую часть матрицы 3. Возникающее при этом увеличение температуры на контактной поверхности изделия в сечении A—A (рис. 2) вызывает изменение потока теплового излучения, которое через отверстие в матрице поступает к приемнику инфракрасного излучения (10 — источник стабилизированного напряжения ВС-23). В качестве приемника в разработанной схеме использовался фотоэлектронный умножитель типа ФЭУ-83.

Временное разрешение разработанной системы фоторегистрации температуры определяется в основном величиной анодной нагрузки фотумножителя и собственной емкостью сигнального кабеля и не превышает в нашем случае величины $\tau = 10^{-8} \text{ с}$.

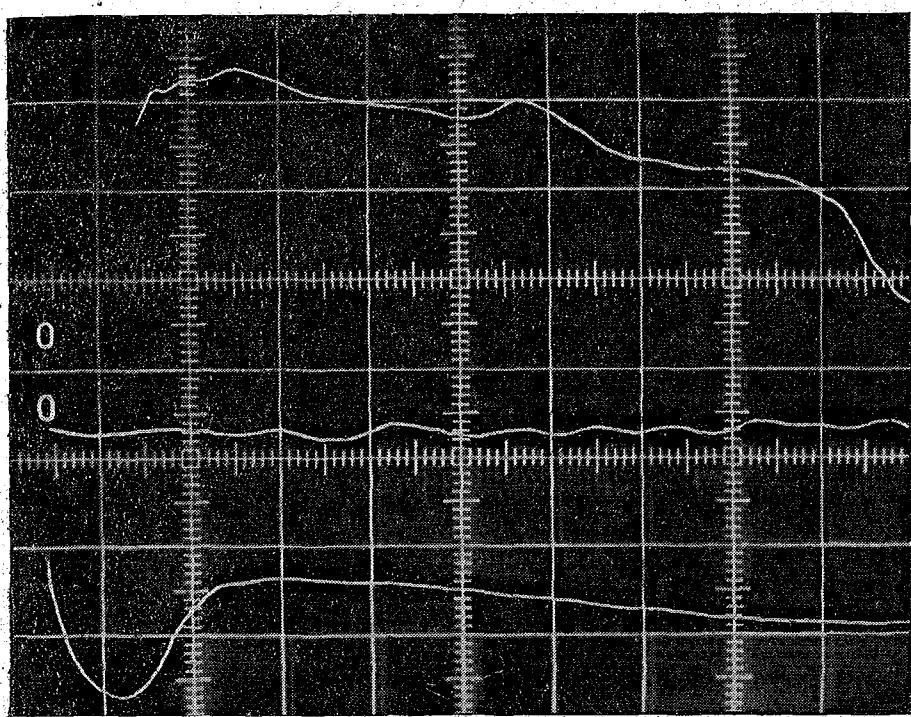


Рис. 4. Осциллограмма изменения температуры на контактной поверхности изделия в процессе высокоскоростного выдавливания (материал — сталь 45Х3В3МФС)

Тарировка фотоприемника проводилась с помощью цифрового вольтметра В2-19, регистрирующего напряжение на выходе ФЭУ, при внесении в матрицу нагретых до известной температуры образцов. Контроль температуры производился с помощью зачеканенных в образец хромель-алюмелевых термопар и электронного потенциометра ЭПД-12. Градуировочная кривая показана на рис. 3.

Типичная осциллограмма, характеризующая изменение температуры контактной поверхности изделия в процессе высокоскоростного выдавливания представлена на рис. 4. Максимальный прирост температуры для заданных условий выдавливаний (угол матричной воронки $2\phi=90^\circ$; степень вытяжки $\lambda=D^2/d^2/4$; начальная температура образца $t_0=900^\circ\text{C}$; начальная скорость пуансона $V_0=110\text{ м/с}$) наблюдается через 60 мкс после начала пластического течения металла в калибрующий поясок матрицы и составляет 280°C . Эта величина найдена описанным методом с точностью, определяемой, главным образом, погрешностью осциллографа С1-18, которая в наших условиях имеет величину порядка $0,5$ град.

Волновой характер приведенной осциллограммы отражает силовые особенности протекания процесса высокоскоростного выдавливания. Под действием сил инерции, возникающих в выдавленной части изделия вследствие нестационарных условий протекания процесса выдавливания [7], происходит замена механической схемы деформации выдавливания на волочение. При этом возникают растягивающие напряжения, которые могут вызвать образование шейки в сечении $A-A$ выдавленной части изделия [8]. Работа пластического растяжения, совершенная при этом силами инерции, вызывает локальное повышение температуры на $(30-50)^\circ\text{C}$ на участке поверхности, где образуется шейка.

Проведенные исследования показали, что разработанная методика регистрации температуры с использованием в качестве приемника инфра-

красного излучения фотоэлектронного умножителя типа ФЭУ-83, позволяет с точностью 0,5 град осуществлять регистрацию температуры на контактной поверхности изделия, перемещающегося в поле приемника со скоростью (300—900) м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губкин С. И. Теория обработки металлов давлением. М., 1947.
2. Барановский М. А. и др.—«Промышленность Белоруссии», 1977, № 11.
3. Singer A. R. E.—«Metal Industry», 1962, May 4, 346.
4. Тетерин А. К. и др.—«Кузнечно-штамповочное производство», 1969, № 2.
5. Райтег Е. Р., Тигнер С. В.—«J. Appl. Phys.», 1964, 35, 3055.
6. Зельдович Я. Б., Райзэр Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., 1966.
7. Жученко А. Н.—«Кузнечно-штамповочное производство», 1972, № 11.
8. Согришин Ю. П. и др.—«Кузнечно-штамповочное производство», 1966, № 5.

Поступила в редакцию
1/III 1978 г.

Кафедра ЭММ

УДК 681.142.621

К. П. КУРЕЙЧИК, И. Р. ГУЛАКОВ

АВТОМАТИЧЕСКИЙ УЧЕТ ФОНА И НЕСЕЛЕКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В ОДНОЛУЧЕВОМ АТОМНО-АБСОРБЦИОННОМ СПЕКТРОФОТОМЕТРЕ

В атомно-абсорбционных спектрофотометрах отмечают ряд эффектов, исказжающих результаты измерений: неселективное ослабление резонансной линии, темновой фон, наводки промышленной сети частотой 50 Гц.

В предлагаемой работе описывается спектрофотометр, в котором минимизировано мешающее действие указанных помех. Спектрофотометр позволяет за время одного цикла измерений длительностью 20 мс определить концентрацию (плотность) вещества и пропускания или величину поглощения и пропускания, а также величину неселективного поглощения. Для компенсации неселективного поглощения используется вспомогательный источник сплошного излучения [1].

Поясним работу спектрофотометра, воспользовавшись для этого структурной схемой (рис. 1) и временными диаграммами (рис. 2).

Обозначим световой поток резонансного излучения, падающий на фотоприемник, через I_{so} , а сплошного излучения — I_{sp} . Указанные источники

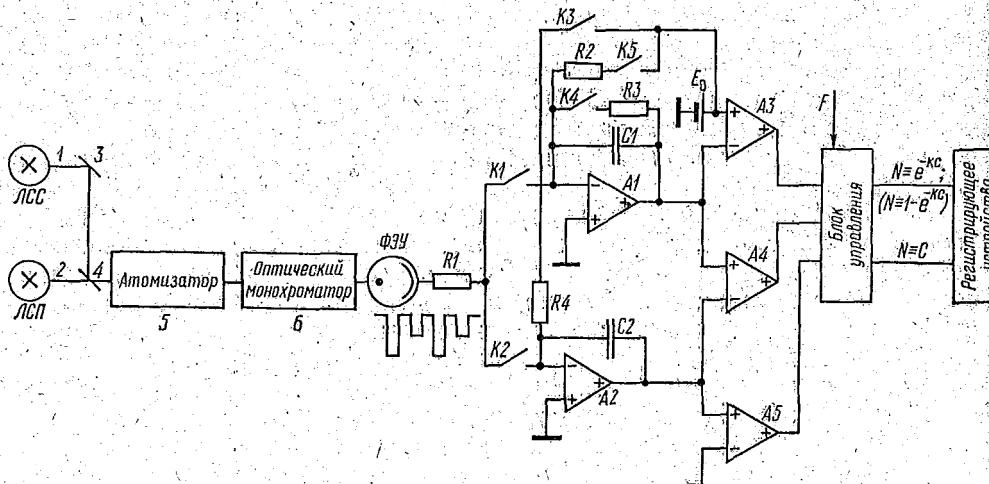


Рис. 1. Структурная схема спектрофотометра

работают в импульсном режиме (рис. 2, а, б) и синхронизированы с частотой промышленной сети. Это позволяет, применяя в качестве аналогового накопителя интегратор с циклом накопления 20 мс, подавлять на-водки со стороны промышленной сети [2] и добиваться значительного улучшения отношения сигнал/шум. В спектрофотометре применено N-ступенчатое накопление сигнала (рис. 2, в, г) на емкостях C1 и C2 интеграторов A1 и A2 (см. рис. 1). Световой поток источника сплошного излучения отражается зеркалом 3 и 4, проходит через атомизатор 5, монохроматор 6 и создает на выходе фотоприемника сигнал:

$$U_y = I_{y0} \cdot M \cdot \alpha_{nc}, \quad (1)$$

где M — коэффициент линейного преобразования светового потока в электрический сигнал; α_{nc} — коэффициент неселективного пропускания, $\alpha_{nc} = \frac{I_y}{I_{y0}}$. Сигнал, создаваемый источником резонансного излучения 2, определяется аналогично:

$$U_x = I_{x0} \cdot M \cdot \alpha_{nc} \cdot \alpha_c, \quad (2)$$

где $\alpha_c = \frac{I_x}{I_{x0}}$ — коэффициент селективного пропускания.

Напряжения U_y и U_x через резистор $R1$, ключи K1 и K2 накапливаются соответственно на емкостях C1 и C2 интеграторов A1 и A2 (см. рис. 2, в, г). При достижении на интеграторе A1 напряжения $U_{c1} = E_0 = \text{const}$ накапливание сигналов заканчивается, тогда:

$$U_{c1} = E_0 = \frac{1}{R1C1} \sum_{t=1}^N U_y \cdot t = \frac{1}{\tau_1} \cdot N \cdot I_{y0} \cdot \alpha_{nc} \cdot t, \quad (3)$$

$$U_{c2} = \frac{1}{\tau_2} \sum_{t=1}^N U_x \cdot t = \frac{1}{\tau_2} \cdot N \cdot I_{x0} \cdot M \cdot \alpha_{nc} \cdot \alpha_c \cdot t,$$

при $\tau_1 = \tau_2$ и $I_{x0} = I_{y0}$ $U_{c2} = E_0 \alpha_c$.

Управление операцией накапливания сигналов интегратора A1 осуществляется компаратором A3. Для определения оптической плотности или концентрации исследуемого образца емкость C1 разряжается по экспоненте через резистор R3 и ключ K4 до нуля. Компаратором A4 сов-

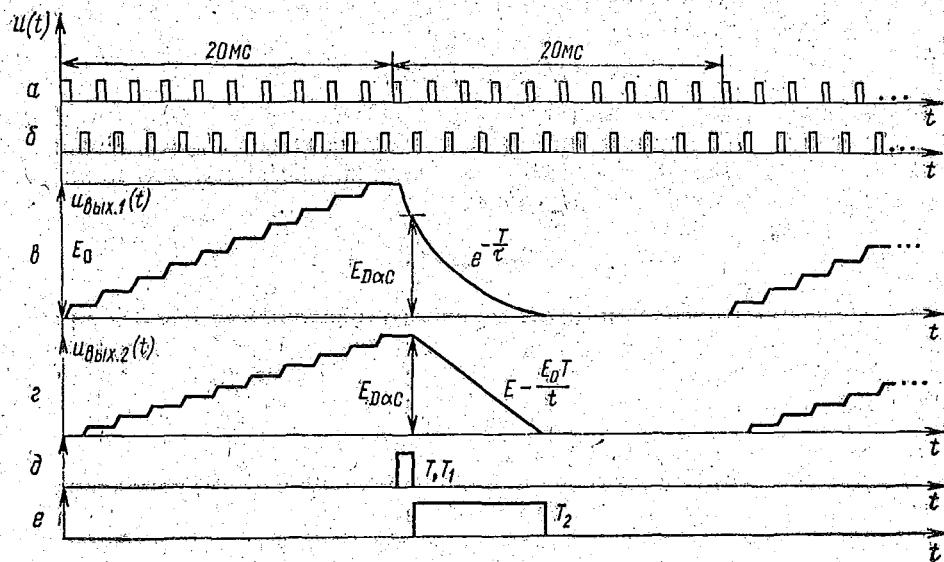


Рис. 2. Временные диаграммы работы спектрофотометра

местно с блоком управления (см. рис. 1) выделяется временной интервал T (см. рис. 2, ∂), определяемый из условия:

$$E_0 \cdot l_{\text{з}}^{\frac{T}{C1R3}} = E_0 a_c, \\ T = -C1R3 \ln a_c = \tau_3 \ln \frac{1}{a_c} = \tau_3 \cdot D = \tau_3 \cdot K \cdot C, \quad (4)$$

где D — оптическая плотность; C — концентрация исследуемого вещества в анализируемом образце; K — коэффициент пропорциональности.

Полученный временной интервал заполняется импульсами частотой F_i и на регистрирующее устройство поступает число импульсов

$$n = T_1 \cdot F_i. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что, изменяя частоту заполнения, можно получить однозначное соответствие между измеряемой концентрацией вещества (плотностью) и числом импульсов, поступающих на регистрирующее устройство. Результат измерений индицируется на 4-разрядном цифровом табло непосредственно в единицах концентрации или плотности, причем происходит автоматический учет неселективного ослабления резонансной линии.

Коэффициент линейного поглощения $1 - \frac{I_x}{I_{x0}}$ определяется при разряде ёмкости $C1$ током полярности, обратной сигналу, поступающему с фотоприемника по цепи: плюс опорного источника E_0 , ключ К5, резистор $R2$, U -вход А1 (см. рис. 1). Компаратор А4 выделяет временный интервал T_1 в течение которого напряжение на $C1$ уменьшается до уровня U_{c2} (см. рис. 2, ∂):

$$E_0 - \frac{E_0 T_1}{R2C1} = E_0 a_c, \quad (6)$$

откуда $T_1 = \tau_2 (1 - a_c) = \tau_2 \left(1 - \frac{I_x}{I_{x0}}\right)$, где $\tau_2 = R2 \cdot C1$.

Полученный временной интервал пропорционален величине линейного поглощения, при этом на табло поступает число импульсов, определяемое (5).

В некоторых случаях возникает необходимость оценки величины неселективного поглощения. Эта оценка легко производится следующим способом. Примем, что $U_{x0} = U_{y0} = E_0$, тогда

$$U_{y0} a_{nc} = E_0 \cdot a_{nc}.$$

Это напряжение накапливается интегратором А1 так, что $U_{\text{вых}} A1 = E_0 a_{nc}$. На интегратор А2 напряжение не подается, поэтому $U_{c2} = 0$. Разряжая ёмкость $C1$ до нуля (аналогично определению коэффициента линейного поглощения), на выходе А4 получим:

$$E_0 a_{nc} - \frac{E_0 T_3}{R2C1} = 0, \quad a_{nc} - \frac{T_3}{\tau} = 0, \quad T = \tau a_{nc}. \quad (7)$$

Поскольку при отсутствии неселективного поглощения $a_{nc} = 1$, временной интервал, описываемый (7) максимален, и на регистрирующее устройство поступает количество импульсов согласно (5). Эти импульсы поступают на вычитающий счетчик ёмкостью 10^P так, что

$$10^P - \tau a_{nc} \cdot F_i = 0. \quad (8)$$

Выражение (8) справедливо при определенной частоте заполнения F_i , которая подбирается в процессе калибровки при отсутствии пробы в атомизаторе. Появление неселективного поглощения приводит к нарушению условия (8). Число, оставшееся в счетчике и индицируемое на табло, показывает непосредственно величину неселективного поглощения.

Из уравнения (3) следует, что напряжение U_{c2} , накапливаемое за время интегрирования, пропорционально величине α_c .

Разряжая емкость C_2 , как и в случае вычисления коэффициента неселективного поглощения (через резистор $R4$ и ключ $K3$), на выходе $A5$ получаем временной интервал:

$$E_0 \alpha_c - \frac{E_0}{R4C2} \cdot T_2 = 0, \quad (9)$$
$$T_2 = \tau \cdot \alpha_c = \tau \frac{I_x}{I_{x0}}.$$

Полученный временной интервал пропорционален величине линейного оптического пропускания исследуемого вещества, при этом на табло поступает число импульсов, определяемое выражением (5).

Наличие помех, обусловленных темновым током и рассеянным светом, приводит к появлению на выходе фотоумножителя некоторого постоянного напряжения. Это напряжение вызывает одинаковое приращение сигналов U_{c1} и U_{c2} , и поэтому при вычислении величин оптической плотности (концентраций) и коэффициента линейного поглощения отношение их не меняется.

Учёт указанных помех в случае вычисления величин α_{nc} и α_c производят путём подбора частоты заполнения F_i .

Таким образом, описанный спектрофотометр позволяет за один цикл измерения определить в абсолютных единицах как величины оптической плотности (концентраций) или линейного поглощения, так и величину линейного пропускания исследуемого образца с учетом неселективного поглощения резонансной линии. Имеется также возможность определения величины неселективного поглощения. Указанные величины определяются с компенсацией помех, вызванных как темновым фоном, рассеянным светом, так и наводками со стороны промышленной сети.

Погрешность определения величины селективного поглощения не хуже 0,1% как в режиме линейного разряда ($D=2$), так и в режиме линейного разряда ($D=3$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Львов Б. В. и др.—«ЖПС», 1968, 8, № 2, 200.
2. Прянишников В. А. Интегрирующие цифровые вольтметры постоянного тока. Л., 1976.

Поступила в редакцию
3/III 1978 г.

Кафедра общей физики

УДК 621.378

А. А. КОВАЛЕВ, Л. В. ЛЕВАШКЕВИЧ

ГЕНЕРАТОР КОГЕРЕНТНЫХ СВЕТОВЫХ ИМПУЛЬСОВ НАНОСЕКУНДНОЙ ДЛЯТЕЛЬНОСТИ

Расширение сферы применения ОКГ предъявляет все более разнообразные требования к энергетическим и спектрально-временным характеристикам их излучения. В частности, для решения ряда физических задач требуются импульсы излучения, длительность которых составляет одну либо несколько наносекунд. Существует несколько методов получения таких импульсов [1—3], однако техническая реализация этих методов достаточно сложна и требует, кроме того, специальной аппаратуры.

В настоящем сообщении описывается разработанный нами лабораторный макет ОКГ с длительностью импульсов излучения в наносекундном диапазоне, отличающийся достаточной простотой и использующий стандартное, серийно выпускаемое оборудование. Принцип действия ОКГ

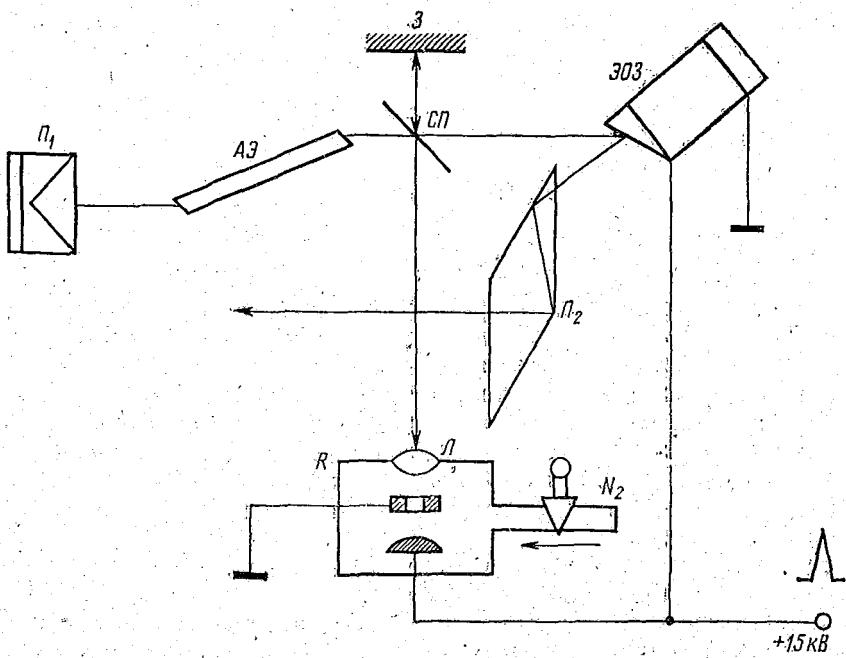


Рис. 1. Оптическая схема ОКГ

основан на быстром включении добротности при достижении максимума инверсной населенности в активном элементе и последующим затем «открыванием» резонатора при достижении в нем максимума плотности излучения [4].

Оптическая схема ОКГ представлена на рис. 1. Оптический резонатор образован глухим отражателем Π_1 и электрооптическим затвором ЭОЗ, выполненным в виде оконечного отражателя. Конструкция глухого отражателя, включающего в себя жестко закрепленные между собой стеклянную пластинку и призму полного внутреннего отражения, позволяла осуществлять раздельную юстировку оптической схемы ОКГ при снятом отражателе и последующую его юстировку (по отражению луча газового лазера от стеклянной пластины). В качестве активного элемента использовался кристалл рубина диаметром 8×120 мм с сапфировыми наконечниками, срезанными под углом Брюстера. Рубиновый элемент и лампа накачки помещались в светильник с кварцевым блоком. Высоковольтный управляющий импульс, включающий ЭОЗ, формировался стандартным блоком питания. Параллельно электрооптическому затвору подключался управляемый лазерным излучением высоковольтный разрядник R с изменяемым межэлектродным промежутком в пределах 0—15 мм. Для уменьшения времени коммутации разрядник наполнялся газообразным азотом. Давление поднималось до 10^6 Па, при этом величина межэлектродного промежутка составляла примерно 0,2—0,3 мм. Для поджига коммутирующего разрядника, включающего добротность резонатора в период формирования в нем гигантского импульса, часть излучения выводилась из резонатора с помощью стеклянной пластины СП, расположенной в резонаторе таким образом, чтобы электрический вектор генерируемого излучения находился в плоскости падения луча на пластинку. Изменяя угол падения луча на пластинку, можно регулировать величину мощности излучения, используемого для поджига разрядника. Стеклянная пластина крепилась в специальном юстировочном держателе, снабженном отсчетной шкалой, позволяющей точно определять угол ее наклона. Конструкция держателя обеспечивала плавное изменение этого угла.

Глухое зеркало З использовалось для уменьшения потерь излучения при переотражениях на гранях стеклянной пластинки, а также для регулировки уровня мощности излучения, инициирующего поджиг разрядника.

При включении электрооптического затвора в замкнутом резонаторе, образованном призмой полного внутреннего отражения глухого отражателя и призмой ЭОЗ, формируется гигантский импульс излучения. Выводимое из резонатора с помощью стеклянной пластиинки излучение фокусируется линзой Л на межэлектродный промежуток разрядника. В результате пробоя разрядного промежутка управляющее напряжение снимается с электрооптического затвора и затвор выключается. При этом накапленное в резонаторе излучение с помощью призмы-ромба Π_2 полностью выводится из резонатора за счет бокового отражения электрооптического затвора. Срабатывание разрядника и, соответственно, снятие управляющего напряжения с электрооптического затвора в момент максимальной плотности излучения в резонаторе достигалось за счет соответствующего выбора угла наклона пластиинки либо подбором нейтральных светофильтров, устанавливаемых перед разрядником.

Для регистрации параметров излучения использовались осциллограф И2-7 в сочетании с коаксиальным фотоэлементом ФЭК-09кп, интерферометр Фабри-Перо, измеритель энергии ИКТ-2М.

Как известно, длительность импульса излучения, описываемого ОКГ, определяется главным образом оптической длиной резонатора L и скоростью выключения электрооптического затвора [5]. С увеличением базы резонатора длительность импульса возрастает за счет увеличения его заднего фронта, который определяется временем полного выведения излучения из резонатора, а увеличение давления в разряднике при одновременном уменьшении его межэлектродного промежутка приводит к уменьшению длительности импульса за счет сокращения его переднего фронта. Конструкция ОКГ обеспечивала свободное перемещение оптических элементов друг относительно друга. Это обстоятельство позволяло варьировать длительность импульсов излучения ОКГ в пределах 3—5 нс. Оптическая накачка генератора изменялась в пределах от 360 Дж до 600 Дж.

Рис. 2, а иллюстрирует форму импульса генерации ОКГ при следующих условиях: $L=0,6$ м, $P=10^6$ Па, $E=600$ Дж. Как видно из приведенной осциллограммы, длительность импульса излучения в этом случае по полуширине порядка 3 нс. Энергия генерации при этом $\sim 0,1$ Дж. При тщательной настройке оптической схемы ОКГ воспроизводимость вре-

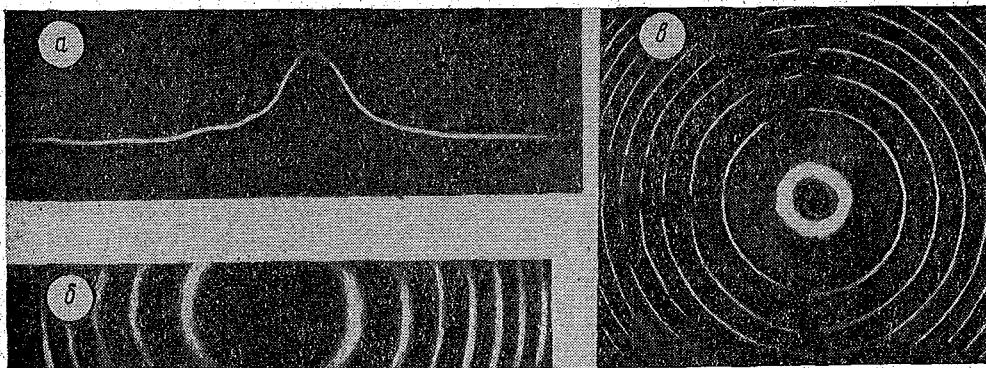


Рис. 2. Осциллограмма (длительность развертки 20 нс) (а) и интерферограммы импульсов излучения ОКГ:
с независимым включением электрооптического затвора (б), «пассивным» включением электрооптического затвора (в)

менной картины генерации 100%. Спектральная ширина излучения, измеренная с помощью интерферометра Фабри-Перо с базой 1 мм, при указанных условиях составила примерно $1,8 \text{ см}^{-1}$ (рис. 2, б).

С целью сужения спектрального состава излучения в наших экспериментах применена схема ОКГ с «пассивным» включением электрооптического затвора [6]. Отметим, что идеей «пассивного» включения ЭОЗ мы воспользовались также для получения глубокой ($\sim 90\%$) автомодуляции гигантского импульса излучения рубинового ОКГ [7].

Основной особенностью ОКГ с «пассивным» включением электрооптического затвора является то, что формированию гигантского импульса в таком ОКГ предшествует излучение пичка свободной генерации, которое является «затравочным» для моноимпульса. Оптическая схема ОКГ с «пассивным» включением ЭОЗ достаточно подробно описана в работах [6, 7]. Такой ОКГ включает в себя два резонатора — основной и дополнительный, соответствующие включенному и выключеному состоянию электрооптического затвора.

В наших экспериментах основной резонатор был образован призмой полного внутреннего отражения P_1 и электрооптическим затвором. Дополнительный резонатор включал в себя, кроме того, еще один вспомогательный отражатель. Первоначально, при достижении коэффициентом усиления уровня потерь дополнительного резонатора, в нем развивается пичок свободной генерации, стимулирующий включение блока питания ЭОЗ. Включение электрооптического затвора переводит канал генерации в основной резонатор с более высокой добротностью, в котором формируется гигантский импульс излучения.

Условия эксперимента выбирались таким образом, чтобы «затравочное» излучение пичка свободной генерации было узкополосным.

Таким образом, в таком ОКГ гигантский импульс вырастает не из спонтанного шума, как это имеет место при обычной модуляции добротности резонатора активным модулятором потерь, а из узкополосного излучения пичка свободной генерации, что способствует эффективному сужению спектра излучения генерируемого ОКГ моноимпульса. Последующий вывод излучения из основного резонатора ОКГ, как описано выше, осуществлялся за счет бокового отражения электрооптического затвора при снятии с него управляющего напряжения.

В наших экспериментах база основного и дополнительного резонаторов 0,7 и 0,9 м, соответственно. При превышении коэффициентом усиления активного элемента уровня потерь основного резонатора в $\sim 1,6$ раза спектральная ширина импульса излучения ОКГ, измеренная с помощью интерферометра Фабри-Перо с базой 30 мм, не превышала $\sim 0,02 \text{ см}^{-1}$ (рис. 2, в), а его длительность 6—7 нс. При аналогичных условиях с обычным независимым включением ЭОЗ спектральная ширина импульса излучения ОКГ $\sim 1,5 \text{ см}^{-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ernest J., Michon M. and Debrie J.—«Appl. Phys.», 1966, 22, 147.
2. Басов Н. Г. и др.—«ЖЭТФ», 1972, 62, 205.
3. Басов Н. Г. и др.—«Квантовая электроника», 1974, 1, 1428.
4. Vuyisteke A. A.—«J. Appl. Phys.», 1963, 34, 1615.
5. Левашкевич Л. В., Осицкий Г. А.—Тез. докл. XI науч.-техн. конференций молодых специалистов. Л., 1976, 126.
6. Тюшкевич Б. Н., Левашкевич Л. В., Развин Ю. В.—Материалы III Республиканской конференции молодых ученых по физике. Минск, 1975, 13.
7. Левашкевич Л. В., Тюшкевич Б. Н.—Тез. докл. XI науч.-техн. конференции молодых специалистов. Л., 1976, 126.



Математика и механика

УДК 681.3

В. В. ЖУКОВ, Л. С. КОШЕЛЕВИЧ

ВОПРОСЫ ВВОДА АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В РЕЖИМЕ ДИАЛОГА

Процесс взаимодействия пользователя с современной ЭВМ требует высокой профессиональной подготовки (знание операционной системы, языков программирования и т. д.). Повышение эффективности этого процесса невозможно без оперативной обратной связи. Обеспечение обратной связи и снижение требований к уровню подготовки пользователя возможно путем создания сервисных диалоговых систем [1], которые за счет средств диалога поддерживают эффективность взаимодействия с пользователем на протяжении всего процесса решения задачи.

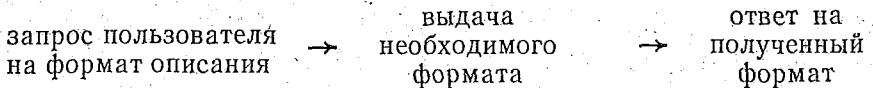
Попытка решить все проблемы, необходимые для поддержания эффективного взаимодействия, в рамках единой системы приводит к чрезмерной сложности ее математического обеспечения [2]. Если воспользоваться делением процесса решения задачи с применением ЭВМ на этапы [3], можно заметить, что наиболее узким местом является этап ввода алгоритма решения задачи в память ЭВМ и получение программы решения на одном из языков программирования.

Отмеченные недостатки процесса взаимодействия пользователя с машиной традиционно устраняются путем разработки проблемно-ориентированных языков высокого уровня (FORTRAN, COBOL и т. д.) и специальных языков программирования разговорного типа (APL, JOSS и т. д.) с применением специальных технических средств (терминалные устройства, работающие в режиме разделения времени). Следует отметить, что повышение уровня проблемной ориентации языка программирования приводит к усложнению его процедур (за счет их большей естественности), что становится неудобным по мере повышения квалификации программиста. Примером может служить проблемно-ориентированный язык ЯОД * [4].

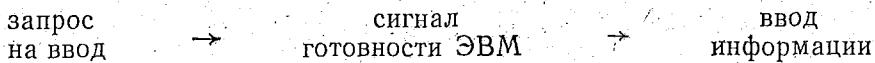
В системе СВАРЗ [5], являющейся одной из подсистем ДИСКАОД [2], решаются проблемы организации оперативного взаимодействия пользователя с ЭВМ на этапе ввода и редактирования алгоритма решения задачи обработки данных в режиме разделения времени и повышения эффективности этого процесса за счет сведения к минимуму объемов информации, поступающей от пользователя.

Основной цикл диалога с пользователем в системе СВАРЗ выглядит следующим образом:

* Оператор СЖАТЬ этого языка имеет вид СЖАТЬ МАССИВ (...) ПО КЛЮЧУ (...) ПОЛУЧАЯ МАССИВ (...)



Возможен и более простой цикл, когда пользователь самостоятельно формирует полное описание вводимой информации:



Такой цикл повторяется до тех пор, пока не будет осуществлен ввод всего алгоритма решения задачи (описания массивов и операторов языка ЯОД). Полученная информация используется развитым программным обеспечением архива системы для построения синтаксически правильных конструкций языка ЯОД.

Рассмотрим более подробно вопросы, связанные с анализом запросов пользователя и формированием текстов сообщений системы.

Пусть A_1 — множество различных сочетаний символов над алфавитом некоторого языка. Это множество можно разбить на два подмножества A_2 и A_3 : $A_1 = A_2 \cup A_3$, где A_2 — множество слов или групп слов, несущих на себе смысловую нагрузку в данном языке; A_3 — множество слов (групп слов), не имеющих для данного языка никакого смысла.

Множеству A_2 ставим в соответствие новое множество A_4 , которое является множеством ключевых слов: существует взаимно-однозначное соответствие $h: A_2 \rightarrow A_4$, которое каждому элементу из множества A_2 , т. е. слову или группе слов, ставит в соответствие определенный ключ.

Пусть B — множество, элементами которого является последовательность выражений данного языка. Существует взаимно-однозначное соответствие $f: A_4 \rightarrow B$, тогда существует взаимно-однозначное соответствие $h \cdot f: A_2 \rightarrow B$.

Таким образом, каждому слову (группе слов) соответствует выражение, разъясняющее его смысл.

Существует соответствие $g: A_3 \rightarrow C$, где C — множество, состоящее из последовательности выражений, разъясняющих, почему элемент множества A_3 не имеет смысла.

Таким образом, если есть какое-либо сочетание символов $a_1 \in A_1$, можно найти объяснение смысла этого сочетания следующим образом:

если $a_1 \in A_2$, то $h(a_1) = a_4 \in A_4$, $f(a_4) = b \in B$;

если $a_1 \in A_3$, то $g(a_1) = c \in C$.

В системе СВАРЗ A_1 — множество запросов пользователя; A_2 — множество правильных запросов, которым соответствуют операторы языка ЯОД и описания исходных данных; A_3 — множество ошибочных запросов.

Множеству правильных запросов A_2 поставлено в соответствие множество A_4 , элементами которого являются сокращенные названия описаний исходных данных и операторов. При размещении в памяти ЭВМ элементы множества A_4 занимают значительно меньший объем памяти по сравнению с элементами множества A_2 , что существенно сокращает время их ввода и обработки.

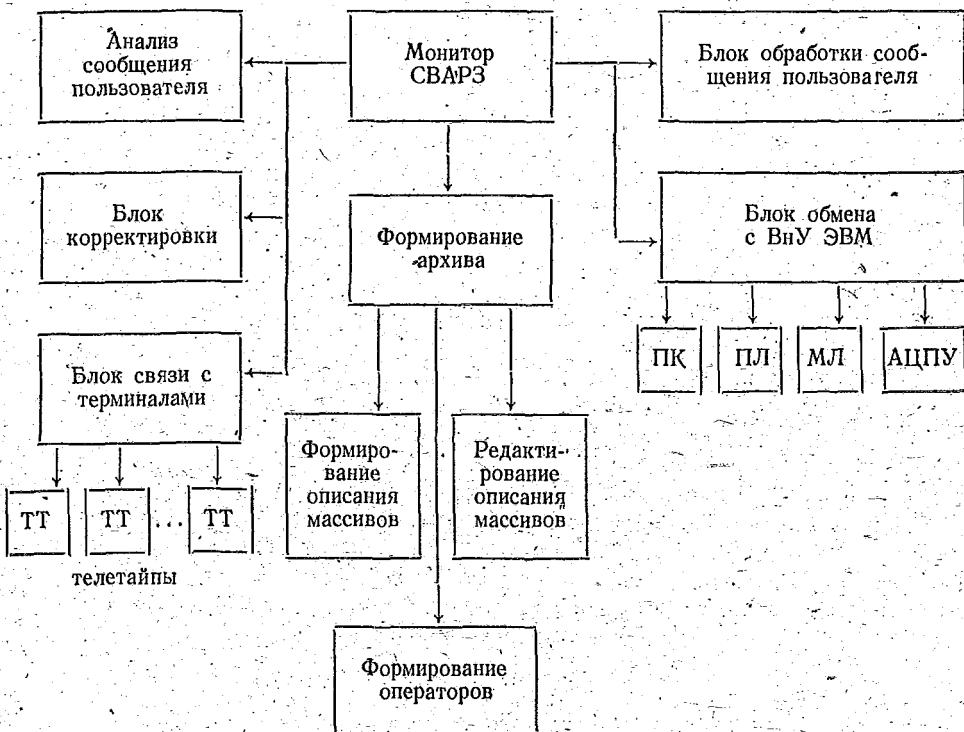
Элементами множества B являются форматы операторов языка ЯОД; C — множество реакций системы на ошибки пользователя.

Таким образом, при поступлении запроса в систему производится следующее:

если $a_i \in A_4$, то система находит соответствующий формат $f(a_i) = b_i \in B$ и выдает его пользователю;
 если $a_i \in A_3$, то система выдает пользователю реакцию на ошибку $g(a_i) = c_i \in C$.

В системе СВАРЗ множество C состоит из одного элемента и на любой ошибочный запрос выдается единственное сообщение:

ВЫ ОШИБЛИСЬ. ПОВТОРИТЕ ЗАПРОС.



По разрешению системы СВАРЗ (см. таблицу) на ввод директивы пользователь с помощью соответствующего запроса производит вызов необходимого ему формата. Распечатываемый на терминале формат состоит из пронумерованных строк, в каждой из которых многоточием, заключенным в круглые скобки, помечается та информация, которую должен ввести пользователь для заполнения формата с целью получения оператора программы или описания массива. В каждой строке содержится не более одного неизвестного, которое вводится пользователем под тем же номером, что и строка:

система

ВВОДИТЕ ЗАПРОС

пользователь

СЖАТЬ

система

1. СЖАТЬ МАССИВ (...)
2. ПО КЛЮЧУ (...)
3. ПОЛУЧАЯ МАССИВ (...)

пользователь

1. M1

2. N

3. M2

В процессе ввода информации пользователь может допускать различного рода синтаксические ошибки, которые в основном исправляются с помощью соответствующих программных средств системы. Это позволяет сформировать синтаксически правильные конструкции языка ЯОД, что сокращает количество бесполезных выходов на машину в процессе отладки полученной программы. В результате обработки информации по приведенному выше диалогу в системе будет получена следующая фраза языка ЯОД:

СЖАТЬ МАССИВ М1 ПО КЛЮЧУ Н ПОЛУЧАЯ
МАССИВ М2.

Полученную в результате работы с системой программу решений задачи пользователь может по желанию вывести на любой из внешних носителей информации ЭВМ «Минск-32» (МЛ, ПК, ПЛ) с одновременной распечаткой текста полученной программы на АЦПУ.

В системе предусмотрены возможность прерывания процесса ввода алгоритма по желанию пользователя с сохранением промежуточных результатов на МЛ, а также продолжения ввода с точки прерывания (режим продолжения). Пользователь может вносить изменения в текст сформированной программы в режиме корректировки.

Система СВАРЗ реализована на базе ЭВМ «Минск-32» с использованием аппаратуры передачи данных «Минск-1560» и телетайпов в качестве пультов пользователей.

Предусмотрена возможность одновременной работы пяти пользователей в режиме разделения времени. Параллельно с работой системы могут выполняться другие программы, если позволяют ресурсы памяти (система занимает около 458 листов памяти).

В заключение хочется отметить возможность легкой перестройки системы на работу с другими языками программирования и на ввод произвольной информации, при этом необходимо лишь заменить информационные массивы форматов и ключевых слов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Человек и вычислительная техника. Под общ. ред. акад. В. М. Глушкова. Киев, 1971.
2. Диалоговая система для конструирования алгоритмов обработки данных (Инструкция для пользователей), ИК АН УССР, БГУ, ИП УССР. Киев, 1975.
3. Довгяло А. М. и Стогий А. А. Диалог человека и ЭВМ. М., 1975.
4. Решение задач обработки данных с помощью ЭВМ. (Инструкция для пользователей системы ЯОД-75), ИП УССР, ИК АН УССР. Киев, 1975.
5. Система ввода алгоритма решения задач обработки данных с удаленного терминала (проспект). Минск, 1976.

Поступила в редакцию
10/11 1976 г.

Вычислительный центр

УДК 681.3.06.51

Л. В. ПЕВЗНЕР

ПРОГРАММНЫЕ И СМ-ГРАММАТИКИ

С развитием системного программирования возникает необходимость формализации не только синтаксиса, но и семантики языков программирования. Однако возможности контекстно-свободных (КС) грамматик ограничены. Разрешить эту задачу помогают грамматики, описывающие классы языков, объемлющих класс КС-языков: программные [1], индексные [2], СМ-грамматики [3, 4], грамматики ван Вейнгаардена [5] и др.

Для каждого из методов формализации с помощью этих грамматик характерны определенные достоинства и недостатки: одни из них очень сложны и труднореализуемы, другие не являются универсальными, третьи еще находятся в стадии развития. Разрабатывать методы анализа для каждой из формализаций является задачей весьма трубоемкой. Более перспективным представляется иметь несколько эффективных анализаторов, разработанных специально для отдельных формализаций, и систему алгоритмов, позволяющих сводить грамматики одного вида к грамматикам другого с наименьшими потерями специфических свойств грамматик.

В настоящей работе предлагается один из способов сводимости программной грамматики к СМ-грамматике.

Программные грамматики позволяют управлять выводом цепочки, что весьма удобно для описания контекстных условий, однако, проверка этих условий очень сложна; что не позволяет разработать эффективный анализатор. В свою очередь, СМ-грамматики обладают мощным и удобным аппаратом анализа, заложенным в самом описании правил грамматики. По сути дела, построив СМ-грамматику, получим анализатор языка, задаваемого этой грамматикой.

Покажем, что программная грамматика сводится к СМ-грамматике за конечное число шагов и опишем алгоритм анализа языка с помощью такой СМ-грамматики.

Определение 1. Программной грамматикой называется $G_1 = (T_1, N_1, R_1, P_1, S)$, где 1) T_1 — алфавит терминальных символов; 2) N_1 — алфавит нетерминальных символов; 3) R_1 — множество меток правил; 4) P_1 — алфавит правил грамматики; 5) S — аксиома (начальный символ).

Каждый номер r из R_1 соответствует единственному правилу вывода:

$$r) \varphi \rightarrow \psi, S(V)F(W), \quad (1)$$

$S(V)$ и $F(W)$ называются, соответственно, множествами удач и неудач и содержат метки правил, которые необходимо выполнить, если данное правило применялось (множество удач) или нет (множество неудач). Каждый элемент из $S(V)$ или $F(W)$ принадлежит R_1 . Ядром правила (1) является $\varphi \rightarrow \psi$, где φ, ψ — цепочка из $(T_1 \cup N_1)^*$.

Определение 2. Программная грамматика называется грамматикой с КС-ядром (КСП-Г), если каждое ее правило содержит ядро с единственным символом слева и цепочкой справа.

Известно, что множество языков, порождаемых КСП-Г, совпадает с множеством рекурсивно-перечислимых языков [1].

Определение 3. СМ-грамматикой (СМ-Г) называется $G_2 = (T_2, N_2, \Gamma, R_2, r_0, r_\infty)$, где 1) T_2 — терминальный алфавит; 2) N_2 — нетерминальный алфавит; 3) Γ — магазинный алфавит ($\Gamma \subset (R_2 \cup T_2)$); 4) R_2 — множество имён, соответствующих комплексам правил; 5) r_0 — аксиома грамматики (имя начального комплекса правил); 6) r_∞ — имя заключительного комплекса правил; 7) P_2 — множество правил вывода.

Выбор правила из комплекса связан с выполнением дополнительной операции над памятью, состоящей из n -магазинов. Каждое правило r из множества P_2 имеет вид

$$a \xrightarrow{W_m(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)} r, \quad (2)$$

где $a \in T_2$, $r \in R_2$ — имя комплекса правил, к которому осуществляется переход после применения данного правила, если выполняется отношение W_m .

$W_m(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — n -арное отношение, определяющее вид операции над памятью ($m=0, 1, 2$). При $m=0$ никаких операций над магазином не производится; при $m=1$ ($m=2$) в магазин с номером i ($i=1, n$) записывается (стирается) цепочка $a_i \neq \emptyset$. Запись цепочки a_i происходит

слева направо; стирание при условии совпадения в правиле грамматики цепочки $a_i \neq \emptyset$ и заполнения верхних ячеек i -го магазина. При несовпадении этих цепочек, хотя бы для одного i , правило считается неприменимым, и стирание из магазина не выполняется. Если $a_i = \emptyset$, то содержимое i -го магазина не изменяется.

Известно, что класс языков, порождаемых СМ-Г, совпадает с классом рекурсивно-перечислимых языков [3].

Установим связь между КСП-Г и СМ-Г. Для этого введем дополнительное обозначение. Пусть $W_2^{i,j}$ означает комбинацию операций стирания элементов из вершины i -го магазина и записи их, по мере стирания, в вершину j -го магазина. Кроме того, будем называть КСП-Г однозначной, если все правила ее с одной и той же левой частью не начинаются с одинакового терминального символа в правой части.

Утверждение 1. Для каждой однозначной КСП-Г можно построить эквивалентную ей четырехмагазинную СМ-Г.

Доказательство. Пусть дана КСП-Г $G_1 = (T_1, N_1, R_1, P_1, S)$. Рассмотрим СМ-Г $G_2 = (T_2, N_2, \Gamma, R_2, P_2, r_0, r_\emptyset)$. Здесь терминальный алфавит T_2 совпадает с алфавитом T_1 . Множествам N_1, R_1 поставим в соответствие множества N_2 и R_2 . Начальный комплекс r_0 указывает, что S является аксиомой G_1 и образует правило

$$r_0 \sim \{\emptyset \xrightarrow{W_1 (*, S, *, *, *)} r_1\}. \quad (3)$$

Установим соответствие между правилами множеств P_1 и P_2 . Пусть дано правило из G_1 :

$$p_i: A \rightarrow \psi, S(V_i)F(W_i), \quad (4)$$

где $A \in N_1$, $p_i \in R_1$, $(V_i, W_i) \subset R_1$, $V_i = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{in}\}$, $W_i = \{w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in}\}$, $\psi = x_1x_2\dots x_n$, $x_i \in (N_1 \cup T_1)$, $\psi' = x_nx_{n-1}\dots x_2x_1$.

Обозначим $x_1 = \alpha$ (т. е. $\alpha = \emptyset$ или $\alpha \in T_1$), $x_j = \beta$, если $x_j \in T_1$ (т. е. $\beta = \emptyset$ либо $\beta \in T_1$), $j = 2, n$; $z \in T_1 \cup N_1$; $t \in V_i \cup W_i$.

Каждому правилу p_i (4) из G_1 будет соответствовать набор комплексов правил грамматики G_2 :

$$\begin{aligned} r_i &\sim \{\alpha \xrightarrow{W_1 (A\beta, \emptyset, \emptyset, \emptyset)} r_{i1}, \emptyset \xrightarrow{W_2} r_{i2}\}; \\ r_{i1} &\sim \{\beta \xrightarrow{W_1 (\psi', \emptyset, 1, \emptyset)} r_{i4}\}; \\ r_{i2} &\sim \{\alpha \xrightarrow{W_2 (A, \emptyset, \alpha, \emptyset)} r_{i1}, \emptyset \xrightarrow{W_2 (*, *, *, \emptyset)} r_{i5}\}, \\ \emptyset &\xrightarrow{W_2 (*, \emptyset, \emptyset, \emptyset)} r_{i3}, \emptyset \xrightarrow{W_2^{1,2} (z, \emptyset, \emptyset, \emptyset)} r_{i2}; \\ r_{i3} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_1 (*, \emptyset, \emptyset, \emptyset)} r_{i4}\}; \\ r_{i4} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_2 (\emptyset, *, \emptyset, \emptyset)} r_{i6}, \emptyset \xrightarrow{W_2^{1,2} (\emptyset, z, \emptyset, \emptyset)} r_{i4}\}; \\ r_{i6} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_1 (*, *, *, \emptyset)} r_{i11}\}; \\ r_{i9} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_1 (\emptyset, *, \emptyset, \emptyset)} r_{i7}\}; \\ r_{i7} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_2 (\emptyset, \emptyset, 1, \emptyset)} r_{i8}, \emptyset \xrightarrow{W_2} r_{i10}\}; \\ r_{i8} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_2 (\emptyset, \emptyset, \emptyset, *)} r_{i9}, \emptyset \xrightarrow{W_2 (\emptyset, \emptyset, \emptyset, v_j)} r_{i8}\}; \\ r_{i9} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_1 (\emptyset, \emptyset, \emptyset, * v_k v_{k-1} \dots v_2)} r_{i11}\}; \\ r_{i10} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_2 (\emptyset, \emptyset, \emptyset, *)} r_{i11}, \emptyset \xrightarrow{W_2 (\emptyset, \emptyset, \emptyset, t)} r_t\}; \\ r_{i11} &\sim \{\emptyset \xrightarrow{W_1 (\emptyset, \emptyset, \emptyset, * w_l w_{l-1} \dots w_1)} r_{i10}\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь комплексы правил r_{i8}, r_{i9} и r_{i10}, r_{i11} реализуют выбор правил из множеств $S(V_i)$ и $F(W_i)$, соответственно.

Заключительный комплекс правил r_\emptyset и G_2 будет соответствовать метке «stop», указывающей на конец вывода цепочки в G_1 .

$$r_\emptyset \sim \{\emptyset \xrightarrow{W_2(*, *, *, *)} \text{stop}, \beta \xrightarrow{W_2(\beta, \emptyset, \emptyset, \emptyset)} r_\emptyset\}. \quad (6)$$

Рассмотрим произвольную цепочку

$$\varphi = a_1 a_2 \dots a_m \in L(G_1) \quad (7)$$

и покажем, что $\varphi \in L(G_2)$.

По (7) всегда найдется вывод $y_1 y_2 \dots y_m = y(y_1 = a_1, \dots, y_m = a_m)$, порождаемый правилами

$$p_1, p_2, \dots, p_{m-1} \in R_1. \quad (8)$$

По данной последовательности (8) с помощью (3), (5) и (6) можно построить последовательность СМ-правил, которая является выводом этой же цепочки φ , т. е. справедливо $L(G_1) \subseteq L(G_2)$.

Для доказательства обратного включения достаточно каждому набору правил четырехмагазинной СМ-Г вида (3), (5), (6) поставить в соответствие правило p_i (4) КСП-Г. Таким образом, получим вывод цепочки φ в грамматике G_1 . Утверждение доказано.

Рассмотрим контекстную программную грамматику с правилами вида

$$p_i: \gamma_1 A \gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \psi \gamma_2, S(V_i) F(W_i); \quad (9)$$

где $\gamma_1 = y_1 y_2 \dots y_n$, $\gamma_2 = z_1 z_2 \dots z_m$, $\psi = a x_2 x_3 \dots x_l$, $a \in T_2$ либо $a = \emptyset$, $(\gamma_1, \gamma_2, \psi) \in (N_1 \cup T_1)^*$, $A \in N_1$, $\gamma'_1 = y_n y_{n-1} \dots y_2 y_1$, $\gamma'_2 = z_m z_{m-1} \dots z_2 z_1$.

Тогда набор правил (5), (6) и (3) изменится следующим образом:

$$r_i \sim \{\alpha \xrightarrow{W_2(\gamma_2 A y_n y_{n-1} \dots y_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset, * y_{j-1} y_{j-2} \dots y_1)} r_{i1}, \emptyset \xrightarrow{W_0} r_{i2}\},$$

$$r_{i1} \sim \{\alpha \xrightarrow{W_2(\gamma_2 A y_n y_{n-1} \dots y_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset, * y_{j-1} \dots y_1)} r_{i1}, \quad (5')$$

$$\emptyset \xrightarrow{W_2(*, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)} r_{i3}, \emptyset \xrightarrow{W_2^1, 2(z, \emptyset, \emptyset, \emptyset)} r_{i2}\};$$

$r_{i2} - r_{i10}$ соответствуют правилам $r_{i2} \leftarrow r_{i10}$ набора (5);

$$r_{i11} \sim \{\emptyset \xrightarrow{W_1(\emptyset, \emptyset, \emptyset, * w_l w_{l-1} \dots w_1, \emptyset)} r_{i10}\};$$

$$r_\emptyset \sim \{\emptyset \xrightarrow{W_2(*, *, *, *, \emptyset)} \text{stop}, \beta \xrightarrow{W_2(\beta, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)} r_\emptyset\}; \quad (6')$$

$$r_0 \sim \{\emptyset \xrightarrow{W_1(* S, *, *, *)} r_{i1}\}. \quad (3')$$

Можно сформулировать утверждение, доказательство которого аналогично предыдущему.

Утверждение 2. Для каждой программной грамматики с контекстно-связанным ядром можно построить эквивалентную ей пятимагазинную СМ-Г.

Алгоритм построения СМ-грамматики по контекстной программной грамматике. Пусть дана программная грамматика с контекстно-связанным ядром, правила которой имеют структуру (9); d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 — указатели вершин магазинов M_1, M_2, M_3, M_4 и M_5 , соответственно. Над магазином $M_j (j=1, 5)$ можно осуществлять следующие операции:

а) запись по адресу D символа из вершины магазина M_j : $D := M_j(d_j-1); d_j := d_j-1$;

б) чтение в вершину магазина M_j символа из D : $M_j(d_j) := D; d_j := d_j+1$.

Строим комплекс r_0 (8'), что эквивалентно следующим действиям над магазинами:

$$M_1(d_1) := *; M_1(d_1+1) := S; d_1 := d_1 + 2;$$

$$M_2(d_2) := M_3(d_3) := M_4(d_4) := M_5(d_5) := *;$$

$$d_2 := d_2 + 1; d_3 := d_3 + 1; d_4 := d_4 + 1; d_5 := d_5 + 1.$$

Каждому i -правилу ставим в соответствие набор правил вида (5'), что эквивалентно следующим действиям над магазинами:

Комплекс r_{i1} . Если $(x_1 \in T_1) \wedge (M_1(d_1 - m - 2 - n + j, \dots, d_1 - 1, d_1) = z_m, \dots, z_1, A, y_n, \dots, y_j) \wedge (M_5(d_5 - n + j, \dots, d_5) = *, y_n, \dots, y_{j-1})$, то порождается (анализируется) символ x_1 , $d_1 := d_1 - m - 2 - n + j$, $d_5 := d_5 - n + j - 1$; идти на выполнение правил из комплекса r_{i1} , в противном случае выполнять правила из комплекса r_{i2} .

Комплекс r_{i1} .

$M_1(d_1, d_1 + 1, \dots, d_1 + m - 1) := z_m, z_{m-1}, \dots, z_1; d_1 := d_1 + m;$

$M_1(d_1, d_1 + 1, \dots, d_1 + l - 2) := x_l, x_{l-1}, \dots, x_2; d_1 := d_1 + l - 1;$

$M_1(d_1, d_1 + 1, \dots, d_1 + j - 1) := y_n, y_{n-1}, \dots, y_j; d_1 := d_1 + j;$

$M_3(d_3) := 1; d_3 := d_3 + 1;$

$M_5(d_5, d_5 + 1, \dots, d_5 + j) := *, y_{j-1}, y_{j-2}, \dots, y_1;$

$M_5(d_5 + j + 1) := x_1; d_5 := d_5 + j + 2;$

идти на выполнение правил из комплекса r_{i4} .

Комплекс r_{i2} . Если $(x_1 \in T_1) \wedge (M_4(d_1 - m - 2 - n + j, \dots, d_1) = z_m, \dots, z_1, A, y_n, \dots, y_j) \wedge (M_5(d_5 - j, \dots, d_5) = y_{j-1}, \dots, y_1)$, то порождается (анализируется) символ x_1 , $d_1 := d_1 - m - n + j$, $d_5 := d_5 - (n - j + 1)$; идти на выполнение правил из комплекса r_{i1} .

Если $M_1(d_1) = M_2(d_2) = M_3(d_3) = *$, то $d_1 := d_1 - 1$; $d_2 := d_2 - 1$; $d_3 := d_3 - 1$; идти на выполнение правил из комплекса r_{i3} .

В противном случае $M_2(d_2) := M_1(d_1 - 1)$; $d_1 := d_1 - 1$; $d_2 := d_2 + 1$; идти на выполнение правил из r_{i2} .

Комплекс r_{i3} . $M_1(d_1) := *; d_1 := d_1 - 1$; идти на выполнение правил из r_{i4} .

Комплекс r_{i4} . Если $M_2(d_2) = *$, то $d_2 := d_2 - 1$; идти на выполнение правил из r_{i6} . В противном случае $M_2(d_2) := M_1(d_1 - 1)$; $d_1 := d_1 - 1$; $d_2 := d_2 + 1$; идти на выполнение правил из r_{i4} .

Комплекс r_{i5} . $M_1(d_1) := M_2(d_2) := M_3(d_3) := *; d_1 := d_1 + 1$; $d_2 := d_2 + 1$; $d_3 := d_3 + 1$; идти на выполнение правил из r_{i10} .

Комплекс r_{i6} . $M_2(d_2) := *; d_2 := d_2 + 1$; идти на выполнение правил из r_{i7} .

Комплекс r_{i7} . Если $M_3(d_3) = 1$, то $d_3 := d_3 - 1$; идти на выполнение правил из r_{i8} . В противном случае идти на выполнение правил из r_{i10} .

Комплекс r_{i8} . Если $M_4(d_4) = *$, то $d_4 := d_4 - 1$, идти на выполнение правил из r_{i9} . В противном случае $d_4 := d_4 - 1$; идти на выполнение правил из r_{i8} .

Комплекс r_{i9} . $M_4(d_4) := *; M_4(d_4 + 1, \dots, d_4 + n - 1) := v_n, v_{n-1}, \dots, v_1$; $d_4 := d_4 + n - 1$; идти на выполнение правил из r_{v1} .

Комплекс r_{i10} . Если $M_4(d_4) = *$, то $d_4 := d_4 - 1$; идти на выполнение правил из r_{i11} . В противном случае при $M_4(d_4) = t$, $d_4 := d_4 - 1$; идти на выполнение правил из r_t .

Комплекс r_{i11} . $M_4(d_4, d_4 + 1, \dots, d_4 + l) := *; w_l, \dots, w_1; d_4 := d_4 + l$; идти на выполнение правил из r_{i10} .

Если $\text{stop} \in S(V_i) \cup E(W_i)$, то строятся правила (6') заключительного комплекса r_θ , что эквивалентно следующим действиям.

Комплекс r_θ . Если $M_1(d_1) = M_2(d_2) = M_3(d_3) = M_4(d_4) = M_5(d_5) = *$, то вывод закончен; если $M_1(d_1) = \beta$, то β -анализируемый символ, $d_1 := d_1 - 1$; идти на выполнение правил из r_θ .

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет без предварительных затрат получить эффективный анализатор языков, заданных программными грамматиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенкранц Д. Программные грамматики и классы формальных языков. — Сборник переводов по вопросам информационной теории и практики. ВИНИТИ, 1970, № 16, 117.
2. Ахо А. Индексные грамматики — расширение контекстно-свободных грамматик. Языки и автоматы. Под ред. А. Н. Маслова и Э. Д. Стоцкого, 1975.

3. Вельбиккий И. В.—«Кибернетика», 1973, № 3, 47.
 4. Глушков В. М. и др. Алгебра. Языки. Программирование. Киев, 1975.
 5. Алгоритмический язык АЛГОЛ-68.—«Кибернетика», 1969, ч. 1, № 6, 17; 1970, ч. 2, № 1, 13.

Поступила в редакцию
28/II 1976 г.

Кафедра МО ЭВМ

УДК 518.517.91/.94

В. Н. ШАЛИМА

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОДНОШАГОВЫМИ МЕТОДАМИ

Пусть для задачи Коши

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad (1)$$

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2)$$

необходимо найти в точке $X > x_0$ с абсолютными ошибками, не превосходящими величины $\varepsilon > 0$, значения решения и его производных до порядка $m-1$ включительно. Будем считать функцию $f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$ достаточно гладкой в следующей области G_ε изменения ее аргументов: $x \in [x_0, X]$, границы изменения $y^{(i)} = y^{(i)}(x, \xi, \eta^{(0)}, \dots, \eta^{(m-1)})$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, описываются изменением начальных данных $\xi, \eta^{(0)}, \dots, \eta^{(m-1)}$, где $\xi \in [x_0, X]$, а $\eta^{(i)}$ такие, что выполняются неравенства

$$|y^{(i)}(X, x_0, y_0, \dots, y_0^{(m-1)}) - y^{(i)}(X, \xi, \eta^{(0)}, \dots, \eta^{(m-1)})| \leq \varepsilon, \\ i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Здесь и далее через $y^{(i)}(x, \alpha, \beta^{(0)}, \dots, \beta^{(m-1)})$ обозначена i -ая производная по x решения $y(x)$ уравнения (1) при начальных условиях $y^{(i)}(\alpha) = \beta^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Предположим, что для решения поставленной задачи избран одностадийный метод, позволяющий по информации типа (2) в точке x_n находить в очередной точке $x_{n+1} = x_n + h$ значения приближенного решения и его первых $m-1$ производных с локальной погрешностью порядка h^{m+1} . Рассмотрим вопрос о его сходимости.

Обозначим через $y^{(i)}(x, x_n, y_n^{(0)}, \dots, y_n^{(m-1)}) = y_n^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, точное значение в точке x i -ой производной по x решения уравнения (1) в случае начальных данных $x_n, y_n^{(0)}, \dots, y_n^{(m-1)}$, где $y_n^{(i)}$ — приближенное значение i -ой производной искомого решения в точке x_n . При этом $y_n^{(0)}(x) = y_n(x)$, $y_n^{(0)} = y_n$, $n = 0, 1, \dots, N$. Введем, кроме того, обозначение

$$\bar{E}_n = [y_0(x_n) - y_n, y'_0(x_n) - y'_n, \dots, y_0^{(m-1)} - y_n^{(m-1)}]^T, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

где T — знак транспонирования.

Предположим, что для всех $i = 0, 1, \dots, n$ выполняются неравенства

$$\|\bar{E}_i\|_F e^{(X-x_i)F} \leq \frac{\varepsilon}{N}, \quad (3)$$

где $F > 0$ — некоторая постоянная, и покажем, что, если шаг h выбран достаточно малым, удовлетворяющим, например, неравенству

$$h^k \leq \frac{\varepsilon}{(X-x_0)C}, \quad (4)$$

где $C > 0$ — постоянная величина, то неравенства (3) выполняются также для значений $i = n+1, \dots, N$, и приближенное решение не выйдет за пределы области G_ε . Для этого рассмотрим вектор \bar{E}_{n+1} , который можно представить в форме

$$\bar{E}_{n+1} = \begin{bmatrix} y_0(x_{n+1}) - y_n(x_{n+1}) + y_n(x_{n+1}) - y_{n+1} \\ y'_0(x_{n+1}) - y'_n(x_{n+1}) + y'_n(x_{n+1}) - y'_{n+1} \\ \vdots \\ y_0^{(m-1)}(x_{n+1}) - y_n^{(m-1)}(x_{n+1}) + y_n^{(m-1)}(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(m-1)} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

или

$$\bar{E}_{n+1} = \bar{z}_{n+1} + \bar{R}_{n+1}, \quad (6)$$

где $\bar{z}_{n+1} = [y_0(x_{n+1}) - y_n(x_{n+1}), \dots, y_0^{(m-1)}(x_{n+1}) - y_n^{(m-1)}(x_{n+1})]^T$,

$$\bar{R}_{n+1} = [r_{n+1}^{(0)}, r_{n+1}^{(1)}, \dots, r_{n+1}^{(m-1)}]^T,$$

$$r_{n+1}^{(i)} = y_n^{(i)}(x_{n+1}) - y_{n+1}^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

причем, согласно предположению, $r_{n+1}^{(i)} = O(h^{k+1})$ для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$. На основании (6) получаем

$$\|\bar{E}_{n+1}\|_1 \leq \|\bar{z}_{n+1}\|_1 + \|\bar{R}_{n+1}\|_1, \quad (7)$$

при этом, очевидно, для $\|\bar{R}_{n+1}\|_1$ справедлива оценка $\|\bar{R}_{n+1}\|_1 \leq h^{k+1} R$, где $R > 0$ — константа.

Для оценки $\|\bar{z}_{n+1}\|_1$ рассмотрим вектор

$$\bar{z}(x) = [y_0(x) - y_n(x), y'_0(x) - y'_n(x), \dots, y_0^{(m-1)}(x) - y_n^{(m-1)}(x)]^T.$$

Так как

$$y_0^{(i)}(x) = y^{(i)}[x, x_n, y_0(x_n), \dots, y_0^{(m-1)}(x_n)], \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

то $\bar{z}(x)$ есть решение системы дифференциальных уравнений $\bar{z}'(x) = A(x)\bar{z}(x)$ с начальными условиями

$$\bar{z}(x_n) = [y_0(x_n) - y_n, y'_0(x_n) - y'_n, \dots, y_0^{(m-1)}(x_n) - y_n^{(m-1)}]^T,$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\text{где } A(x) = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial f}{\partial y''} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y^{(m-2)}} & \frac{\partial f}{\partial y^{(m-1)}} \end{array} \right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = \frac{\partial}{\partial y^{(i)}} f[x, y_n, y'_n, \dots, y_n^{(i)}] + \Theta_i(x) [y_0^{(i)}(x_n) - y_n^{(i)}], \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$0 < \Theta_i(x) < 1, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда, согласно [1], учитывая введенные обозначения, получаем

$$\bar{z}(x) = \Omega(x_n, x) \bar{E}_n. \quad (8)$$

Здесь $\Omega(x_n, x)$ есть матрицант матрицы $A(x)$, причем

$$\|\Omega(x_n, x)\|_1 \leq \bar{e}_{x_n}^{\frac{x-x_n}{h}} \|A(x)\|_1 dt. \quad (9)$$

Пусть

$$F = \max \left\{ 1, \sum_{i=0}^{m-1} M_i \right\}, \quad \text{где } M_i = \max_{G_i} \left| \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \right|, \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда неравенство (9) примет вид

$$\|\Omega(x_n, x)\|_1 \leq e^{(x-x_n)F}. \quad (10)$$

Полагая в равенстве (8) $x = x_{n+1}$ и учитывая (10), получаем

$$\|\bar{z}(x_{n+1})\|_1 = \|\bar{z}_{n+1}\| \leq \|\bar{E}_n\|_1 e^{(x_{n+1}-x_n)F}.$$

Таким образом, принимая во внимание последнее неравенство, для $\|\bar{E}_{n+1}\|_I$ из (7) имеем

$$\|\bar{E}_{n+1}\|_I \leq \|\bar{E}_n\|_I e^{(x_{n+1}-x_n)F} + h^{k+1}R. \quad (11)$$

Умножая неравенство (11) на $e^{(X-x_{n+1})}$ и учитывая (3) при $i=n$, получим

$$\|\bar{E}_{n+1}\|_I e^{(X-x_{n+1})} \leq \frac{n\varepsilon}{N} + h^{k+1} Re^{(X-x_0)F}.$$

Отсюда, полагая $C = Re^{(X-x_0)F}$ и учитывая (4), получаем

$$\|\bar{E}_{n+1}\|_I \leq \frac{(n+1)\varepsilon}{N}.$$

Аналогичные неравенства нетрудно получить для $i=n+2, \dots, N$. Оценим при сделанных предположениях скорость сходимости вычислительного метода. На основании неравенства (11), при $\|\bar{E}_0\|_I=0$, справедлива оценка

$$\|\bar{E}_n\|_I \leq h^{k+1}R(1 + e^{hF} + e^{2hF} + \dots + e^{(n-1)hF}) = h^{k+1}R \frac{e^{nhF}}{e^{hF} - 1},$$

где $h = x_{n+1} - x_n$.

Принимая во внимание очевидные неравенства $e^u - 1 \geq u$; $e^u - 1 \leq ue^u$, получаем $\|\bar{E}_n\|_I \leq h^n C(X-x_0)$. Отсюда следует равномерная сходимость метода со скоростью порядка h^k , причем, если выполнено неравенство (4), то $\|\bar{E}_n\|_I \leq \varepsilon$.

Приведем примеры вычислительных правил решения задачи (1), (2), построенных способом, основанным на принципе последовательного повышения порядка точности результата [2], для конкретных значений m . В целях сокращения записей используем обозначения $f_n^{[\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{m-1}]} = f(x_n + yh, y_{n+1}^{[\mu_0]}, \dots, y_{n+1}^{[\mu_{m-1}]})$, где $y_{n+1}^{[\mu_i]}$ есть приближенные значения величин $y^{(\mu_i)}(x_n + yh)$, найденных с локальными ошибками порядка h^{μ_i} , $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Метод четвертого порядка точности для $m=2$:

$$[2] \quad y_{n+1/6}^{[5]} = y_n^{[5]} + \frac{h}{6} f_n^{[5, \mu_1]}.$$

$$[3] \quad y_{n+1/6}^{[5]} = y_n^{[5]} + \frac{h}{6} y_n^{[5]} + \frac{h^2}{72} f_n^{[5, \mu_1]},$$

$$[3] \quad y_{n+1/3}^{[5]} = y_n^{[5]} + \frac{h}{3} f_{n+1/6}^{[3, 2]},$$

$$[4] \quad y_{n+1/3}^{[5]} = y_n^{[5]} + \frac{h}{3} y_n^{[5]} + \frac{h^2}{54} [f_n^{[5, \mu_1]} + 2f_{n+1/6}^{[3, 2]}],$$

$$[4] \quad y_{n+1/2}^{[5]} = y_n^{[5]} + \frac{h}{8} [f_n^{[5, \mu_1]} + 3f_{n+1/3}^{[4, 3]}],$$

$$[4] \quad y_{n+1/2}^{[5]} = y_n^{[5]} + \frac{h}{2} y_n^{[5]} + \frac{h^2}{16} [f_n^{[5, \mu_1]} + f_{n+1/3}^{[4, 3]}],$$

$$[4] \quad y_{n+1}^{[5]} = y_n^{[5]} + \frac{h}{2} [f_n^{[5, \mu_1]} - 3f_{n+4/3}^{[4, 3]} + 4f_{n+1/2}^{[4, 4]}],$$

$$[5] \quad y_{n+1}^{[5]} = y_n^{[5]} + hy_n^{[5]} + \frac{h^2}{6} [f_n^{[5, \mu_1]} + 2f_{n+1/2}^{[4, 4]}],$$

$$[5] \quad y_{n+1}^{[5]} = y_{n+1}^{[5]} + \frac{h}{6} [f_n^{[5, \mu_1]} + 4f_{n+1/2}^{[4, 4]} + f_{n+1}^{[5, 4]}].$$

Здесь μ_1 может принимать значения 4 или 5. При $\mu_1=4$ приведенное правило требует четырехкратного вычисления значений правой части уравнения на одном шаге вычислений, при $\mu_1=5$ — пятикратного. Если к нему присоединить формулу

$$[4] \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} f_{n+1/3}^{[4, 3]},$$

то путем сравнения величин y_{n+1} и y'_{n+1} можно судить о локальной точности приближенного решения и, тем самым, выбирать шаг h с учетом требуемой точности результата. К приведенным расчетным формулам можно также добавить формулу

$$[5] \quad Y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{24} [2f_n^{[5, \mu_1]} + 9f_{n+1/3}^{[4, 3]} + f_{n+1}^{[5, 4]}],$$

на основании которой можно получить дополнительную информацию о локальной погрешности полученного приближенного решения. Без дополнительной затраты труда на вычисление значений правой части исходного уравнения могут быть получены значения приближенного решения в промежуточных точках отрезка $[x_n, x_{n+1}]$ с локальной ошибкой порядка h^6 по формуле

$$y_{n+1} = y_n + h\gamma y'_n + \frac{h^2\gamma^2}{6} \{ [3 - \gamma(3 - \gamma)] f_n^{[5, \mu_1]} + \\ + 2\gamma(2 - \gamma) f_{n+1/2}^{[4, 4]} + \gamma(\gamma - 1) f_{n+1}^{[5, 4]} \},$$

где $0 < \gamma < 1$.

Среди методов, построенных для задачи (1), (2) в случае $m=3$, рассмотрим следующий метод второго порядка точности:

$$[2] \quad y''_{n+1} = y''_n + hf_n^{[\mu_0, \mu_1, \mu_2]},$$

$$[3] \quad y'_{n+1} = y'_n + hy''_n + \frac{h^2}{2} f_n^{[\mu_0, \mu_1, \mu_2]},$$

$$[4] \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} f_n^{[\mu_0, \mu_1, \mu_2]},$$

$$[3] \quad y''_{n+1} = y''_n + \frac{h}{2} [f_n^{[\mu_0, \mu_1, \mu_2]} + f_{n+1}^{[4, 3, 2]}],$$

$$[4] \quad y'_{n+1} = y'_n + hy''_n + \frac{h^2}{6} [2f_n^{[\mu_0, \mu_1, \mu_2]} + f_{n+1}^{[4, 3, 2]}],$$

$$[5] \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{24} [3f_n^{[\mu_0, \mu_1, \mu_2]} + f_{n+1}^{[4, 3, 2]}],$$

где μ_0 может принимать значения 4 или 5, $\mu_1=3; 4, \mu_2=2; 3$. При значениях $\mu_i, i=0, 1, 2$, равных 4; 3; 2 соответственно, метод требует однократного вычисления значений правой части уравнения на одном шаге. Вычисление значений y_{n+1} и y'_{n+1} с локальными ошибками порядка h^5 и h^4 соответственно позволяет ожидать получения более точных результатов по сравнению с другими методами второго порядка, например, типа схемы Эйлера с пересчетом [3], которая может быть применена для решения задачи Коши в случае системы обыкновенных, дифференциальных уравнений, эквивалентной исходному дифференциальному уравнению.

Методы, аналогичные рассмотренным, могут быть предложены и для уравнений более высоких порядков.

В заключение приведем некоторые результаты численных экспериментов, выполненных на ЭВМ «Минск-32».

Пример 1. $y'' = -\frac{1+y'^2}{y}, y(0)=1, y'(0)=2$.

Точное решение $y(x) = \sqrt{5 - (x-2)^2}$. Задача решалась на отрезке $[0; 4]$ стандартным методом Рунге — Кутта, примененным к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка, методом Рунге —

Кутта — Нистрема [4] и предложенным методом четвертого порядка точности при $\mu_1 = 4$. В табл. 1 указаны относительные ошибки полученных результатов.

$$\text{Пример 2. } y''' = \frac{4y + 4y' + y''}{9}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$$

Точное решение $y(x) = e^x$. Задача решалась на промежутке $[0; 10]$ методом Эйлера с пересчетом, примененным к эквивалентной системе, а также предложенным методом второго порядка точности при $\mu_0 = 4$; $\mu_1 = 3$; $\mu_2 = 2$. В табл. 2 приведены относительные ошибки соответствующих значений приближенных решений.

Таблица 1

h	x	Метод Р—К для системы	Метод Р—К—Н	Предлагаемый метод
0,5	2,0	0,09	0,05	0,02
	4,0	2,3	0,9	0,08
0,25	2,0	0,006	0,005	0,0006
	4,0	0,06	0,05	0,003
0,125	2,0	0,0004	0,0003	0,0001
	4,0	0,003	0,003	0,0002

Таблица 2

h	x	Метод Эйлера с пересчетом	Предлагаемый метод
0,5	0,5	0,015	0,00021
	5,0	0,16	0,0049
	10,0	0,34	0,0089
0,125	0,5	0,0012	0,000009
	5,0	0,012	0,00058
	10,0	0,024	0,00013

Таким образом, предлагаемый алгоритм позволяет получать более точные результаты не только локально, но и на достаточно больших промежутках изменения аргумента.

В заключение, пользуясь случаем, приношу благодарность своему научному руководителю В. В. Бобкову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- Горбунов А. Д.— В. сб.: Вычислительные методы и программирование, В. МГУ, 1966, 28.
- Бобков В. В.— «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук», № 2, 1973, 52.
- Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М., 1973.
- Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., 1959.

Поступила в редакцию
2/IV 1976 г.

Кафедра вычислительной
математики

В. С. МАСТЯНИЦА

ОБ ОДНОЙ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим двумерный сингулярный интеграл с ядрами Коши

$$I(\varphi; t, \tau) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x, y)}{(x-t)(y-\tau)} dx dy, \quad -1 < t < 1, \quad -1 < \tau < 1, \quad (1)$$

понимаемый в смысле главного значения. Для его существования достаточно потребовать, чтобы $\varphi(x, y) \in H(\lambda_1, \lambda_2)$ (условие Гельдера с показателями λ_1 и λ_2 соответственно) [1]. Зададим сетку узлов линиями $x_k = 2 \frac{k}{n} - 1$, $k = \overline{0, n}$, и $y_l = 2 \frac{l}{n} - 1$, $l = \overline{0, n}$. По условиям

$$S_{n,n}(x_k, y_l) = \varphi(x_k, y_l), \quad k = \overline{0, n}, \quad l = \overline{0, n},$$

запишем уравнение ломаной двух переменных:

$$\begin{aligned} S_{n,n}(x, y) = & \frac{n^2}{4} [(x_k - x)(y_l - y)\varphi(x_{k-1}, y_{l-1}) + \\ & + (x_k - x)(y - y_{l-1})\varphi(x_{k-1}, y_l) + (x - x_{k-1})(y_l - y)\varphi(x_k, y_{l-1}) + \\ & + (x - x_{k-1})(y - y_{l-1})\varphi(x_k, y_l)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Построим кубатурную формулу для (1), заменив плотность $\varphi(x, y)$ $S_{n,n}(x, y)$.

$$\begin{aligned} I(\varphi; t, \tau) = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x, y)}{(x-t)(y-\tau)} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{S_{n,n}(x, y)}{(x-t)(y-\tau)} dx dy + \\ & + R_{n,n}(t, \tau) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n A_k(t) B_l(\tau) \varphi(x_k, y_l) + R_{n,n}(t, \tau), \end{aligned} \quad (3)$$

где $A_k(t)$, $B_l(\tau)$ — фиксированные (не зависящие от φ) функции — коэффициенты кубатурной формулы; $R_{n,n}(t, \tau)$ — остаточный член.

Пусть $t \neq x_j$, $j = \overline{1, n-1}$, тогда $A_k(t)$ вычисляются так:

$$A_k(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} (x_1 - t) \ln \left| \frac{x_1 - t}{x_0 - t} \right| - 1, & k = 0, \\ \frac{n}{2} \left[(t - x_{k-1}) \ln \left| \frac{x_k - t}{x_{k-1} - t} \right| + (x_{k+1} - t) \ln \left| \frac{x_{k+1} - t}{x_k - t} \right| \right], & k = \overline{1, n-1}, \\ \frac{n}{2} (t - x_{n-1}) \ln \left| \frac{x_n - t}{x_{n-1} - t} \right| + 1, & k = n. \end{cases} \quad (4)$$

Если t совпадает с каким-нибудь узлом x_j , $j = \overline{1, n-1}$, то для $A_k(x_j)$, $k \neq j-1, j, j+1$, справедливы соотношения (4) при $t = x_j$. Коэффициенты $A_{j-1}(x_j)$, $A_j(x_j)$, $A_{j+1}(x_j)$ вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{j-1}(x_j) &= \begin{cases} -1, & j = 1, \\ -2 \ln 2, & j = \overline{2, n-1}, \end{cases} \\ A_j(x_j) &= 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \\ A_{j+1}(x_j) &= \begin{cases} 2 \ln 2, & j = \overline{1, n-2}, \\ 1, & j = n-1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения (4) и (5) справедливы и для вычисления коэффициентов $B_l(\tau)$, если заменить соответственно t на τ , k на l , A_k на B_l и x_k на y_l . Для оценки $R_{n,n}(t, \tau)$ докажем две леммы.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x, y) \in H(\lambda_1, \lambda_2)$, $S_{n,n}(x, y)$ — ломаная (2), тогда для любой точки $(x, y) \in [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, n}$, $x = x_{k-1} + 2 \frac{s_1}{n}$, $0 \leq s_1 \leq 1$, $y = y_{l-1} + 2 \frac{s_2}{n}$, $0 \leq s_2 \leq 1$ справедлива оценка

$$|\varphi(x, y) - S_{n,n}(x, y)| \leq C_1 \left[\frac{(1-s_1)s_1}{n} \right]^{\lambda_1} + C_2 \left[\frac{(1-s_2)s_2}{n} \right]^{\lambda_2}.$$

Здесь и далее через C_i , $i=1, 2, \dots$ будем обозначать константы, не зависящие от x, y, n .

Доказательство. Так как $\varphi(x, y) \in H(\lambda_1, \lambda_2)$, то для двух любых точек (x', y') , $(x'', y'') \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x', y') - \varphi(x'', y'')| \leq K_1 |x' - x''|^{\lambda_1} + K_2 |y' - y''|^{\lambda_2},$$

где K_1, K_2 — константы Гельдера. Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} |\varphi(x, y) - S_{n,n}(x, y)| &\leq \frac{n^2}{4} (x_k - x)(y_l - y) |\varphi(x, y) - \varphi(x_{k-1}, y_{l-1})| + \\ &+ \frac{n^2}{4} (x_k - x)(y - y_{l-1}) |\varphi(x, y) - \varphi(x_{k-1}, y_l)| + \frac{n^2}{4} (x - x_{k-1})(y_l - y) \times \\ &\times |\varphi(x, y) - \varphi(x_k, y_{l-1})| + \frac{n^2}{4} (x - x_{k-1})(y - y_{l-1}) |\varphi(x, y) - \\ &- \varphi(x_k, y_l)| \leq C_1 \left[\frac{(1-s_1)s_1}{n} \right]^{\lambda_1} + C_2 \left[\frac{(1-s_2)s_2}{n} \right]^{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть $\varphi(x, y) \in H(\lambda_1, \lambda_2)$, $S_{n,n}(x, y)$ — ломаная (2), тогда $S_{n,n}(x, y) \in H(\mu, \mu)$, где $\mu = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Доказательство. Очевидно, если функция $\varphi(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных x, y , то она удовлетворяет условию Гельдера по переменной x равномерно относительно y и по y равномерно относительно x . Верно и обратное утверждение. Покажем, что $S_{n,n}(x, y)$ удовлетворяет условию Гельдера по x при фиксированном y и по y при фиксированном x .

Пусть $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$. Тогда

$$\begin{aligned} |S_{n,n}(x', y) - S_{n,n}(x'', y)| &= \frac{n^2}{4} |(x' - x'')[(y_l - y)(\varphi(x_k, y_{l-1}) - \\ &- \varphi(x_{k-1}, y_{l-1})) + (y - y_{l-1})(\varphi(x_k, y_l) - \varphi(x_{k-1}, y_l))]| \leq \\ &\leq 2^{\lambda_1} n^{1-\lambda_1} K_1 |x' - x''| \leq 2K_1 |x' - x''|^{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда $|x' - x''| \geq \frac{1}{n}$, а x', x'' принадлежат различным отрезкам. Из леммы 1 легко получить, что

$$\begin{aligned} |S_{n,n}(x', y) - S_{n,n}(x'', y)| &\leq |S_{n,n}(x', y) - \varphi(x', y)| + \\ &+ |\varphi(x', y) - \varphi(x'', y)| + |\varphi(x'', y) - S_{n,n}(x'', y)| \leq \\ &\leq 2 \frac{C_1}{n^{\lambda_1}} + 2 \frac{C_2}{n^{\lambda_2}} + K_1 |x' - x''|^{\lambda_1} \leq K_1' |x' - x''|^{\mu}. \end{aligned}$$

И, наконец, когда $x' \in [x_{k-1}, x_k]$, $x'' \in [x_k, x_{k+1}]$ и $|x' - x''| < \frac{1}{n}$, воспользовавшись неравенством

$$\alpha^\gamma + \beta^\gamma \leq 2^{1-\gamma} (\alpha + \beta)^\gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0,$$

получим

$$\begin{aligned} |S_{n,n}(x', y) - S_{n,n}(x'', y)| &\leq |S_{n,n}(x', y) - \varphi(x_k, y)| + |\varphi(x_k, y) - \\ &- S_{n,n}(x'', y)| \leq 2K_1 |x' - x_k|^{\lambda_1} + 2K_1 |x_k - x''|^{\lambda_1} \leq 2^{1-\lambda_1} K_1 |x' - x''|^{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Аналогичные доказательства можно провести и для любых y' , $y'' \in [-1, 1]$ при фиксированном x . Таким образом, лемма доказана.

Теорема. Пусть $\phi(x, y) \in H(\lambda_1, \lambda_2)$, тогда для остаточного члена кубатурной формулы (3) справедлива оценка:

$$|R_{n,n}(t, \tau)| \leq C_{16} \frac{\ln^2 n}{n^\mu} \left(\left| \ln \frac{1-t}{1+t} \right| + \left| \ln \frac{1-\tau}{1+\tau} \right| \right),$$

где $\mu = \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

Доказательство. Будем считать, что $0 \leq t, \tau < 1$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Пусть $r_{n,n}(x, y) = \phi(x, y) - S_{n,n}(x, y)$, тогда $r_{n,n}(x, y)$ можно представить в виде [2]:

$$r_{n,n}(x, y) = r_{n,n}^{(1)} + r_{n,n}^{(2)} + r_{n,n}^{(3)} + r_{n,n}(t, \tau),$$

где $r_{n,n}^{(1)} = r_{n,n}(x, y) - r_{n,n}(t, \tau)$, $r_{n,n}^{(2)} = r_{n,n}(t, y) - r_{n,n}(t, \tau)$, $r_{n,n}^{(3)} = r_{n,n}(x, y) - r_{n,n}(x, \tau) - r_{n,n}(t, y) + r_{n,n}(t, \tau)$.

Соответственно этому представим $R_{n,n}(t, \tau)$:

$$\begin{aligned} R_{n,n}(t, \tau) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{r_{n,n}(x, y)}{(x-t)(y-\tau)} dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{r_{n,n}^{(1)}}{(x-t)(y-\tau)} dx dy + \\ &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{r_{n,n}^{(2)}}{(x-t)(y-\tau)} dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{r_{n,n}^{(3)}}{(x-t)(y-\tau)} dx dy + \\ &+ r_{n,n}(t, \tau) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dx dy}{(x-t)(y-\tau)} = R_{n,n}^{(1)}(t, \tau) + R_{n,n}^{(2)}(t, \tau) + \\ &+ R_{n,n}^{(3)}(t, \tau) + R_{n,n}^{(4)}(t, \tau). \end{aligned}$$

Начнем с оценки $R_{n,n}^{(3)}(t, \tau)$. Выберем два положительных числа ε_n и δ_n из условия: $0 < \varepsilon_n, \delta_n < \frac{1}{2}$. Будем различать четыре случая расположения точки (t, τ) :

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $\varepsilon_n < 1-t$, | b) $\varepsilon_n < 1-t$, |
| $\delta_n < 1-\tau$; | $\delta_n \geq 1-\tau$; |
| c) $\varepsilon_n \geq 1-t$, | d) $\varepsilon_n \geq 1-t$, |
| $\delta_n < 1-\tau$; | $\delta_n \geq 1-\tau$. |

Рассмотрим случай a). Представим $R_{n,n}^{(3)}(t, \tau)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{n,n}(t, \tau) &= \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{-\delta_n}^{\tau-\delta_n} + \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} + \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{\tau+\delta_n}^1 + \int_{t-\varepsilon_n}^1 \int_{-\delta_n}^{\tau-\delta_n} + \int_{t-\varepsilon_n}^1 \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} + \\ &+ \int_{t-\varepsilon_n}^1 \int_{\tau+\delta_n}^1 + \int_{t+\varepsilon_n}^1 \int_{-\delta_n}^{\tau-\delta_n} + \int_{t+\varepsilon_n}^1 \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} + \int_{t+\varepsilon_n}^1 \int_{\tau+\delta_n}^1 = \sum_{k=1}^9 I_k. \end{aligned}$$

Начнем с оценки I_1 .

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{-\delta_n}^{\tau-\delta_n} \frac{r_{n,n}^{(3)}}{(x-t)(y-\tau)} dx dy \right| \leq \\ &\leq 4 \max_{(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]} |r_{n,n}(x, y)| \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \frac{dx}{t-x} \int_{-\delta_n}^{\tau-\delta_n} \frac{dy}{\tau-y} \leq C_3 \frac{|\ln \varepsilon_n| |\ln \delta_n|}{n^\mu}. \end{aligned}$$

Подобные оценки легко получить и для величин I_3, I_7, I_9 . При оценке I_2 учтем неравенство [3]:

$$|r_{n,n}^{(3)}| \leq C_4 |y - \tau|^\mu.$$

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} \frac{r_{n,n}^{(3)}}{(x-t)(y-\tau)} dx dy \right| \leq \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} \frac{C_4 |y - \tau|^\mu}{|x - t| |y - \tau|} dx dy = \\ &= \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \frac{dx}{t-x} \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} \frac{dy}{|y - \tau|^{1-\mu}} \leq C_5 |\ln \varepsilon_n| \delta_n^\mu. \end{aligned}$$

Аналогичным образом для I_4, I_6, I_8 можно получить следующие оценки:

$$|I_4| \leq C_6 |\ln \delta_n| \varepsilon_n^\mu, \quad |I_6| \leq C_7 |\ln \delta_n| \varepsilon_n^\mu, \quad |I_8| \leq C_8 |\ln \varepsilon_n| \delta_n^\mu.$$

Используя лемму 2 и неравенство [3]

$$|r_{n,n}^{(3)}| \leq C_9 |x - t|^{\frac{\mu}{2}} |y - \tau|^{\frac{\mu}{2}},$$

получим, что

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| \int_{t-\varepsilon_n}^{t+\varepsilon_n} \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} \frac{r_{n,n}^{(3)}}{(x-t)(y-\tau)} dx dy \right| \leq \int_{t-\varepsilon_n}^{t+\varepsilon_n} \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} \frac{C_{10} dx dy}{|x - t|^{1-\mu/2} |y - \tau|^{1-\mu/2}} \leq \\ &\leq C_{11} \varepsilon_n^{\frac{\mu}{2}} \delta_n^{\frac{\mu}{2}}. \end{aligned}$$

Кратко выполним оценку $R_{n,n}^{(3)}(t, \tau)$ в случае c). Здесь $R_{n,n}^{(3)}$ представим в виде:

$$\begin{aligned} R_{n,n}^{(3)}(t, \tau) &= \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{-\tau}^{\tau-\delta_n} + \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} + \int_{-1}^{t-\varepsilon_n} \int_{\tau+\delta_n}^{-1} + \\ &+ \int_{t-\varepsilon_n}^1 \int_{-\tau}^{\tau-\delta_n} + \int_{t-\varepsilon_n}^1 \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} + \int_{t-\varepsilon_n}^1 \int_{\tau+\delta_n}^{-1} = \sum_{k=1}^6 I_k. \end{aligned}$$

Величины I_1, I_2, I_3 оцениваются также, как и в случае a). Оценим I_5 :

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| \int_{t-\varepsilon_n}^1 \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} \frac{r_{n,n}^{(3)}}{(x-t)(y-\tau)} dx dy \right| \leq C_9 \int_{t-\varepsilon_n}^1 \int_{\tau-\delta_n}^{\tau+\delta_n} \frac{dx dy}{|x - t|^{\frac{\mu}{2}} |y - \tau|^{\frac{\mu}{2}}} \leq \\ &\leq C_{12} \varepsilon_n^{\frac{\mu}{2}} \delta_n^{\frac{\mu}{2}}. \end{aligned}$$

Для случаев b) и d) $R_{n,n}^{(3)}(t, \tau)$ оценивается без принципиальных отличий от предыдущих случаев. Не будем также приводить подробные выводы оценок $R_{n,n}^{(1)}, R_{n,n}^{(2)}, R_{n,n}^{(3)}$, а укажем лишь конечные результаты.

Интегралы $R_{n,n}^{(1)}$ и $R_{n,n}^{(2)}$ оцениваются по одной схеме. Представив $R_{n,n}^{(1)}$ в виде:

$$R_{n,n}^{(1)}(t, \tau) = \int_{-1}^1 \frac{r_{n,n}(x, \tau) - r_{n,n}(t, \tau)}{(x-t)} dx \int_{-1}^1 \frac{dy}{|y - \tau|},$$

получим

$$|R_{n,n}^{(1)}(t, \tau)| \leq \left(C_{13} \frac{|\ln \varepsilon_n|}{n^{\lambda_1}} + C_{14} \varepsilon_n^\mu \right) \ln \frac{1 - \tau}{1 + \tau}.$$

Наконец, используя лемму 1, получим оценку $R_{n,n}^{(4)}(t, \tau)$:

$$|R_{n,n}^{(4)}(t, \tau)| = |r_{n,n}(t, \tau)| \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{dxdy}{(x-t)(y-\tau)} = \\ = |r_{n,n}(t, \tau)| \left| \ln \frac{1-t}{1+t} \right| \left| \ln \frac{1-\tau}{1+\tau} \right| \leqslant \frac{C_{15}}{n^{\mu}} \left(\left| \ln \frac{1-t}{1+t} \right| + \left| \ln \frac{1-\tau}{1+\tau} \right| \right).$$

Полагая $\varepsilon_n = \delta_n = \frac{1}{n}$, получим утверждение теоремы.

Следствие 1. Если $-1+\varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon$, $-1+\delta \leq \tau \leq 1-\delta$, то кубатурный процесс (3) сходится равномерно.

Следствие 2. Если рассматривать квадратурную формулу для одномерного сингулярного интеграла

$$I(\varphi; t) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)}{x-t} dx, \quad -1 < t < 1,$$

то из теоремы следует равномерная оценка остаточного члена квадратурной формулы на отрезке $[-1, 1]$.

Автор выражает глубокую благодарность доценту М. А. Шешко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Какичев В. А.— «Уч. зап. Шахтинского пед. ин-та», 1959, 2, вып. 6.
2. Купрадзе В. Д. Границные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М., 1950.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.

Поступила в редакцию
28/IV 1976 г.

Кафедра численных методов
и программирования

УДК 517.948

А. Н. ДУДИН

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ УЛУЧШЕНИЯ ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), \xi(t), t), \\ x(t_0) &= x_0, \quad u(t) \in U(t), \\ t \in T &= \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$I(u, t_0) = M \left\{ \varphi(x(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} f_0(x(t), u(t), t) \right\} \rightarrow \min_u, \quad (2)$$

где x — n -вектор фазового состояния; u — r -вектор управления; ξ — k -вектор внешних воздействий; t — дискретное время; $U(t)$ — заданные множества в r -мерном евклидовом пространстве.

Будем считать, что в каждый момент времени t внешнее воздействие $\xi(t)$ есть случайный вектор с известным распределением; $\xi(t), \xi(\bar{t})$ — независимые случайные величины при $t \neq \bar{t}$. Символ M означает операцию математического ожидания от скалярной случайной величины по случайным векторам $x(t_0+1), \dots, x(t_1)$.

Для решения этой задачи часто применяется метод динамического программирования [1]. Недостатком стандартной процедуры этого метода при реализации на ЭВМ являются жесткие требования к оперативной памяти. А. И. Калининым [2] разработан метод улучшения допустимых управлений в детерминированных системах, основанный на использова-

ния функций Розоноэра [3]. Стандартная процедура этого метода при реализации на ЭВМ требует меньшего объема оперативной памяти. Ниже этот метод переносится на стохастические системы.

2. Введение функции Розоноэра для стохастических систем. Пусть $u^0(\cdot) = \{u^0(t_0), \dots, u^0(t_1-1)\}$ — оптимальное управление в задаче (1) — (2); $x^0(\cdot) = \{x_0, x^0(t_0+1), \dots, x^0(t_1)\}$ — соответствующая ему оптимальная траектория; $t \in T$ — фиксированный момент времени; x — фиксированный n -вектор.

Введем функцию

$$\Phi(x, t) = M \left\{ \varphi(y(x, t, t_1)) + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} f_0(y(x, t, \tau), u^0(\tau), \tau) \right\}. \quad (3)$$

Здесь математическое ожидание берется по распределениям случайных векторов $\xi(t), \dots, \xi(t_1-1)$; $y(x, t, \tau)$ — решение рекуррентного уравнения $y(\tau+1) = f(y(\tau), u^0(\tau), \xi(\tau), \tau)$, соответствующее начальному состоянию $y(t) = x$.

Можно показать, что функция $\Phi(x, t)$ удовлетворяет рекуррентно-функциональному уравнению

$$\Phi(x, t) = M \Phi(f(x, u^0(t), \xi(t), t), t+1) + f_0(x, u^0(t), t), \quad (4)$$

где M означает математическое ожидание по $\xi(t)$, с начальным условием

$$\Phi(x, t_1) = \varphi(x). \quad (5)$$

3. Необходимое условие оптимальности. Верна следующая

Теорема: Оптимальное в задаче (1), (2) управление удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & M \Phi(f(x^0(t), u^0(t), \xi(t), t), t+1) + f_0(x^0(t), u^0(t), t) = \\ & = \min_{u \in U(t)} \{M \Phi(f(x^0(t), u, \xi(t), t), t+1) + f_0(x^0(t), u, t)\} \end{aligned} \quad (6)$$

для любого $t \in T$.

4. Процедура улучшения допустимых уравнений. Пусть $u^1(\cdot) = \{u^1(t_0), \dots, u^1(t_1-1)\}$ — некоторое допустимое управление в задаче (1), (2), которое рассматриваем в качестве начального приближения к оптимальному. По этому управлению построим функцию $\Phi_1(x, t)$ как решение рекуррентно-функционального уравнения:

$$\Phi_1(x, t) = M \Phi_1(f(x, u^1(t), \xi(t), t), t+1) + f_0(x, u^1(t), t)$$

с граничным условием $\Phi_1(x, t_1) = \varphi(x)$. Найдем вектор $\bar{u}^1(t_0)$, удовлетворяющий условию

$$\begin{aligned} & M \Phi_1(f(x_0, \bar{u}^1(t_0), \xi(t_0), t_0), t_0+1) + f_0(x_0, \bar{u}^1(t_0), t_0) = \\ & = \min_{u \in U(t_0)} \{M \Phi_1(f(x_0, u, \xi(t_0), t_0), t_0+1) + f_0(x_0, u, t_0)\}. \end{aligned} \quad (7)$$

На управлении $u_1^1(\cdot) = \{\bar{u}^1(t_0), u^1(t_0+1), \dots, u^1(t_1-1)\}$ критерий качества принимает значение

$$I(u_1^1, t_0) = f_0(x_0, \bar{u}^1(t_0), t_0) + M \Phi_1(f(x_0, \bar{u}^1(t_0), \xi(t_0), t_0), t_0+1),$$

а на исходном управлении он равен

$$I(u^1, t_0) = f_0(x_0, u^1(t_0), t_0) + M \Phi_1(f(x_0, u^1(t_0), \xi(t_0), t_0), t_0+1).$$

В силу (7) $I(u_1^1, t_0) \leq I(u^1, t_0)$. Далее получаем реализованное на $\bar{u}^1(t_0)$ значение $\bar{x}^1(t_0+1)$ и из условия

$$\begin{aligned}
& \underset{\xi(t_0+1)}{M} \Phi_1(f(\bar{x}^1(t_0+1), \bar{u}^1(t_0+1), \xi(t_0+1), t_0+1), t_0+2) + \\
& + f_0(\bar{x}^1(t_0+1), \bar{u}^1(t_0+1), t_0+1) = \\
= & \min_{u \in U(t_0+1)} \{ \underset{\xi(t_0+1)}{M} \Phi_1(f(\bar{x}^1(t_0+1), u, \xi(t_0+1), t_0+1), t_0+2) + \\
& + f_0(\bar{x}^1(t_0+1), u, t_0+1) \}
\end{aligned}$$

найдем $\bar{u}^1(t_0+1)$.

Рассмотрим управление $u_2^1(\cdot) = \{\bar{u}^1(t_0), \bar{u}^1(t_0+1), u^1(t_0+2), \dots, u^1(t_1-1)\}$. С помощью рассуждений, аналогичных вышеприведенным, можно доказать: $I(u_2^1, t_0+1) \leq I(u^1, t_0+1)$.

Определив реализовавшееся на $\bar{u}^1(t_0+1)$ значение $\bar{x}^1(t_0+2)$, переходя к моменту времени t_0+2 и т. д. В результате получим управление $\bar{u}^1(\cdot) = \{\bar{u}^1(t_0), \dots, \bar{u}^1(t_1-1)\}$ и соответствующую ему траекторию такие, что

$$\begin{aligned}
& \underset{\xi(t)}{M} \Phi_1(f(\bar{x}^1(t), \bar{u}^1(t), \xi(t), t), t+1) + f_0(\bar{x}^1(t), \bar{u}^1(t), t) = \\
= & \min_{u \in U(t)} \{ \underset{\xi(t)}{M} \Phi_1(f(\bar{x}^1(t), u, \xi(t), t), t+1) + f_0(\bar{x}^1(t), u, t) \}
\end{aligned}$$

для любого $t \in T$.

Таким образом, $I(\bar{u}^1, t_0) \leq I(u, t_0)$ причем неравенство будет строгим, если исходное управление $u^1(\cdot)$ не удовлетворяет необходимому условию оптимальности (6), хотя бы для одного $t \in T$.

Для управления $\bar{u}^1(\cdot)$ вводим новое обозначение $u^2(\cdot) = \bar{u}^1(\cdot)$. Возьмем это управление за исходное и повторим описанную выше процедуру, т. е. по этому управлению построим функцию $\Phi_2(x, t)$ и т. д.

Описанная процедура улучшения может продолжаться до тех пор, пока мы не получим управление, удовлетворяющее необходимому условию оптимальности (6). Если этого не случится, будем иметь бесконечную последовательность управлений $\{u^k(\cdot)\}$, соответствующих им траекторий $\{x^k(\cdot)\}$ и функций $\Phi_k(x, t)$, причем по доказанному выше $I(u^{k+1}, t_0) < I(u^k, t_0)$.

При выполнении следующих условий: $U(t)$ — компакт для любого $t \in T$; $f(x, u, \xi, t)$ и $f_0(x, u, t)$ непрерывны по совокупности переменных (x, u, ξ) и (x, u) соответственно для любого $t \in T$; $\varphi(x)$ непрерывна по x , может быть доказано, что предел любой сходящейся подпоследовательности последовательности $\{u^k(\cdot)\}$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности (6).

б. Градиент функции $R(u) = \underset{\xi(t)}{M} \Phi_{k-1}(f(x^k(t), u, \xi(t), t), t+1) + f_0(x^k(t), u, t)$.

В случае, когда $f(x, u, \xi, t)$, $f_0(x, u, t)$ непрерывно-дифференцируемы по аргументам x, u ; $\varphi(x)$ — по x ; $U(t)$ — открытое множество для любого $t \in T$ или ограничения на управление отсутствуют, для решения задачи

$$\min_{u \in U(t)} \{ \underset{\xi(t)}{M} \Phi_{k-1}(f(x^k(t), u, \xi(t), t), t+1) + f_0(x^k(t), u, t) \},$$

которая лежит в основе описанной выше процедуры улучшения, можно воспользоваться градиентными методами:

$$\frac{\partial R(u)}{\partial u} = - \frac{\partial H(\bar{x}(\tau), \bar{\psi}(\tau), u, \tau)}{\partial u},$$

где $H(x, \psi, u, t) = \underset{\xi(t)}{M} [\psi' f(x, u, \xi(t), t)] - f_0(x, u, t)$;

$$\bar{\psi}(t) = -\frac{\partial \Phi_{k-1}(\bar{x}(t+1), t+1)}{\partial x};$$

$\bar{u}(\cdot) = \{u^k(t_0), \dots, u^k(\tau-1), u, u^{k-1}(\tau+1), \dots, u^{k-1}(t_1-1)\}$;

$\bar{x}(\cdot) = \{x_0, \bar{x}(t_0+1), \dots, \bar{x}(t_1)\}$ — соответствующая $\bar{u}(\cdot)$ траектория.

Функции $\bar{\psi}$ определяются из рекуррентного соотношения:

$$\bar{\psi}(t-1) = \frac{\partial H(\bar{x}(t), \bar{\psi}(t), \bar{u}(t), t)}{\partial x}$$

для всех $t \in [\tau+1, t_1-1]$,

$$\bar{\psi}(t_1-1) = -\frac{\partial \varphi(\bar{x}(t_1))}{\partial x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования. Минск, 1975.
- Калинин А. И. — «Дифференц. уравнения», № 2, 1978.
- Розонов Л. И. — «Автоматика и телемеханика», № 10—12, 1959.

Поступила в редакцию
11/XII 1976 г.

Кафедра теории вероятностей
и математической статистики

УДК 517.917

Н.И. ОБИДИНА

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРАЕКТОРИИ, ИДУЩЕЙ ИЗ ОДНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ В ДРУГУЮ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(x), \quad \dot{y} = Q(x) + R(x)y, \quad (1)$$

где функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — непрерывно дифференцируемы и не имеют общих множителей.

2. Уравнение $P(x) = 0$ имеет m простых корней, где $m \geq 2$.

3. Функция $R(x) \neq 0$ при $x = x_l$, если $P(x_l) = 0$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Отметим, что признаки существования сепаратрис, идущих из одного седла в другое, из седла в то же седло, из седла в узел, указаны в работах [1—4].

Всегда можно считать, что одна из особых точек находится в начале координат. Пусть

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{l+1} < x_l = 0 < x_{l+1} < \dots < x_m,$$

где x_1, x_2, \dots, x_m — абсциссы особых точек. Фазовая плоскость прямыми $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_m$ разбивается на вертикальные полосы. Каждая из этих прямых является инвариантным множеством. Ограничимся рассмотрением поведения траекторий в полосе $0 < x < x_{l+1}$, так как в остальных полосах рассуждения будут аналогичны. Слева от прямой $x = x_1$ и справа от прямой $x = x_m$, а также внутри полос траектории, идущей из особой точки в ту же точку, не будет на основании [4].

Пусть вторая особая точка расположена на оси Ox . Если это не так, то преобразованием $x = \bar{x}$, $y = ax + \bar{y}$, где $a = \frac{Q(x_{l+1})}{R(x_{l+1})x_{l+1}}$, систему (1) сведем к системе того же вида

$$\dot{x} = P(x), \quad \dot{y} = N(x) + R(x)y, \quad (2)$$

где $N(0) = N(x_{l+1}) = 0$ и $N(x) = Q(x) + axR(x) - aP(x)$. Точки $O(0; 0)$ и $A(x_{l+1}; 0)$ — особые. Вертикальных асимптот нет. Траектории, находя-

щиеся в полосе, за пределы ее выйти не могут. Особая точка будет либо узлом, либо седлом. Из A в O может идти бесконечное множество траекторий, либо одна, либо ни одной при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$. Пусть траектории входят в точку O при $t \rightarrow +\infty$.

1'. $R(x)$ сохраняет знак или меняет его n раз, где $n=2i$, т. е. $R(0)R(x_{l+1}) > 0$. Тогда λ_2 для точек O и A имеет одинаковые знаки, а λ_1 — разные. ($\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения для особой точки $\lambda_1=P'(x_j)$, $\lambda_2=R(x_j)$, $j=l, l+1$.) Без ограничения общности будем считать, что $O(0; 0)$ — узел, тогда $A(x_{l+1}; 0)$ — седло. Траектории $x=0$ и $x=x_{l+1}$ одновременно стремятся к особой точке. Здесь $|\dot{x}| < +\infty$. Справа к точке O стремятся все траектории и образуют двумерное многообразие, т. е. заполняют всю полосу. Из точки A слева выходит одна траектория $y=S(x)$, т. е. многообразие состоит из одной линии. Эти два многообразия пересекаются по кривой $y=S(x)$. Пересечение многообразий будет нормальным на основании [1]. Существует единственная траектория, идущая из точки A в точку O . Эта траектория устойчива при возмущении.

Если $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ — полиномы, то из явного выражения для сепаратрисы следует, что существует единственная траектория, идущая

из седла в узел, так как $\int_{x_{l+1}}^0 \psi(x_0; x) dx = C$, где

$$\psi(x_0; x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \exp \left[- \int_{x_0}^x \frac{R(x)}{P(x)} dx \right].$$

Остальные траектории, расположенные в окрестности точки O выше кривой $y=S(x)$, уходят в $+\infty$ по y , а если же траектории расположены в окрестности точки O ниже $y=S(x)$, то уходят в $-\infty$ по y при $t \rightarrow +\infty$.

2'. $R(x)$ меняет знак r -раз, где $r=2i-1$, т. е. $R(0)R(x_{l+1}) < 0$, причем $R(0)P'(0) > 0$, $R(x_{l+1})P'(x_{l+1}) > 0$. Тогда точки O и A — узлы. Все траектории, выходящие из A , стремятся к O , и нет изолированной траектории, идущей из A в O .

3'. $R(x)$ меняет знак r -раз, где $r=2i-1$, т. е. $R(0)R(x_{l+1}) < 0$, причем $R(0)P'(0) < 0$, $R(x_{l+1})P'(x_{l+1}) < 0$. Точки O и A — седла. В этом случае может быть либо одна траектория, идущая из A в O , либо ни одной.

Если $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — полиномы, то $\int_{x_0}^x \frac{R(x)}{P(x)} dx \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow x_{l+1}$ и $\int_{x_0}^x \frac{R(x)}{P(x)} dx \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 0$.

Тогда для существования единственной траектории, идущей из седла в седло, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{x_{l+1}} \psi(x_0; x) dx = 0 \quad x \in [0; x_{l+1}]. \quad (3)$$

Теорема 1. Если для системы (1) выполнены условия 1—3 и кривая $Q(x)+R(x)y=0$ не пересекает оси OX на $[0; x_{l+1}]$, то на $[0; x_{l+1}]$ нет траекторий, идущих из седла в седло.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\dot{x} > 0$, а $\dot{y} > 0$ под изоклиной нуля и $\dot{y} < 0$ над изоклиной нуля в окрестности точки O . Сепаратриса, вышедшая из точки O справа при $t \rightarrow +\infty$ расположена выше оси OX , а из A слева при $t \rightarrow -\infty$ расположена ниже оси OX . Эти сепаратрисы не пересекутся, так как $y'_{\infty} > 0$ в области $0 < x < x_k$, $y < 0$ и $x_k < x < x_{l+1}$, $y > 0$, где x_k — нуль функции $R(x)$, т. е. нет траектории, идущей из седла в седло.

Теорема 2. Если для системы (1) выполнены условия 1—3 и кривая $Q(x)+R(x)y=0$ пересекает ось Ox один раз на $]0; x_{l+1}$ в точке $(x_j; 0)$, а $R(x)$ меняет знак один раз при переходе x через x_k , где $x_j < x_k$, то на $[0; x_{l+1}]$ нет траектории, идущей из одного седла в другое при $x_0 > \frac{x_{l+1}}{2}$, где x_0 — точка экстремума функции $Q(x)+R(x)y=0$, ближайшая к началу координат.

Теорема доказывается аналогично [3] методом сравнения поля уравнения фазовых траекторий системы (1) с полями симметричными, где $\varphi(x) \equiv 1$.

Пример.

$$\dot{x} = (ax+b)x, \quad \dot{y} = (a_1x+b_1)x + (cx+d)y, \quad (4)$$

где $a, b, d \neq 0, ad - bc \neq 0$. Преобразованием $x = x_1, y = \frac{ab_1 - a_1b}{ad - bc}x_1 + y_1$ систему (4) приведем к виду

$$\dot{x}_1 = (ax_1 + b)x_1, \quad \dot{y}_1 = k(ax_1 + b)x_1 + (cx_1 + d)y_1, \quad (5)$$

где $k = \frac{a_1d - b_1c - a_1b + ab_1}{ad - bc}$. $O(0; 0)$ и $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ — особые точки. $(cx + d)$ на $]0; -\frac{b}{a}[$ меняет знак, $b \cdot d < 0$, тогда точки O и A — седла.

По теореме 1 при $k \neq 0$ нет траектории, идущей из седла в седло. При $k = 0$ такой траекторией будет прямая $y_1 = 0$. Тогда система (4) при $a_1d - b_1c = a_1b - b_1d, b \cdot d < 0$ и $ab(bc - ad) < 0$ имеет единственную траекторию $y = \frac{ab_1 - a_1b}{ad - bc}x$, идущую из седла в седло.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(x), \quad \dot{y} = Q(x) + R(x)y, \quad \dot{z} = M(x; y) + N(x; y)z, \quad (6)$$

где 1) $P(x), Q(x), R(x), M(x; y), N(x; y)$ — непрерывно дифференцируемые функции по x и y , не имеющие общих множителей;

2) уравнение $P(x) = 0$ имеет m простых корней, где $m \geq 2$;

3) $R(x) \neq 0, N(x; y) \neq 0$ при $x = x_l, y = y_l$, где x_l — корень $P(x) = 0$, а $y_l = -\frac{Q(x_l)}{R(x_l)}$, $l = 1, 2, \dots, m$.

Пусть абсциссы особых точек расположены следующим образом: $x_1 < x_2 < \dots < x_m$. Пространство XYZ плоскостями $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_m$ разбивается на вертикальные полосы. Каждая плоскость $x = x_l$ ($l = 1, 2, \dots, m$) является инвариантным множеством — на ней расположены целые траектории. Они описываются двумерной системой

$$\dot{y} = Q(x_l) + R(x_l)y, \quad \dot{z} = M(x_l; y) + N(x_l; y)z. \quad (7)$$

В плоскости $x = x_l$ будет только одна особая точка: либо узел, либо седло. Справа от плоскости $x = x_m$ и слева от $x = x_1$, и в плоскости $x = x_l$ траектории, идущей из особой точки в ту же точку, не будет на основании [4]. Для описания траекторий, находящихся в полосах, найдем сначала их проекции на плоскость $Z = 0$. Эти проекции являются траекториями двумерной системы (1)

$$\dot{x} = P(x), \quad \dot{y} = Q(x) + R(x)y.$$

Затем строим цилиндрические поверхности, направляющими которых являются траектории системы (1), а образующие параллельны оси OZ . Эти цилиндрические поверхности являются инвариантным множеством. Они задают расслоение каждой полосы.

Для системы (6) траектория, идущая из одной особой точки в другую, может быть лишь в том случае, если она существует для системы (1).

Пусть $y = S(x)$ — уравнение единственной траектории, идущей из одной особой точки в другую в полосе $x_l \leq x \leq x_{l+1}$ для системы (1). Для

системы (6) предположим, что на $[x_i; x_{i+1}]$ особые точки лежат на оси OX , причем одна совпадает с началом координат. Общность рассуждений от этого не изменится. Применив к системе (6) преобразование $x=\tilde{x}$, $y=\tilde{y}+S(\tilde{x})$, $z=\tilde{z}$, получим систему

$$\dot{x}=P(x), \quad \dot{y}=R(x)y, \quad \dot{z}=M(x; y+S(x))+N(x; y+S(x))z. \quad (8)$$

Поведение траекторий системы (8) описывается системой:

$$\dot{x}=P(x), \quad \dot{z}=M(x; S(x))+N(x; S(x))z \quad (9)$$

в плоскости $y=0$. Поэтому, если система (1) имеет единственную траекторию, идущую из одной особой точки в другую, а система (9) имеет хотя бы одну такую траекторию, то система (6) всегда имеет хотя бы одну траекторию, идущую из одной особой точки в другую. Такие траектории системы (6) будут расположены на одной поверхности.

Теорема 3. Если для системы (6) выполнены условия 1—3, то для того, чтобы на $[x_i; x_{i+1}]$ существовала одна траектория (бесконечное множество траекторий, лежащих на одной цилиндрической поверхности), идущая из одной особой точки в другую, необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела единственную траекторию и система (9) одну такую траекторию (бесконечное множество траекторий).

Доказательство. Достаточность доказана выше.

Необходимость. Пусть система (6) имеет одну траекторию (бесконечное множество траекторий, лежащих на одной цилиндрической поверхности), идущую из одной особой точки в другую. Так как система (1) описывает поведение проекций системы (6) на плоскости $Z=0$, то чтобы здесь была единственная траектория, идущая из одной особой точки в другую, нужно чтобы все траектории системы (6), идущие из одной особой точки в другую, находились на цилиндрической поверхности $y=S(x)$. Поведение траекторий на поверхности $y=S(x)$ описывается системой (9).

Аналогичная теорема справедлива и для системы n дифференциальных уравнений.

Теорема 4. Если система

$$\dot{x}=P(x_1), \quad \dot{x}_k=Q_{k-1}(x_1; x_2; \dots; x_{k-1})+R_{k-1}(x_1; x_2; \dots; x_{k-1})x_k \quad (10)$$

($k=2, 3, \dots, n$) удовлетворяет условиям:

1) $P(x_1), Q_{k-1}(x_1; x_2; \dots; x_{k-1}), R_{k-1}(x_1; x_2; \dots; x_{k-1})$ — непрерывно дифференцируемые функции по $x_1; \dots; x_{k-1}$ и не имеют общих множеств;

2) уравнение $P(x_1)=0$ имеет m простых корней, где $m \geq 2$;

3) $R_{k-1}(x_1^l; \dots; x_{k-1}^l) \neq 0$, $l=1, 2, \dots, m$ и x_1^l — корень уравнения

$P(x_1)=0$, а $x_{k-1}=-\frac{Q_{k-1}(x_1^l; \dots; x_{k-1}^l)}{R_{k-1}(x_1^l; \dots; x_{k-1}^l)}$, то для существования единственной траектории (бесконечного множества траекторий, лежащих на одной цилиндрической поверхности), идущей из одной особой точки в другую, необходимо и достаточно, чтобы система первых $(n-1)$ уравнений имела единственную такую траекторию и система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P(x_1), \quad \dot{x}_k = Q_{k-1}(x_1; S_1(x_1); \dots; S_{k-2}(x_1) + \\ &+ R_{k-1}(x_1; S_1(x_1); \dots; S_{k-2}(x_1)x_k), \end{aligned} \quad (11)$$

где $S_i(x)$ — уравнение траектории, идущей из одной особой точки в другую для $(i+1)$ первых уравнений системы (10), ($i=1, 2, \dots, k-2$) имела одну такую траекторию (бесконечное множество траекторий).

Пример.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (ax+b)x, \quad \dot{y} = (a_1x+b_1)x+(cx+d)y, \\ \dot{z} &= a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+l_2y+(c_1x+d_1y+l_1)z, \end{aligned} \quad (12)$$

$b \cdot d < 0$, $ab(ad-bc) > 0$. Если $a_1d-b_1c=a_1b-b_1a$, то в плоскости XOY существует траектория, идущая из седла в седло, $y=kx$,

тогда $k = \frac{a_1 b - ab_1}{ad - bc}$.

Система (12) при $a_1 d - b_1 c = a_1 b - b_1 a$ и

1) $bl_1 > 0$, $ab[l_1 a - (c_1 + kd_1)b] > 0$ или $bl_1 < 0$ и $ab[l_1 a - (c_1 + kd_1)b] < 0$,
или $bl_1 < 0$, $ab[l_1 a - (c_1 + kd_1)b] > 0$, $(a_2 + b_2 k + c_2 k^2)l_1 - (d_2 + l_2 k)(c_1 + kd_1) =$
 $= (a_2 + b_2 k + c_2 k^2)b - (d_2 + l_2 k)a$ имеет траекторию, идущую из одной особой точки в другую;

2) $bl_1 > 0$, $ab[l_1 a - (c_1 + d_1 k)b] < 0$ имеет бесконечное множество траекторий, идущих из одной особой точки в другую.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goren Paul. — «Sian. j. Appl. math», японаги 1974, 26, № 1.
2. Авдонин Н. И. — «Дифференц. уравнения», 1968, 4, № 4, 639.
3. Авдонин Н. И. — «Дифференц. уравнения», 1970, 6, № 7, 1188.
4. Табуева В. А. — «Изв. вузов СССР. Математика», 1958, № 4, 227.

Поступила в редакцию
14/1 1977 г.

Кафедра высшей математики

УДК 517.943.2.

Л. Н. ГАЙШУН

К УСТОЙЧИВОСТИ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве привлекают внимание математиков и других специалистов [1—4], так как, помимо чисто теоретического, имеют большое практическое значение [1].

Пусть B — банахово (действительное или комплексное) пространство; $L(B)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов B в B ; $G(B)$ — группа обратимых элементов алгебры $L(B)$; R^m — m -мерное евклидово пространство и $R_+^m = \{t: t \in R^m, t_1 \geq 0, \dots, t_m \geq 0\}$.

Рассмотрим вполне интегрируемую [5] систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t_j} = f_j(t, x(t)), \quad (j = 1, \dots, m), \quad (1)$$

где $x(t) \in B$, $t \in R_+^m$, $f_j(t, x)$ ($j = 1, \dots, m$) — функции, определенные для $(t, x) \in R_+^m \times B$ со значениями в B , непрерывно дифференцируемые в $R_+^m \times B$ [5].

Предположим, что $f_j(t, 0) = 0$ ($j = 1, \dots, m$; $t \in R_+^m$). Тогда функция $x(t) \equiv 0$ является решением системы (1). Это решение будем называть нулевым или тривиальным.

Определение. Нулевое решение системы (1) устойчиво (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|x(t)\| < \varepsilon$ как только $\|x^0\| < \delta$; $x^0 = x(t^0)$; это решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и существует такое $\Delta > 0$, что $x(t) \rightarrow 0$ при $t_1 + \dots + t_m \rightarrow 0$, если $\|x^0\| < \Delta$.

При изучении вопросов устойчивости системы (1) полезна одна лемма, для формулировки которой сделаем некоторые замечания. Пусть Γ — некоторая спрямляемая кривая в R^m , начинающаяся в точке t^0 и оканчивающаяся в точке t^1 (которая может быть бесконечно удаленной) и такая, что при движении вдоль Γ от t^0 к t^1 координаты t_1, \dots, t_m движущейся точки не убывают. Через $\Gamma(t^0, t)$ будем обозначать часть кривой Γ , начинающуюся в точке t^0 и оканчивающуюся в точке $t \in \Gamma$. Пусть в точках Γ определена действительная неотрицательная функция $g(t)$.

Лемма 1. Если существуют положительные постоянные c и δ такие, что

$$g(t) \leq c + \delta \int_{\Gamma(t^0, t)} g(\tau) d\tau_1 + \dots + g(\tau) d\tau_m$$

для любого $t \in \Gamma$, то

$$g(t) \leq c \exp\{\delta[(t_1 - t_1^0) + \dots + (t_m - t_m^0)]\}, \quad t \in \Gamma.$$

Нам требуются еще некоторые элементарные факты из теории линейных систем вида (1). Пусть $A_j(t) \in L(B)$, $t \in R_+^m$ — непрерывно дифференцируемые (в равномерной операторной топологии) [6] оператор-функции. Рассмотрим вполне интегрируемую [5] линейную систему

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t_j} = A_j(t)y(t) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (2)$$

Оператор-функцию $\Phi(t) \in G(B)$, $t \in R_+^m$ будем называть фундаментальным оператором (Φ О) системы (2), если $\Phi(t)$ удовлетворяет системе операторных уравнений

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_j} = A_j(t)\Phi(t) \quad (j = 1, \dots, m). \quad (3)$$

Легко проверить, что система (3) вполне интегрируема, если вполне интегрируема система (2).

Φ О $\Phi(t)$, удовлетворяющий дополнительному условию $\Phi(0) = I$, где I — единичный элемент группы $G(B)$, будем называть оператором Коши системы (2).

Если система (2) вполне интегрируема и функции $f_j: R_+^m \rightarrow B$ таковы, что вполне интегрируема система

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t_j} = A_j(t)x(t) + f_j(t) \quad (j = 1, \dots, m), \quad (4)$$

то всякое решение $x(t, t^0, x^0)$ ($x(t^0, t^0, x^0) = x^0$) этой системы определяется формулой

$$x(t, t^0, x^0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t^0)x^0 + \int_{t^0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f_1(\tau)d\tau_1 + \dots + \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f_m(\tau)d\tau_m, \quad (5)$$

в которой криволинейный интеграл не зависит от пути, соединяющего точки t^0 и t , а $\Phi(t)$ — некоторый Φ О системы (2).

Предположим, что система (2) обладает Φ О $\Phi(t)$, удовлетворяющим неравенству

$$\|\Phi(t)\Phi^{-1}(t^0)\| \leq c \exp\{-\gamma[(t_1 - t_1^0) + \dots + (t_m - t_m^0)]\}, \quad (6)$$

где c и γ — положительные постоянные, и наряду с (2) рассмотрим вполне интегрируемую нелинейную систему

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t_j} = A_j(t)x(t) + R_j(t, x(t)) \quad (j = 1, \dots, m), \quad (7)$$

у которой функции $R_j: R_+^m \times B \rightarrow B$ удовлетворяют в $R_+^m \times B$ неравенству

$$\|R_j(t, x)\| \leq \nu \|x\|, \quad (8)$$

где ν — положительная постоянная. При этих предположениях имеет место следующая

Теорема 1. Если для Φ О системы (2) выполняется неравенство (6), то нулевое решение системы (7) асимптотически устойчиво при любых функциях $R_1(t, x), \dots, R_m(t, x)$, удовлетворяющих условиям полной

интегрируемости системы (7) и неравенствам (8) с достаточно малой постоянной v .

Доказательство. Используя формулу (5), решение $x(t, t^0, x^0)$ системы (7) можно записать в виде

$$x(t, t^0, x^0) = \Phi(t) \Phi^{-1}(t^0) x^0 + \int_{t^0}^t \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) R_1(\tau, x(\tau, t^0, x^0)) d\tau_1 + \\ + \dots + \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau) R_m(\tau, x(\tau, t^0, x^0)) d\tau_m.$$

Возьмем какую-нибудь кривую Γ , выходящую из точки t^0 , вдоль которой координаты t_1, \dots, t_m не убывают (при движении от t^0) и $t_1 + \dots + t_m \rightarrow \infty$. Тогда, учитывая неравенство (6) и свойство криволинейных интегралов [7], для любой точки $t \in \Gamma$ будем иметь

$$\|x(t, t^0, x^0)\| \leq c \|x^0\| e^{-\gamma [(t_1 - t_1^0) + \dots + (t_m - t_m^0)]} + \\ + vc \int_{\Gamma(t^0, t)} e^{-\gamma [(t_1 - \tau_1) + \dots + (t_m - \tau_m)]} \|x(\tau, t^0, x^0)\| (d\tau_1 + \dots + d\tau_m), \quad (9)$$

где $\Gamma(t^0, t)$ — часть кривой Γ , начинающаяся в точке t^0 и оканчивающаяся в точке $t \in \Gamma$. Обозначая

$$\varphi(t) = \|x(t, t^0, x^0)\| e^{\gamma [(t_1 - t_1^0) + \dots + (t_m - t_m^0)]},$$

из (9) получим неравенство

$$\varphi(t) \leq c \|x^0\| + \int_{\Gamma(t^0, t)} \varphi(\tau) d\tau_1 + \dots + \varphi(\tau) d\tau_m.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$\|x(t, t^0, x^0)\| \leq c \|x^0\| e^{-(\gamma - cv) [(t_1 - t_1^0) + \dots + (t_m - t_m^0)]}.$$

Поскольку приведенные рассуждения справедливы для любой кривой Γ , а входящие в оценку $\|x(t, t^0, x^0)\|$ постоянные не зависят от выбора Γ , то при $v > 0$, удовлетворяющем неравенству $v > \gamma/c$, получаем, что

$$\|x(t, t^0, x^0)\| \leq c \|x^0\| e^{-\mu [(t_1 - t_1^0) + \dots + (t_m - t_m^0)]}$$

для всех $t \in R^m$, $t_i \geq t_i^0$ ($i = 1, \dots, m$), где $\mu = \gamma - cv$, и, следовательно, $\|x(t, t^0, x^0)\| \rightarrow 0$ при $t_1 + \dots + t_m \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Следствие. Если в системе (2) оператор-функции $A_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) не зависят от t , а спектры $\sigma(A_j)$ операторов A_j ($j = 1, \dots, m$) лежат в левой полуплоскости, то неравенство (6) выполняется и, следовательно, для системы (7), у которой оператор-функции $A_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) не зависят от t , теорема 1 может быть сформулирована следующим образом: если спектры $\sigma(A_j)$ операторов A_j ($j = 1, \dots, m$) лежат в левой полуплоскости, то нулевое решение системы (7) асимптотически устойчиво при любых функциях $R_1(t, x), \dots, R_m(t, x)$, удовлетворяющих условиям полной интегрируемости системы (7) и неравенствам (8) с достаточно малой постоянной $v > 0$.

Другой важный класс линейных систем, для которых выполняется неравенство (8), образуют асимптотически устойчивые приводимые системы [8].

ЛИТЕРАТУРА

- Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
- Крейн М. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1968.

3. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., 1970.
4. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., 1964.
5. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., 1964.
6. Хилл Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
7. Гавурин М. К.—«Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук», 1950, вып. 19.
8. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.

Поступила в редакцию
21/1 1977 г.

Кафедра дифференциальных
уравнений

Краткие сообщения

УДК 517.948

P. АКБАРОВ

О ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Пусть L состоит из простых непересекающихся замкнутых кривых Ляпунова L_1, L_2, \dots, L_N , ограничивающих на плоскости \bar{C} некоторую конечную связную область D^+ . Через D^- обозначим область, дополняющую D^+ до \bar{C} . Положительной будем считать такую ориентацию контура L , которая оставляет область D^+ слева. Пусть $F = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ — конечное множество особых точек, заданных на $\bar{C} \setminus L$. Для этой конфигурации рассматривается трехэлементная задача Римана с главными частями $\xi_{\pm}(z)$, заданными в $n = n_+ + n_-$ особых точках, не лежащих на L . Знак « $+$ » внизу относится к особым точкам и главным частям, лежащим в D^+ , а « $-$ » — к особым точкам и главным частям, лежащим в D^- . Границы du_{\pm}^+ окрестностей особых точек, лежащих в области D^+ , ориентируем в направлении по часовой стрелке, а границы du_{\mp}^- окрестностей особых точек, лежащих в D^- , — против часовой стрелки. На L зададим H -непрерывные функции $a(t), b(t), g(t)$, причем $a(t) \neq 0$ всюду на L . Рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти все функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$, аналитические на $(\bar{C} \setminus L) \setminus \bigcup_{v=1}^n \bar{u}_v$, исчезающие на бесконечности, H -непрерывно продолжимые слева и справа на L , где должно выполняться краевое условие:

$$\Phi^+(t) = a(t) \Phi^-(t) + b(t) \overline{\Phi^-(t)} + g(t), \quad t \in L. \quad (1)$$

Неизвестные функции $\Phi(z)$ должны быть H -непрерывными в $\bigcup_{v=1}^n \bar{u}_v \setminus F_v$ так, чтобы разности $\Phi(z) - \xi^v(z)$ были аналитическими в u_v .

Сформулированная задача без учета заданных главных частей была хорошо изучена в [1—4]. В данной работе решение задачи дается методом введения дополнительных контуров, встречавшимся уже в [5—7].

Обозначим: $L^+ = \bigcup_{v=1}^{n_+} du_v^+, \quad L^- = \bigcup_{v=1}^{n_-} du_v^-, \quad L^+ \cup L^- = L', \quad L \cup L' = \Gamma$, $\kappa = \text{Ind}_L a(t)$. Введем неизвестную функцию:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \Phi(z), & \text{если } z \notin \bigcup_{v=1}^n \bar{u}_v \\ \Phi(z) - \xi^v(z), & \text{если } z \in \dot{u}_v = u_v \setminus F_v. \end{cases}$$

Пусть $z \rightarrow t \in \partial u_+^+$, тогда $\varphi^+(t) = \Phi^+(t)$ при $z \in D^+$ и $\varphi^-(t) = \Phi^-(t) = -\xi_+^*(t)$ при $z \in D^-$. Но $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$ на ∂u_+ . Отсюда следует, что $\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \xi_+^*(t)$, $t \in \partial u_+^+$.

Аналогично, если $z \rightarrow t \in \partial u_-^-$, тогда $\varphi^-(t) = \Phi^-(t)$ при $z \in D^-$ и $\varphi^+(t) = \Phi^+(t) - \xi_-^*(t)$ при $z \in D^+$. Из этих равенств получим

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) - \xi_-^*(t), \quad t \in \partial u_-^-.$$

На контуре L функция $\varphi(z)$ удовлетворяет тому же краевому условию (1), что и $\Phi(z)$. Следовательно, предельные значения функции (1) на контуре Γ удовлетворяют условию:

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) &= a(t) \varphi^-(t) + b(t) \overline{\varphi^-(t)} + g(t), \quad t \in L \\ \varphi^+(t) &= \varphi^-(t) \pm \xi_\pm^*(t), \quad t \in L^\pm. \end{aligned} \quad (2)$$

Соотношения (2) запишем в виде одного краевого условия:

$$\varphi^+(t) = a_1(t) \varphi^-(t) + b_1(t) \overline{\varphi^-(t)} + g_1(t), \quad t \in \Gamma, \quad (3)$$

где $a_1(t) = \begin{cases} a(t), & \text{если } t \in L, \\ 1, & \text{если } t \in L^\pm, \end{cases}$, $b_1(t) = \begin{cases} b(t), & \text{если } t \in L, \\ 0, & \text{если } t \in L^\pm, \end{cases}$,

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t), & \text{если } t \in L, \\ \pm \xi_\pm^*(t), & \text{если } t \in \partial u_\pm^\pm. \end{cases}$$

Очевидно, индекс $a_1(t)$ вдоль Γ совпадает с κ . Исчезающие на бесконечности решения задачи (3) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a_1(\tau) \rho(\tau) + b_1(\tau) \overline{\rho(\tau)} + g_1(\tau)}{\tau - z} d\tau, \\ \varphi^-(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(\tau)}{\tau - z} d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\rho(t)$ — определенное решение интегрального уравнения

$$\begin{aligned} T\rho &= \frac{a_1(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a_1(\tau) - a_1(t)}{\tau - t} \rho(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b_1(\tau) \overline{\rho(\tau)} d\tau}{\tau - t} \\ &\quad - \frac{b_1(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\rho(\tau)} d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2} g_1(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1(\tau) d\tau}{\tau - t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что интегральное уравнение (5) получено в результате применения формулы Сохоцкого — Племеля [4] к формулам (4) и использования краевого условия (3). Покажем, что всякое решение задачи (3) представимо формулами (4). Действительно, пусть $\varphi^-(t)$ — решение задачи (3). Полагая $\varphi^-(t) = \rho(t)$ и применяя формулу Коши, получаем $\varphi^-(z)$. Далее из условия (3) найдем

$$\varphi^+(t) = a_1(t) \rho(t) + b_1(t) \rho(t) + g_1(t).$$

и, снова применяя формулу Коши, получаем представление для $\varphi^+(z)$. Перепишем уравнение (5) в другой форме:

$$\begin{aligned} T\rho &= \frac{a_1(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\rho(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a_1(\tau) - a_1(t)}{\tau - t} \rho(\tau) d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b_1(\tau) - b_1(t)}{\tau - t} \overline{\rho(\tau)} d\tau + \frac{b_1(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{d\tau}{\tau - t} - \left(\frac{d\tau}{\tau - t} \right)^* \right] \overline{\rho(\tau)} = \\ &= \frac{1}{2} g_1(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1(\tau) d\tau}{\tau - t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегральное уравнение (6) представляет собой уравнение, рассмотренное в работах [2, 3]. Уравнение (6) имеет индекс, равный нулю, следовательно, справедливо следующее утверждение.

Для разрешимости уравнения (6) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} g_1(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g_1(\tau) d\tau}{\tau - t} \right] \sigma(t) dt \right\} = 0,$$

где $\sigma(t)$ — произвольное решение однородного уравнения

$$T' \sigma(\tau) = \frac{a_1(t)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\tau) d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a_1(\tau) - a_1(t)}{\tau - t} \sigma(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{b_1(\tau) t'^2 - b_1(t) t'^2}{\tau - t} d\tau + \frac{b_1(t)}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{d\tau}{\tau - t} - \left(\frac{d\tau}{\tau - t} \right) \right] \overline{\sigma(\tau)} = 0,$$

союзного к уравнению (6).

Рассмотрим теперь однородную задачу

$$\psi^-(t) = a_1(t) \psi^+(t) + \overline{b_1(t) t'^2 \psi^+(t)}, \quad t \in \Gamma, \quad (7)$$

сопряженную к задаче (1) ($g(t) \equiv 0$). Сопряженная задача (7) строится по способу [2] (§ 4 с. 160). Исчезающее на бесконечности решение задачи (7) будем искать в виде

$$\psi^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(\tau) d\tau}{\tau - z}, \\ \psi^-(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{a_1(\tau) \sigma(\tau) + \overline{b_1(\tau) t'^2 \sigma(\tau)}}{\tau - z} d\tau. \quad (8)$$

Очевидно, что всякое решение задачи (7) представимо формулой (8). Вычисляя предельные значения $\Psi^+(t)$ и $\Psi^-(t)$ по формулам Сохонского — Племеля с учетом (7), получаем интегральное уравнение $T' \sigma(t) = 0$. В силу (8) задача (7) эквивалентна уравнению $T' \sigma(t) = 0$. Таким образом, задачи (3) и (7) эквивалентны союзным уравнениям (5) и $T' \sigma(t)$. Следовательно, для задачи (3) имеет место утверждение, аналогичное теореме из [2] (гл. 4, § 4), [3] (§ 17):

Задача (3) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_{\Gamma} g_1(\tau) \psi_j^+(\tau) d\tau \right\} = 0$$

для любого решения $\psi_j^+(z)$ сопряженной краевой задачи (7).

Меняя ориентацию на кривых ∂u_j^+ и заменяя Γ на исходные контуры, для задачи (1) получаем следующий результат.

Теорема. Для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия разрешимости

$$\operatorname{Re} \left\{ \int_L g(t) \psi_j^+(t) dt \right\} = \sum_{v=1}^{n_+} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\partial u_v^+} \xi_v^+(t) \psi_j^+(t) dt \right\} + \\ + \sum_{v=1}^{n_-} \operatorname{Re} \left\{ \int_{\partial u_v^-} \xi_v^-(t) \psi_j^-(t) dt \right\} \quad (9)$$

для любого решения $\psi_j(z)$ сопряженной задачи (7).

Следствие. Если при каждом $v = 1, 2, \dots, n$ заданные главные части $\xi_{\pm}^v(z)$ аналитичны в проколотых окрестностях \dot{u}_v , то для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия разрешимости

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_L g(t) \psi_i^+(t) dt \right\} &= \sum_{v=1}^{n+} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{res}_{\zeta=F_v^+} [\xi_v^+(\zeta) \psi_i^+(\zeta) d\zeta] \right\} + \\ &+ \sum_{v=1}^{n-} \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{res}_{\zeta=F_v^-} [\xi_v^-(\zeta) \psi_i^-(\zeta) d\zeta] \right\} \end{aligned}$$

для любого решения $\psi_i(z)$ сопряженной задачи (7), где $F_v^+(F_v^-)$ — особая точка, принадлежащая $D^+(D^-)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963.
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи со сдвигом и сингулярные интегральные уравнения. М., 1977.
4. Зверович Э. И. и Литвинчук Г. С.—«УМН», 1968, 23, вып. 3(141), 67.
5. Акбаров Р., Зверович Э. И.—«Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 1.
6. Акбаров Р.—«Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 1.
7. Акбаров Р.—«ДАН БССР», 1977, 22, № 7, 588.

Поступила в редакцию
20/V 1977 г.

Кафедра теории функций

УДК 518.321

В. В. БОБКОВ, В. Н. ШАЛИМА

НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В развитие [1] предлагаются новые численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, характеризующиеся улучшенными свойствами устойчивости в сравнении с известными методами.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\ddot{u} = f(t, u, \dot{u}), \quad (1)$$

где f — достаточно гладкая функция указанных аргументов. По аналогии с [2] метод численного решения этой задачи станем называть A -устойчивым, если в случае $f(t, u, \dot{u}) = -2\lambda\dot{u} - \gamma\lambda^2 u$ при любых постоянных $\lambda > 0$, $\gamma > 0$ его погрешность стремится к нулю, когда $t \rightarrow \infty$.

Явные методы типа Рунге — Кутта, например, удовлетворяют условию A -устойчивости лишь при жестких ограничениях на величину шага τ численного интегрирования. Построим примеры таких явных методов, которые A -устойчивы при любых $\tau > 0$.

Рассмотрим семейство зависящих от параметров $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i$ ($i = 0, 1$) нелинейных методов

$$\hat{y} = y + t\dot{y} + \frac{\tau^2}{2} f_0 \operatorname{Reg}_0, \quad (2)$$

$$\hat{y} = \dot{y} + \tau f_1 \operatorname{Reg}_1, \quad (3)$$

$$\text{где } \text{Reg}_i = \frac{f_i}{2f_i - f(t + \beta_i\tau, y + a_i\tau\dot{y} + b_i\tau^2f_i, \dot{y} + c_i\tau\ddot{y})};$$

$$f_i = f(t + \alpha_i\tau, y + a_i\tau\dot{y}, \dot{y});$$

$$\hat{\dot{y}} \approx \dot{u}(t + \tau), \hat{y} \approx u(t), \hat{\dot{y}} \approx \dot{u}(t + \tau), \hat{\dot{y}} \approx \dot{u}(t), i = 0, 1.$$

Для погрешностей формул (2), (3) в предположении $f(t, u, \dot{u}) \neq 0$ можно дать представления

$$r_i = \frac{\tau^{3-i}}{(3-i)!} ((1 - (3-i)\beta_i)f_t + (1 - (3-i)a_i)\dot{u}f_u + (1 - (3-i)c_i)\ddot{u}f_{\dot{u}}) + O(\tau^{4-i}), i = 0, 1,$$

из которых следует, что при выполнении равенств

$$1 - (3-i)\beta_i = 0, 1 - (3-i)a_i = 0, 1 - (3-i)c_i = 0, i = 0, 1,$$

порядок точности таких методов возрастает.

Методы (2), (3) в случае $f(t, u, \dot{u}) = -2\lambda\dot{u} - \gamma\lambda^2u$ приводят к соотношению $\hat{\dot{y}} = S\bar{y}$, где $\bar{y} = [y, \dot{y}]^T$,

$$S = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma\lambda^2\tau^2}{2s_0} & \tau - \tau^2 \frac{2\lambda + a_0\gamma\lambda^2\tau}{2s_0} \\ -\frac{\gamma\lambda^2\tau}{2s_1} & 1 - \tau \frac{2\lambda + a_1\gamma\lambda^2\tau}{2s_1} \end{bmatrix},$$

$$s_i = 1 + 2c_i\lambda\tau + \gamma b_i\lambda^2\tau^2, i = 0, 1.$$

Для выполнения условия A -устойчивости потребуем, чтобы собственные значения матрицы S были меньше единицы по модулю. Это требование приводит к следующим неравенствам:

$$a_1 \geqslant \frac{1}{2}, c_0 > 0, c_1 \geqslant \frac{1}{2}, 2b_0 + a_1 - a_0 \geqslant 0, 2(b_0 + b_1) \geqslant a_1;$$

$$2c_0(a_1 - 1) + 2b_0 + c_1 \geqslant 0, 2b_0(a_1 - 1) + b_1 + a_0 - a_1 \geqslant 0;$$

$$4(c_1b_0 + c_0b_1) - 2(b_0 + c_0a_1) + c_0 - c_1 \geqslant 0;$$

$$8b_0b_1 - 2b_1 + 2b_0 - 4a_1b_0 + a_1 - a_0 \geqslant 0.$$

Рассмотрим примеры явных нелинейных методов, A -устойчивых при любых $\tau > 0$.

Метод 1. Полагая $a_i = \beta_i = a_i = b_i = c_i = 1$, $b_i = \frac{1}{2}$, $i = 0, 1$, получаем метод первого порядка точности, требующий двукратного вычисления значений f на узел сетки. При этом приближенное значение решения может быть получено с локальной ошибкой порядка τ^3 , производной — τ^2 .

Метод 2. Положив $a_i = \beta_i = a_i = b_i = c_i = \frac{1}{2}$, $i = 0, 1$, получим метод второго порядка точности, также требующий двукратного вычисления значений f на одном шаге численного интегрирования.

Приведем некоторые результаты численных экспериментов (см. таблицу).

$$L(u) = f(t), u(1) = 0, \dot{u}(1) = 4, t \geqslant 1,$$

$$L(u) = \ddot{u} + 24\dot{u} + 144 \cdot 10^6u, \quad (4)$$

$$f(t) = 6t(1 + 12t + 24 \cdot 10^6t^2) + \frac{2}{t^3}(12t - 72 \cdot 10^6t^2 - 1).$$

Точное решение задачи (4) есть $\dot{u}(t) = t^3 - \frac{1}{t}$. Для рассматриваемого примера характерной особенностью является то, что $|Jm \mu_i| \gg |Re \mu_i|$, $i = 0, 1$ (примерно в 1000 раз), где μ_i — собственные значения $L(u)$. Явные методы типа Рунге — Кутта оказываются практически непригодными для

решения уравнений указанного типа, в то время как предлагаемые алгоритмы позволяют получить удовлетворительные результаты.

τ	n	$u(t_n)$	Р—К—Н	Метод 1
$\frac{1}{2048} \approx 0.0005$	1	0.1953602 — 02	0.1953602 — 02	0,1953597 — 02
	11	0.2154238 — 01	0.1386756 + 11	0,2154239 — 01
	12	0.2350657 — 01	*	0,2350656 — 01
	40960	0.7999950 + 04	*	0,7999950 + 04
0.5	1	0,2708333 + 01	-0.6749992 + 06	0,2708333 + 01
	2	0,7500000 + 01	*	0,7500000 + 01
	1000	0,1250000 + 09	*	0,1250000 + 09

Примечания: Р—К—Н — метод Рунге — Кутта — Нистрёма [8]; * — приближенное решение не получено в результате переполнения разрядной сетки ЭВМ «Минск-32».

В заключение отметим, что рассматриваемые методы покоординатно могут быть перенесены на системы соответствующих уравнений, а также на их основе могут быть построены разностные схемы решения граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

- Бобков В. В.—«ДАН БССР», 1977, 21, № 5, 395.
- Dahlquist G.—«BIT», 1963, 3, 27.
- Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, 2, М., 1959.

Поступила в редакцию
8/IX 1977 г.

Кафедра вычислительной
математики

УДК 539.143

В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, С. А. КУТЕНЬ,
С. И. ЛИВШИЦ, И. Д. ФЕРАНЧУК

КВАДРУПОЛЬНЫЙ МОМЕНТ АТОМА ВОДОРОДА

В работе [1] нами получено выражение для квадрупольного момента Q основного состояния атома водорода, записанное в виде бесконечного ряда теории возмущений, и дана оценка вклада дискретного спектра в величину Q . Возможно, однако, избежать непосредственного суммирования рядов теории возмущений, используя эффективный путь прямого решения возмущенного уравнения Шредингера. Это и составляет основу так называемых аналитических методов в теории возмущений. Указанные методы применительно к задачам атомной спектроскопии были развиты в работах [2] (для основного состояния) и [3—5] (для возбужденных состояний), в которых были найдены волновые функции S -состояний атомов с учетом примеси к ним D -состояний.

В системе центра инерций квадрупольный момент атома водорода в основном (триплетном) состоянии определяется выражением

$$Q = 2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \langle \Psi_{1S}^{(1)} | (3z^2 - r^2) | \Psi_{1S} \rangle, \quad (1)$$

где m_1 и m_2 — масса электрона и протона соответственно. Согласно [2], поправка к волновой функции основного состояния имеет вид

$$\Psi_{1S}^{(1)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{ae^2} \left(\frac{4\pi}{5} \right)^{1/2} Y_{20}(\Theta) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{3a} \right) \Psi_{1S}, \quad (2)$$

где $a = \frac{h^2}{e^2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$ — радиус Бора рассматриваемой системы; μ_1, μ_2 — магнитные моменты электрона и протона соответственно. В [2] опущено слагаемое, соответствующее фермиевскому контактному члену в сверхтонком взаимодействии, не нарушающее сферической симметрии основного состояния.

Подставляя (2) в (1), для квадрупольного момента получаем

$$Q = \frac{4}{3} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{e^2}. \quad (3)$$

Аналогичным образом, используя поправки к волновым функциям $2S$, $3S$ и $4S$ -состояний, приведенные в [2, 5], найдем следующие выражения для квадрупольных моментов:

$$\begin{aligned} Q_{2S} &= \frac{8}{3} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{e^2}, \\ Q_{3S} &= 2 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{e^2}; \\ Q_{4S} &= \frac{8}{3} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{e^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для водородоподобных атомов с зарядом ядра Z приведенные результаты следует разделить на Z , массовый множитель заменить на $\frac{Zm_1^2 - m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}$, а под m_1, m_2, μ_1, μ_2 понимать величины, относящиеся к ядру.

Попытка расчета аналитическими методами квадрупольного момента в основном состоянии водородоподобных атомов на примере мюония была предпринята недавно в [6], где для расчетов использовалась поправка к волновой функции основного состояния в первом приближении вида

$$R(r) = \text{const} \frac{1}{r^3} \left(1 + \frac{3r}{2a} \right). \quad (5)$$

Указанная функция не совпадает с функцией, полученной Шварцем [2], и явно неправильна, так как является ненормируемой. Если при помощи (5) найти квадрупольный момент, то получим (массовый множитель в [6] опущен):

$$Q = \frac{8}{3} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{e^2},$$

что в два раза больше, чем правильный результат (3). Интересно, что в [6] в результате неправильных вычислений для Q приведено выражение, совпадающее с (3).

Авторы выражают глубокую благодарность А. Г. Маханеку, обратившему наше внимание на аналитические методы в теории возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Г., Кутень С. А. — «ДАН БССР», 1977, 21, 1082.
2. Schwart C. — «Ann. Phys. (USA)», 1959, 2, 156.
3. Маханек А. Г. — «ДАН БССР», 1962, 6, 427.
4. Маханек А. Г., Корольков В. С. — «Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук», 1967, № 4, 100.
5. Маханек А. Г., Корольков В. С. Теория экранирования $4f$ -оболочки редкоземельных элементов и ядерных моментов и аналитические методы в теории возмущений. Препринт Ин-та физики АН БССР. Минск, 1970.
6. Ведег D. The hyperfine quadrupole moment of muonium in the ground state. University of British Columbia Vancouver preprint, B. C., Canada, oct. 1977.

Критика и библиография

А. А. Гусак. Элементы методов вычислений. Минск, Изд-во БГУ имени В. И. Ленина, 1974, 8,82 п. л.

Рецензируемое учебное пособие предназначено для студентов естественных и инженерных факультетов вузов. Необходимость в таком пособии очевидна: при исследовании ряда теоретических и особенно задач прикладного характера возникает проблема их приближенного решения. Однако почти во всех учебных пособиях по курсу высшей математики этот вопрос рассматривается без учета существующей программы, число решаемых задач и примеров недостаточно. Изложить материал достаточно полно и вместе с тем доступно для студентов, не имеющих широкой математической подготовки — одна из основных целей настоящего учебного пособия.

Содержание учебного пособия определяется шестью главами. В первой рассматриваются вопросы приближенного решения численных уравнений, в частности, алгебраических и трансцендентных. Особое внимание уделяется методам хорд, касательных, отделения корней, итераций и комбинированному методу; дается описание схем каждого метода, характеризуется их качество, указывается условие применимости. Достаточно полны явления и сведения, относящиеся к вопросам сходимости и оценки погрешности итерационных методов. Приводятся примеры и задачи с подробными решениями, а в конце каждого параграфа — примеры и задачи с ответами.

Вторая глава посвящена численному решению системы линейных алгебраических уравнений. Анализируются методы исключения, а также итерационные методы. Основное внимание уделяется схемам Гаусса и методу простой итерации. Приводятся наглядные схемы, а также решение нескольких систем.

Проблема вычисления определенных интегралов рассматривается в третьей

главе. Здесь дается вычисление интегралов по интерполяционным квадратурным формулам, в частности, по формулам прямоугольников, трапеций и парабол.

Вопросы построения эмпирических формул излагаются в четвертой главе.

Интерполирование функций — тема пятой главы. Основное внимание уделяется интерполированию по Лагранжу и Ньютону; приводятся интересные и разнообразные примеры с решениями.

Численное интегрирование дифференциальных уравнений — одна из самых актуальных задач вычислительной математики. В шестой главе излагаются методы Эйлера, Рунге — Кутта и Адамса. Приводятся необходимые сведения по теории этих методов, указываются условия их применимости и решен ряд задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Изложение материала отличается строгостью и доступностью.

П. И. МОНАСТЫРНЫЙ

А. А. Гусак. Задачи и упражнения по высшей математике, ч. 1. 1972 (20,5 п. л.); ч. 2, 1973 (24 п. л.). Минск, «Вышэйшая школа».

Рецензируемая книга допущена Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для студентов химических специальностей университетов.

В пособии отражены все основные разделы программы курса высшей математики: аналитическая геометрия на плоскости, введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, приближенное решение уравнений и системы линейных алгебраических уравнений, основы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, двойные, тройные и криволинейные интегралы, интегралы по поверх-

ности, элементы теории поля, ряды, дифференциальные уравнения.

Книга содержит краткие теоретические сведения и основные формулы, примеры решения задач различной трудности, достаточное количество упражнений для аудиторных и домашних заданий, задачи для индивидуальных заданий по основным разделам, а также задачи повышенной трудности и нестандартные.

В задачнике используются различные методические приемы для лучшего усвоения изучаемого материала: рассматриваются особенности той или иной формулы, условия ее применения и исключительные случаи; различные способы решения одной и той же задачи; интерпретация (чаще всего — геометризация) как условий задачи, так и полученных результатов. Кроме того, анализируются интересные частные случаи решения задачи, выясняется взаимосвязь различных методов и т. п.

Рецензируемое пособие по математике, написанное для химиков, выделяется среди работ подобного рода тем, что учит студентов применять различные математические методы к решению прикладных задач.

Книга «Задачи и упражнения по высшей математике» — результат много летней педагогической деятельности автора на химическом факультете БГУ имени В. И. Ленина. Работа удачно за полняет пробел, который существовал в учебной математической литературе, и может быть рекомендована студентам естественных факультетов.

Ю. С. БОГДАНОВ,
М. Д. МАРТЫНЕНКО

В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. Вычислительные методы высшей математики, т. 1, 1972 (36,5 п. л.); т. 2, 1975 (42 п. л.). Минск, «Вышэйшая школа».

На протяжении последних лет значительно изменились учебные планы и программы курса «Методы вычислений» для студентов различных специальностей факультетов прикладной математики и кибернетики, а также механико-математических факультетов университетов страны. В связи с этим возросли требования к учебникам и учебным пособиям по данному курсу.

Следует отметить, что, несмотря на довольно обширную литературу по численным методам, содержание и методический уровень ее не соответствуют в полной мере новым учебным планам и программам.

Выход в свет работы В. И. Крылова, В. В. Бобкова и П. И. Монастырского «Вычислительные методы высшей математики», допущенной Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве учебного пособия для факультетов прикладной математики университетов, оказался свое временным и был встречен с удовлетворением.

Авторы рецензируемого учебного пособия — крупные специалисты в области вычислительной математики и опытные педагоги.

Первый том учебного пособия охватывает численные методы решения алгебраических и трансцендентных уравнений, систем линейных алгебраических и нелинейных уравнений, вычисление собственных значений и векторов матриц, интерполирование функций, численное дифференцирование и интегрирование.

Второй том посвящен численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и интегральных уравнений. Кроме того, рассматриваются методы улучшения сходимости последовательностей и рядов; некоторые вопросы приближенного решения некорректных задач и применения функционального анализа к построению общей теории вычислительных методов.

Рецензируемая работа наиболее полно отражает содержание программ курсов методов вычислений и широко используется в качестве основного учебника для студентов специальностей «математика» и «прикладная математика» Белорусского, Львовского и других университетов. Отличительная особенность учебного пособия — сочетание строгости в освещении теории вычислительных методов математики с высокими требованиями к методике изложения.

Авторы весьма тщательно анализируют вопросы применимости рассматриваемых методов, устойчивости и сходимости вычислительных схем, оценки погрешности численных решений. Как правило, предлагаемые оценки представляют не только теоретический, но и практический интерес.

Содержание книги «Вычислительные методы высшей математики» выходит за пределы программы курса методов вычислений. Внепрограммный материал может быть использован для более глубокого изучения курса в качестве тематики научных кружков и семинаров, а также при чтении спецкурсов по численным методам.

Учебное пособие снабжено шестью добавлениями с необходимыми для понимания содержания книги сведениями по теории функций и функциональному анализу, уравнениям в конечных разностях. По нашему мнению, добавление IV, включающее некоторые сведения об уравнениях в конечных разностях, желательно было бы расширить ввиду его важности в приложениях.

Авторам удалось нетрадиционно и вместе с тем доступно изложить обширный материал по методам вычислений.

Учебное пособие очень быстро разошлось, что подтверждает настоятельную в нем потребность.

И. И. ЧУЛЫК,
МИХАИЛ Д. МАРТЫНЕНКО,
МАРИЯ Д. МАРТЫНЕНКО

Великие люди науки

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН

Исполнилось 100 лет со дня рождения Альберта Эйнштейна, выдающегося физика-теоретика, основоположника теоретической физики XX века, «великого преобразователя естествознания», по меткому выражению В. И. Ленина.

Первые крупные научные работы Эйнштейна (1902—1904) содержали общий метод вычисления термодинамических характеристик любой физической системы. Впоследствии Эйнштейн построил общую теорию световых квантовых (фотонов). В рамках этой теории было дано квантовое объяснение явления фотозеффе́кта, законов химических реакций, вызванных светом, и поведения теплопроводности твердых тел при низких температурах. Сопоставляя законы термодинамики и квантовой теории, Эйнштейн в 1916 году ввел понятия вынужденного и спонтанного излучения света атомами, которые легли в основу современной квантовой электроники. Развивая предложенную индийским физиком Бозе статистическую теорию излучения как теорию ансамбля неразличимых частиц-фотонов применительно к газу, состоящему, например, из таких частиц, как атомы гелия, Эйнштейн обнаружил своеобразное поведение этого газа при низких температурах, предвосхищая тем самым современный подход к объяснению сверхпроводимости и сверхтекучести.

Наиболее фундаментальные научные результаты были получены А. Эйнштейном при создании специальной (1905) и общей (1915) теорий относительности.

Специальная теория относительности выкристаллизовалась в результате огромного числа теоретических и экспериментальных работ, посвященных электродинамике движущихся сред. Весьма существенный вклад в создание этой теории внесли Лармор, Лоренц, Пуанкаре (идея относительности одновременности, преобразования Лоренца, группа Пуанкаре). Эйнштейн завершил эту грандиозную работу, показав, что установленная его предшественниками невозможность обнаружить состояние абсолютного движения относительно эфира представляет проявление всеобщей, качественно новой природы пространства и времени, исключающей абсолютное время и гипотезу эфира.

Крупнейшим вкладом Эйнштейна в мировую науку является созданная им в 1915 г. общая теория относительности. В основу этой теории Эйнштейн положил гениальную идею о неевклидовой римановой структуре физического пространства — времени, обусловленной движением и распределением гравитирующих масс. В отличие от ньютонаской теории гравитации общая теория относительности сумела объяснить такие наблюдаемые в пределах Солнечной системы эффекты, как отклонение лучей света и запаздывание радиарных сигналов в гравитационном поле Солнца, смещение перигелия Меркурия. На основе соответствующих уравнений Эйнштейна была построена (А. А. Фридман) космологическая модель Метагалактики, в соответствии с наблюдениями описывающая грандиозный эффект разбегания галактик (так называемое расширение Вселенной). Еще одним блестящим подтверждением физической космологии, основывающейся на идеях общей теории относительности, является сравнительно недавнее (1964) открытие миллиметрового релятивистского радиоизлучения.

Огромное научное наследие А. Эйнштейна является плодотворным источником современной науки. В рамках общей теории относительности интенсивно разрабатываются фундаментальные проблемы квантования гравитационного поля и построения единой теории поля. Идеи и методы общей теории относительности составляют основу современной релятивистской астрофизики и космологии. Таким образом, через сто лет после рождения Альберта Эйнштейна его идеи продолжают служить прогрессу науки.

РЕФЕРАТЫ

УДК 681.31 : 378.1

О генерировании задач в автоматизированных обучающих системах. Каляцкая Л. В. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Приводится классификация автоматических генераторов задач. Описывается вероятностная контекстно-зависимая грамматика, используемая в обучающей программе по математической логике.

Библ. 5 назв.

УДК 621.396.963.8

Принципы расчёта электростатических разверток с учетом кривизны поверхности экрана и емкости отклоняющей системы. Красноголовый Б. Н. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Выполнен анализ искажений отклонения луча в электростатических ЭЛТ, обусловленных кривизной поверхности экрана и емкостью отклоняющих пластин. На примере линейной развертки рассмотрена методика синтеза оптимальной формы напряжения развертки, корректирующей ошибки отклонения. Предложена схема расчета сигнальной коррекции искажений развертки для любых законов электростатического отклонения луча.

Библ. 2 назв., ил. 4.

УДК 595.33/34 : 539.193; 539.194

Колебательные спектры твердой фазы тромбина. Барковский Е. В., Прокопшина Н. А., Хорватович Н. Н., Черенкевич С. Н. «Вестн. Белорусского ун-та, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Получены колебательные спектры (комбинационного рассеяния и инфракрасные) твердой фазы тромбина, лиофильно высущенного из растворов различных рН. Произведено отнесение полос в спектрах белка к колебаниям аминокислотных остатков и CONH групп полипептидной цепи. На основании анализа полос амид I, II, V делается предположение о существовании в молекулах тромбина, находящегося в твердой фазе, участков с α -спиральной конформацией. При переходе от нейтрального значения рН к краиним наблюдаются значительные изменения спектров, что свидетельствует о возможном наличии различных структурных состояний молекул тромбина, проявляющихся в виде двух «спектральных форм».

Библ. 11, назв., ил. 1.

УДК 621.372

О применении цифровой фильтрации для сокращения времени расчета антенных характеристик. Будай А. Г., Личко Г. П. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Приводятся аналитические соотношения, позволяющие оценить степень сокращения времени вычисления антенных характеристик при использовании цифровой фильтрации в зависимости от объема исходных данных, характеристик цифровых фильтров и способов обработки и найти условия, при которых целесообразно применение фильтров с ограниченным импульсным откликом для сокращения избыточности данных измерения АФР антенн.

Библ. 4 назв., ил. 2.

УДК 541.141

Роль фотохимической реакции в процессе тушения флуоресценции растворов 1, 3, 5-трифенилипразолина галоидзамещенными метаном. Быкова И. Г., Бутримович О. В., Исаченкова Л. А., Рябцева В. А., Саржевский А. М. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Изучено тушение флуоресценции растворов трифенилипразолина галоидзамещенными метаном. По отношению квантовых выходов непотушенного и потушенного B_0 /B растворов, константам тушения флуоресценции, константам реакции и квантовым выходам реакции сделан вывод о том, что тушение флуоресценции трифенилипразолина галоидзамещенными метаном обусловливается главным образом фотохимической реакцией, которая протекает через синглетное возбужденное состояние.

Библ. 14 назв., ил. 4, табл. 2.

УДК 577.3

О механизмах антиопухолевого действия некоторых комплексов переходных металлов. Крот В. И., Егоров А. С., Неокладнова Л. Н., Ильюкевич Л. А., Оришева Р. М., Умрейко Д. С., Липницкий И. В. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

На основе экспериментальных данных по влиянию гексахлороплатината натрия и дихлоротетрапиридникобальтихлорида на свойства надмолекулярных дезоксирибонуклеопротеидных структур высказывается предположение, что в основе механизмов антиопухолевого действия комплексов переходных металлов может лежать существенная модификация надмолекулярной структуры хроматина.

Библ. 9 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 621.396

Флуктуации модулирующего лазерный луч СВЧ-сигнала в турбулентной атмосфере. Данейко Н. Ф., Изох В. В., Корхов Е. Л., Лаврукович В. И., Сидоренко А. В. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Приводятся результаты экспериментального исследования флуктуаций амплитуды и фазы непрерывного СВЧ-сигнала, модулирующего лазерный луч, в оптической линии связи с прямым детектированием в зависимости от турбулентности приземного слоя атмосферы. Получено, что закон распределения вероятностей аппроксимируется нормальным распределением для флуктуаций амплитуды и равномерным для флуктуаций фазы модулирующего лазерный луч СВЧ-сигнала. Частотный спектр флуктуаций амплитуды лежит ниже 250 Гц.

Библ. 5 назв., ил. 2, табл. 1.

УДК 621.372.413

О структуре поля мод плоскопараллельного диэлектрического слоя. Рудницкий А. С., Хапалюк А. П. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Методом парциальных неоднородных плоских волн получено общее выражение для структуры поля мод плоскопараллельного диэлектрического слоя. В частном случае волноводная мода может иметь вид, как показано в работе, узконаправленного пучка света с синусоидальной зависимостью поля от поперечной координаты внутри слоя, экспоненциальной вне его и гауссовым распределением поля в плоскостях, параллельных границам слоя.

Библ. 4 назв., ил. 1.

УДК 616-073.75.(088.8)

Исследование шумов и возможностей улучшения качества изображения в комптоновской томоскопии. Грибков А. К., Люцко А. М., Тарутин И. Г. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ.-мат. и мех.», 1979, № 2.

На экспериментальной установке изучены шумы, характерные для метода комптоновской томоскопии. Предложен способ обработки томограммы, действие которого проиллюстрировано на изображениях гетерогенного фантома. При статистической точности измерения элементов изображения 5% электронная плотность неоднородностей определена с погрешностью 2%, а их границы — $\pm 0,2 \cdot 10^{-2}$ м. Примененные инструментальное снижение уровня шумов и способ обработки позволяют сократить длительность измерения томограммы либо измерять ее при меньшей активности источника излучения.

Библ. 8 назв., ил. 2.

УДК 621.777

Измерение температуры на контактной поверхности изделия в процессе высокоскоростного выдавливания. Барановский М. А., Качанов И. В., Макаров Ю. П., Чернявский А. Ф. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Разработана методика регистрации температуры с использованием фотоэлектронного умножителя типа ФЭУ-83 в качестве приемника инфракрасного излучения. Временное разрешение разработанной системы $\tau = 10^{-8}$ с позволяет регистрировать изменение температуры на поверхности изделия в процессе высокоскоростного выдавливания.

Библ. 8 назв., ил. 4.

УДК 681.142.621

Автоматический учет фона и неселективного поглощения в однолучевом атомно-абсорбционном спектрофотометре. Курейчик К. П., Гулаков И. Р. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Описан алгоритм и приведены основные соотношения, характеризующие работу однолучевого атомно-абсорбционного спектрофотометра с автоматическим учетом фона и неселективного поглощения, в режимах определения оптической плотности (концентрации), коэффициента линейного поглощения (пропускания) и коэффициента неселективного поглощения.

Библ. 2 назв., ил. 2.

УДК 621.378

Генератор когерентных световых импульсов наносекундной длительности. Ковалев А. А., Левашкевич Л. В. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Описан оптический квантовый генератор на рубине с электрооптическим затвором, позволяющий получать одиночные световые импульсы наносекундной длительности (3—5 нс). Энергия излучения 0,1 Дж, ширина спектра $\sim 1.8 \text{ см}^{-1}$. Воспроизводимость режима генерации 100 %. При использовании схемы ОКГ с «пассивным» включением электрооптического затвора удалось сузить спектральную ширину импульса излучения до $\sim 0.2 \text{ см}^{-1}$.

Библ. 7 назв., ил. 2.

УДК 681.3

Вопросы ввода алгоритма решения задачи в режиме диалога. Жуков В. В., Кошелевич Л. С. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Проанализированы основные моменты функционирования диалоговых систем по вводу алгоритма решения задачи с удаленного терминала на примере реализованной системы СВАРЗ. Обобщены вопросы, связанные с обменом информацией между пользователем и ЭВМ в такого рода системах.

Библ. 5, ил. 1.

УДК 681.3.06 : 51

Программные и СМ-грамматики. Певзнер Л. В. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Устанавливается связь между программными и СМ-грамматиками. Доказывается, что для программной грамматики с контекстно-зависимым ядром можно построить эквивалентную ей СМ-грамматику с пятью магазинами.

Библ. 5 назв.

УДК 518.517.91/94

О численном решении задачи Коши для дифференциальных уравнений высших порядков одношаговыми методами. Шалимова В. Н. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Исследована сходимость одношаговых методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. Приведены правила приближенного решения этой задачи для дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Приведены результаты численных экспериментов.

Библ. 4 назв.

УДК 518.517.392

Об одной кубатурной формуле для двумерного сингулярного интеграла. Мастянича В. С. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех.», 1979, № 2.

Для двумерного сингулярного интеграла построена кубатурная формула при помощи ломаной двух переменных. Получена оценка остаточного члена кубатурной формулы.

Библ. 3 назв.

УДК 517.948

Об одном алгоритме улучшения допустимых управлений в дискретных стохастических системах. Дудин А. Н. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Доказано необходимое условие оптимальности в задаче минимизации математического ожидания критерия Больца вдоль траекторий нелинейной дискретной стохастической системы в случае полной обратной связи. Получен алгоритм улучшения допустимых управлений, основанный на использовании этого необходимого условия оптимальности.

Библ. 3 назв.

УДК 517.917

О существовании траектории, идущей из одной особой точки в другую. Обидина Н. И. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Найдены условия, при выполнении которых система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1) \\ \dot{x}_k = Q_{k-1}(x_1; \dots; x_{k-1}) + R_{k-1}(x_1; \dots; x_{k-1})x_k, \quad k = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

имеет траекторию, идущую из одной особой точки в другую, даны достаточные условия отсутствия такой траектории.

Библ. 5 назв.

УДК 517.943.2

К устойчивости вполне интегрируемых систем в банаховом пространстве. Гайдушин Л. Н. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Получены условия устойчивости нулевого решения вполне интегрируемой системы

$$\frac{dx(t)}{dt_j} = f_j(t, x(t)) \quad (j = 1, \dots, m),$$

где $f_j : R^m \times B \rightarrow B$, B — банахово пространство.

Библ. 8 назв.

УДК 517.948

О задаче линейного сопряжения с особенностями. Акбаров Р. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Исследуются условия разрешимости обобщенной задачи Римана в случае, когда искомая функция в конечном числе точек плоскости имеет заданные особенности.

Библ. 7 назв.

УДК 518.321

Нелинейные методы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Бобков В. В., Шалима В. Н. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

В случае задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка построены новые нелинейные явные A -устойчивые численные методы. На модельном примере проведено сравнение предлагаемых методов с известными. Указывается на некоторые возможные обобщения полученных результатов.

Библ. 3 назв.

УДК 539.143

Квадрупольный момент атома водорода. Барышевский В. Г., Кутень С. А., Лившиц С. И., Феранчук И. Д. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 2.

Аналитическими методами в теории возмущений получена величина квадрупольного момента атома водорода.

Библ. 6 назв.