Краткие сообщения

УДК 517.948

Р. АКБАРОВ

О ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Пусть L состоит из простых непересекающихся замкнутых кривых Ляпунова $L_1, L_2, \ldots, L_N$, ограничивающих на плоскости $\overline{C}$ некоторую конечную связную область D^+. Через D^- обозначим область, дополняющую $\overline{D}^+$ до $\overline{C}$. Положительной будем считать такую ориентацию контура L, которая оставляет область D^+ слева. Пусть $F = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — конечное множество особых точек, заданных на $\overline{C} \setminus L$. Для этой конфигурации рассматривается трехэлементная задача Римана с главными частями $\xi^\nu_\pm(z)$, заданными в $n = n_+ + n_-$ особых точках, не лежащих на L. Знак «+» внизу относится к особым точкам и главным частям, лежащим в D^+, а «—» — к особым точкам и главным частям, лежащим в D^-. Границы ∂u_ν^+ окрестностей особых точек, лежащих в области D^+, ориентируем в направлении по часовой стрелке, а границы ∂u_ν^- окрестностей особых точек, лежащих в D^-, — против часовой стрелки. На L зададим H-непрерывные функции $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, причем $a(t) \neq 0$ всюду на L. Рассмотрим следующую краевую задачу.

Найти все функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$, аналитические на $(\overline{C} \setminus L) \setminus \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \overline{u}_\nu$, исчезающие на бесконечности, H-непрерывно продолжимые слева и справа на L, где должно выполняться краевое условие:

$$\Phi^+(t) = a(t)\,\Phi^-(t) + b(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \quad t \in L. \tag{1}$$

Неизвестные функции $\Phi(z)$ должны быть H-непрерывными в $\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \overline{u}_\nu \setminus F_\nu$ так, чтобы разности $\Phi(z) - \xi^\nu(z)$ были аналитическими в u_ν.

Сформулированная задача без учета заданных главных частей была хорошо изучена в [1—4]. В данной работе решение задачи дается методом введения дополнительных контуров, встречавшимся уже в [5—7].

Обозначим: $L^+ = \bigcup\limits_{\nu=1}^{n_+} \partial u_\nu^+$, $L^- = \bigcup\limits_{\nu=1}^{n_-} \partial u_\nu^-$, $L^+ \cup L^- = L'$, $L \cup L' = \Gamma$, $\varkappa = \operatorname{Ind}_L a(t)$. Введем неизвестную функцию:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \Phi(z), & \text{если } z \notin \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} \overline{u}_\nu \\ \Phi(z) - \xi^\nu(z), & \text{если } z \in \dot{u}_\nu = u_\nu \setminus F_\nu. \end{cases}$$

Пусть $z \to t \in \partial u_\nu^+$, тогда $\varphi^+(t) = \Phi^+(t)$ при $z \in D^+$ и $\varphi^-(t) = \Phi^-(t) - \xi_+^\nu(t)$ при $z \in D^-$. Но $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$ на ∂u_ν. Отсюда следует, что $\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \xi_+^\nu(t)$, $t \in \partial u_\nu^+$.

Аналогично, если $z \to t \in \partial u_\nu^-$, тогда $\varphi^-(t) = \Phi^-(t)$ при $z \in D^-$ и $\varphi^+(t) = \Phi^+(t) - \xi_-^\nu(t)$ при $z \in D^+$. Из этих равенств получим

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) - \xi_-^\nu(t), \quad t \in \partial u_\nu^-.$$

На контуре L функция $\varphi(z)$ удовлетворяет тому же краевому условию (1), что и $\Phi(z)$. Следовательно, предельные значения функции (1) на контуре Г удовлетворяют условию:

$$\begin{gathered} \varphi^+(t) = a(t)\varphi^-(t) + b(t)\overline{\varphi^-(t)} + g(t), \quad t \in L \\ \varphi^+(t) = \varphi^-(t) \pm \xi_\pm^\nu(t), \quad t \in L^\pm. \end{gathered} \tag{2}$$

Соотношения (2) запишем в виде одного краевого условия:

$$\varphi^+(t) = a_1(t)\varphi^-(t) + b_1(t)\overline{\varphi^-(t)} + g_1(t), \quad t \in \Gamma, \tag{3}$$

где $a_1(t) = \begin{cases} a(t), & \text{если } t \in L, \\ 1, & \text{если } t \in L^\pm, \end{cases}$ $\quad b_1(t) = \begin{cases} b(t), & \text{если } t \in L, \\ 0, & \text{если } t \in L^\pm, \end{cases}$

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t), & \text{если } t \in L, \\ \pm \xi_\pm^\nu(t), & \text{если } t \in \partial u_\nu^\pm. \end{cases}$$

Очевидно, индекс $a_1(t)$ вдоль Г совпадает с $\varkappa$. Исчезающие на бесконечности решения задачи (3) будем искать в виде

$$\begin{gathered} \varphi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a_1(\tau)\rho(\tau) + b_1(\tau)\overline{\rho(\tau)} + g_1(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \\ \varphi^-(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\rho(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\rho(t)$ — определенное решение интегрального уравнения

$$T\rho = \frac{a_1(t)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\rho(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a_1(\tau) - a_1(t)}{\tau - t}\rho(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{b_1(\tau)\overline{\rho(\tau)}\,d\tau}{\tau - t} -$$

$$- \frac{b_1(t)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{\rho(\tau)}\,d\bar\tau}{\bar\tau - \bar t} = \frac{1}{2}g_1(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_1(\tau)\,d\tau}{\tau - t}. \tag{5}$$

Отметим, что интегральное уравнение (5) получено в результате применения формулы Сохоцкого — Племеля [4] к формулам (4) и использования краевого условия (3). Покажем, что всякое решение задачи (3) представимо формулами (4). Действительно, пусть $\varphi^-(t)$ — решение задачи (3). Полагая $\varphi^-(t) = \rho(t)$ и применяя формулу Коши, получаем $\varphi^-(z)$. Далее из условия (3) найдем

$$\varphi^+(t) = a_1(t)\rho(t) + b_1(t)\overline{\rho(t)} + g_1(t)$$

и, снова применяя формулу Коши, получаем представление для $\varphi^+(z)$. Перепишем уравнение (5) в другой форме:

$$T\rho = \frac{a_1(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\rho(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{a_1(\tau) - a_1(t)}{\tau - t}\rho(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{b_1(\tau) - b_1(t)}{\tau - t}\overline{\rho(t)}\,d\tau + \frac{b_1(t)}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{d\tau}{\tau - t} - \overline{\left(\frac{d\tau}{\tau - t}\right)}\right]\overline{\rho(\tau)} =$$

$$= \frac{1}{2}g_1(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g_1(\tau)\,d\tau}{\tau - t}. \tag{6}$$

Интегральное уравнение (6) представляет собой уравнение, рассмотренное в работах [2, 3]. Уравнение (6) имеет индекс, равный нулю, следовательно, справедливо следующее утверждение.

Для разрешимости уравнения (6) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\operatorname{Re}\left\{\int_\Gamma\left[\frac{1}{2}g_1(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{g_1(\tau)\,d\tau}{\tau-t}\right]\sigma(t)\,dt\right\}=0,$$

где $\sigma(t)$ — произвольное решение однородного уравнения

$$T'\sigma(\tau)=\frac{a_1(t)}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\sigma(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{a_1(\tau)-a_1(t)}{\tau-t}\sigma(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{b_1(\tau)\tau'^2-\overline{b_1(t)t'^2}}{\tau-t}\,d\tau+\frac{b_1(t)}{2\pi i}\int_\Gamma\left[\frac{d\tau}{\tau-t}-\left(\overline{\frac{d\tau}{\tau-t}}\right)\right]\overline{\sigma(\tau)}=0,$$

союзного к уравнению (6).

Рассмотрим теперь однородную задачу

$$\psi^-(t)=a_1(t)\psi^+(t)+\overline{b_1(t)t'^2\psi^+(t)},\quad t\in\Gamma,\tag{7}$$

сопряженную к задаче (1) ($g(t)\equiv 0$). Сопряженная задача (7) строится по способу [2] (§ 4 с. 160). Исчезающее на бесконечности решение задачи (7) будем искать в виде

$$\psi^+(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\sigma(\tau)\,d\tau}{\tau-z},$$

$$\psi^-(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{a_1(\tau)\sigma(\tau)+\overline{b_1(\tau)\tau'^2\sigma(\tau)}}{\tau-z}\,d\tau.\tag{8}$$

Очевидно, что всякое решение задачи (7) представимо формулой (8). Вычисляя предельные значения $\Psi^+(t)$ и $\Psi^-(t)$ по формулам Сохоцкого — Племеля с учетом (7), получаем интегральное уравнение $T'\sigma(t)=0$. В силу (8) задача (7) эквивалентна уравнению $T'\sigma(t)=0$. Таким образом, задачи (3) и (7) эквивалентны союзным уравнениям (5) и $T'\sigma(t)$. Следовательно, для задачи (3) имеет место утверждение, аналогичное теореме из [2] (гл. 4, § 4), [3] (§ 17):

Задача (3) разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности

$$\operatorname{Re}\left\{\int_\Gamma g_1(\tau)\psi_j^+(\tau)\,d\tau\right\}=0$$

для любого решения $\psi_j^+(z)$ сопряженной краевой задачи (7).

Меняя ориентацию на кривых ∂u_ν^+ и заменяя Γ на исходные контуры, для задачи (1) получаем следующий результат.

Т е о р е м а. Для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия разрешимости

$$\operatorname{Re}\left\{\int_L g(t)\psi_j^+(t)\,dt=\sum_{\nu=1}^{n_+}\operatorname{Re}\left\{\int_{\partial u_\nu^+}\xi_+^\nu(t)\psi_j^+(t)\,dt\right\}+\right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n_-}\operatorname{Re}\left\{\int_{\partial u_\nu^-}\xi_-^\nu(t)\psi_j^-(t)\,dt\right\}\tag{9}$$

для любого решения $\psi_j(z)$ сопряженной задачи (7).

Следствие. Если при каждом $\nu = 1, 2, \ldots, n$ заданные главные части $\xi_{\pm}^{\nu}(z)$ аналитичны в проколотых окрестностях u_ν, то для разрешимости задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия разрешимости

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L g(t)\,\psi_j^+(t)\,dt\right\} = \sum_{\nu=1}^{n_+}\mathrm{Im}\{\operatorname*{res}_{\zeta=F_\nu^+}[\xi_+^\nu(\zeta)\,\psi_j^+(\zeta)\,d\zeta]\} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n_-}\mathrm{Im}\{\operatorname*{res}_{\zeta=F_\nu^-}[\xi_-^\nu(\zeta)\,\psi_j^-(\zeta)\,d\zeta]\}$$

для любого решения $\psi_j(z)$ сопряженной задачи (7), где $F_\nu^+(F_\nu^-)$ — особая точка, принадлежащая $D^+(D^-)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
2. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе, 1963.
3. Литвинчук Г. С. Краевые задачи со сдвигом и сингулярные интегральные уравнения. М., 1977.
4. Зверович Э. И. и Литвинчук Г. С.— «УМН», 1968, 23, вып. 3(141), 67.
5. Акбаров Р., Зверович Э. И.— «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 1.
6. Акбаров Р.— «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.», 1979, № 1.
7. Акбаров Р.— «ДАН БССР», 1977, 22, № 7, 588.

Поступила в редакцию 20/V 1977 г.

Кафедра теории функций

УДК 518.321

В. В. БОБКОВ, В. Н. ШАЛИМА

НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В развитие [1] предлагаются новые численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, характеризующиеся улучшенными свойствами устойчивости в сравнении с известными методами.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\ddot{u} = f(t, u, \dot{u}), \tag{1}$$

где f — достаточно гладкая функция указанных аргументов. По аналогии с [2] метод численного решения этой задачи станем называть A-устойчивым, если в случае $f(t, u, \dot{u}) \equiv -2\lambda\dot{u} - \gamma\lambda^2 u$ при любых постоянных $\lambda > 0$, $\gamma > 0$ его погрешность стремится к нулю, когда $t \to \infty$.

Явные методы типа Рунге — Кутта, например, удовлетворяют условию A-устойчивости лишь при жестких ограничениях на величину шага τ численного интегрирования. Построим примеры таких явных методов, которые A-устойчивы при любых $\tau > 0$.

Рассмотрим семейство зависящих от параметров a_i, b_i, c_i, α_i, β_i ($i = 0, 1$) нелинейных методов

$$\hat{y} = y + \tau\dot{y} + \frac{\tau^2}{2} f_0\,\mathrm{Reg}_0, \tag{2}$$

$$\hat{\dot{y}} = \dot{y} + \tau f_1\,\mathrm{Reg}_1, \tag{3}$$