где $k=\frac{a_1b-ab_1}{ad-bc}$.

Система (12) при $a_1d-b_1c=a_1b-b_1a$ и

1) $bl_1>0$, $ab[l_1a-(c_1+kd_1)b]>0$ или $bl_1<0$ и $ab[l_1a-(c_1+kd_1)b]<0$, или $bl_1<0$, $ab[l_1a-(c_1+kd_1)b]>0$, $(a_2+b_2k+c_2k^2)l_1-(d_2+l_2k)(c_1+kd_1)=(a_2+b_2k+c_2k^2)b-(d_2+l_2k)a$ имеет траекторию, идущую из одной особой точки в другую;

2) $bl_1>0$, $ab[l_1a-(c_1+d_1k)b]<0$ имеет бесконечное множество траекторий, идущих из одной особой точки в другую.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goron Paul.— «Sian. j. Appl. math», januaru 1974, 26, № 1.
2. Авдонин Н. И.— «Дифференц. уравнения», 1968, 4, № 4, 639.
3. Авдонин Н. И.— «Дифференц. уравнения», 1970, 6, № 7, 1188.
4. Табуева В. А.— «Изв. вузов СССР. Математика», 1958, № 4, 227.

Поступила в редакцию
14/I 1977 г.

Кафедра высшей математики

УДК 517.943.2.

Л. Н. ГАЙШУН

К УСТОЙЧИВОСТИ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве привлекают внимание математиков и других специалистов [1—4], так как, помимо чисто теоретического, имеют большое практическое значение [1].

Пусть B — банахово (действительное или комплексное) пространство; $L(B)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов B в B; $G(B)$ — группа обратимых элементов алгебры $L(B)$; R^m — m-мерное евклидово пространство и $R_+^m=\{t: t\in R^m, t_1\geqslant 0, \ldots, t_m\geqslant 0\}$.

Рассмотрим вполне интегрируемую [5] систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t_j}=f_j(t, x(t)), \quad (j=1, \ldots, m), \tag{1}$$

где $x(t)\in B$, $t\in R_+^m$, $f_j(t, x)$ $(j=1, \ldots, m)$ — функции, определенные для $(t, x)\in R_+^m\times B$ со значениями в B, непрерывно дифференцируемые в $R_+^m\times B$ [5].

Предположим, что $f_j(t, 0)=0$ $(j=1, \ldots, m;\ t\in R_+^m)$. Тогда функция $x(t)\equiv 0$ является решением системы (1). Это решение будем называть нулевым или тривиальным.

Определение. Нулевое решение системы (1) устойчиво (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\|x(t)\|<\varepsilon$ как только $\|x^0\|<\delta$; $x^0=x(t^0)$; это решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и существует такое $\Delta>0$, что $x(t)\to 0$ при $t_1+\ldots+t_m\to 0$, если $\|x^0\|<\Delta$.

При изучении вопросов устойчивости системы (1) полезна одна лемма, для формулировки которой сделаем некоторые замечания. Пусть Γ — некоторая спрямляемая кривая в R^m, начинающаяся в точке t^0 и оканчивающаяся в точке t^1 (которая может быть бесконечно удаленной) и такая, что при движении вдоль Γ от t^0 к t^1 координаты $t_1, \ldots, t_m$ движущейся точки не убывают. Через $\Gamma(t^0, t)$ будем обозначать часть кривой Γ, начинающуюся в точке t^0 и оканчивающуюся в точке $t\in\Gamma$. Пусть в точках Γ определена действительная неотрицательная функция $g(t)$.

Лемма 1. Если существуют положительные постоянные c и δ такие, что

$$g(t) \leqslant c + \delta \int\limits_{\Gamma(t^0,\, t)} g(\tau)\, d\tau_1 + \ldots + g(\tau)\, d\tau_m$$

для любого $t \in \Gamma$, то

$$g(t) \leqslant c \exp\{\delta[(t_1 - t_1^0) + \ldots + (t_m - t_m^0)]\}, \quad t \in \Gamma.$$

Нам требуются еще некоторые элементарные факты из теории линейных систем вида (1). Пусть $A_j(t) \in L(B)$, $t \in R_+^m$ — непрерывно дифференцируемые (в равномерной операторной топологии) [6] оператор-функции. Рассмотрим вполне интегрируемую [5] линейную систему

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t_j} = A_j(t)\, y(t) \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Оператор-функцию $\Phi(t) \in G(B)$, $t \in R_+^m$ будем называть фундаментальным оператором (ФО) системы (2), если $\Phi(t)$ удовлетворяет системе операторных уравнений

$$\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_j} = A_j(t)\, \Phi(t) \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{3}$$

Легко проверить, что система (3) вполне интегрируема, если вполне интегрируема система (2).

ФО $\Phi(t)$, удовлетворяющий дополнительному условию $\Phi(0) = I$, где I — единичный элемент группы $G(B)$, будем называть оператором Коши системы (2).

Если система (2) вполне интегрируема и функции $f_j : R_+^m \to B$ таковы, что вполне интегрируема система

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t_j} = A_j(t)\, x(t) + f_j(t) \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{4}$$

то всякое решение $x(t, t^0, x^0)$ $(x(t^0, t^0, x^0) = x^0)$ этой системы определяется формулой

$$x(t, t^0, x^0) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t^0)\, x^0 + \int\limits_{t^0}^{t} \Phi(t)\,\Phi^{-1}(\tau)\, f_1(\tau)\, d\tau_1 + \\ + \ldots + \Phi(t)\,\Phi^{-1}(\tau)\, f_m(\tau)\, d\tau_m, \tag{5}$$

в которой криволинейный интеграл не зависит от пути, соединяющего точки t^0 и t, а $\Phi(t)$ — некоторый ФО системы (2).

Предположим, что система (2) обладает ФО $\Phi(t)$, удовлетворяющим неравенству

$$\|\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t^0)\| \leqslant c \exp\{-\gamma[(t_1 - t_1^0) + \ldots + (t_m - t_m^0)]\}, \tag{6}$$

где c и γ — положительные постоянные, и наряду с (2) рассмотрим вполне интегрируемую нелинейную систему

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t_j} A_j(t)\, x(t) + R_j(t, x(t)) \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{7}$$

у которой функции $R_j : R_+^m \times B \to B$ удовлетворяют в $R_+^m \times B$ неравенству

$$\|R_j(t, x)\| \leqslant \nu \|x\|, \tag{8}$$

где ν — положительная постоянная. При этих предположениях имеет место следующая

Теорема 1. Если для ФО системы (2) выполняется неравенство (6), то нулевое решение системы (7) асимптотически устойчиво при любых функциях $R_1(t, x), \ldots, R_m(t, x)$, удовлетворяющих условиям полной интегрируемости системы (7) и неравенствам (8) с достаточно малой постоянной ν.

Доказательство. Используя формулу (5), решение $x(t, t^0, x^0)$ системы (7) можно записать в виде

$$x(t, t^0, x^0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t^0)x^0 + \int_{t^0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)R_1(\tau, x(\tau, t^0, x^0))\,d\tau_1 + \ldots + \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)R_m(\tau, x(\tau, t^0, x^0))\,d\tau_m.$$

Возьмем какую-нибудь кривую Γ, выходящую из точки t^0, вдоль которой координаты $t_1, \ldots, t_m$ не убывают (при движении от t^0) и $t_1 + \ldots + t_m \to \infty$. Тогда, учитывая неравенство (6) и свойство криволинейных интегралов [7], для любой точки $t \in \Gamma$ будем иметь

$$\|x(t, t^0, x^0)\| \leqslant c\|x^0\| e^{-\gamma[(t_1-t_1^0)+\ldots+(t_m-t_m^0)]} + \nu c \int_{\Gamma(t^0, t)} e^{-\gamma[(t_1-\tau_1)+\ldots+(t_m-\tau_m)]}\|x(\tau, t^0, x^0)\|(d\tau_1 + \ldots + d\tau_m), \tag{9}$$

где $\Gamma(t^0, t)$ — часть кривой Γ, начинающаяся в точке t^0 и оканчивающаяся в точке $t \in \Gamma$. Обозначая

$$\varphi(t) = \|x(t, t^0, x^0)\| e^{\gamma[(t_1-t_1^0)+\ldots+(t_m-t_m^0)]},$$

из (9) получим неравенство

$$\varphi(t) \leqslant c\|x^0\| + \int_{\Gamma(t^0, t)} \varphi(\tau)\,d\tau_1 + \ldots + \varphi(\tau)\,d\tau_m.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$\|x(t, t^0, x^0)\| \leqslant c\|x^0\| e^{-(\gamma - c\nu)[(t_1-t_1^0)+\ldots+(t_m-t_m^0)]}.$$

Поскольку приведенные рассуждения справедливы для любой кривой Γ, а входящие в оценку $\|x(t, t^0, x^0)\|$ постоянные не зависят от выбора Γ, то при $\nu > 0$, удовлетворяющем неравенству $\nu > \gamma/c$, получаем, что

$$\|x(t, t^0, x^0)\| \leqslant c\|x^0\| e^{-\mu[(t_1-t_1^0)+\ldots+(t_m-t_m^0)]}$$

для всех $t \in R^m$, $t_i \geqslant t_i^0$ $(i = 1, \ldots, m)$, где $\mu = \gamma - c\nu$, и, следовательно, $\|x(t, t^0, x^0)\| \to 0$ при $t_1 + \ldots + t_m \to \infty$. Теорема доказана.

Следствие. Если в системе (2) оператор-функции $A_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ не зависят от t, а спектры $\sigma(A_j)$ операторов A_j $(j = 1, \ldots, m)$ лежат в левой полуплоскости, то неравенство (6) выполняется и, следовательно, для системы (7), у которой оператор-функции $A_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ не зависят от t, теорема 1 может быть сформулирована следующим образом: если спектры $\sigma(A_j)$ операторов A_j $(j = 1, \ldots, m)$ лежат в левой полуплоскости, то нулевое решение системы (7) асимптотически устойчиво при любых функциях $R_1(t, x), \ldots, R_m(t, x)$, удовлетворяющих условиям полной интегрируемости системы (7) и неравенствам (8) с достаточно малой постоянной $\nu > 0$.

Другой важный класс линейных систем, для которых выполняется неравенство (8), образуют асимптотически устойчивые приводимые системы [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
2. Крейн М. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1968.

3. Д а л е ц к и й Ю. Л., К р е й н М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. *М.*, 1970.
4. М а с с е р а Х., Ш е ф ф е р Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М., 1964.
5. Д ь е д о н н е Ж. Основы современного анализа. М., 1964.
6. Х и л л е Э., Ф и л л и п с Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
7. Г а в у р и н М. К.— «Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. наук», 1950, вып. 19.
8. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1950.

Поступила в редакцию
21/I 1977 г.

Кафедра дифференциальных уравнений