$$\overline{\psi}(t) = -\frac{\partial \Phi_{k-1}(\overline{x}(t+1),\ t+1)}{\partial x};$$

$$\overline{u}(\cdot) = \{u^k(t_0),\ \ldots,\ u^k(\tau-1),\ u,\ u^{k-1}(\tau+1),\ \ldots,\ u^{k-1}(t_1-1)\};$$

$\overline{x}(\cdot) = \{x_0,\ \overline{x}(t_0+1),\ \ldots,\ \overline{x}(t_1)\}$ — соответствующая $\overline{u}(\cdot)$ траектория.

Функции $\overline{\psi}$ определяются из рекуррентного соотношения:

$$\overline{\psi}(t-1) = \frac{\partial H(\overline{x}(t),\ \overline{\psi}(t),\ \overline{u}(t),\ t)}{\partial x}$$

для всех $t \in [\tau+1,\ t_1-1]$,

$$\overline{\psi}(t_1-1) = -\frac{\partial \varphi(\overline{x}(t_1))}{\partial x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования. Минск, 1975.
2. Калинин А. И.— «Дифференц. уравнения», № 2, 1978.
3. Розоноэр Л. И.— «Автоматика и телемеханика», № 10—12, 1959.

Поступила в редакцию 11/XII 1976 г.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 517.917

Н.И. ОБИДИНА

О СУЩЕСТВОВАНИИ ТРАЕКТОРИИ, ИДУЩЕЙ ИЗ ОДНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ В ДРУГУЮ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(x),\quad \dot{y} = Q(x) + R(x)y, \tag{1}$$

где функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — непрерывно дифференцируемы и не имеют общих множителей.
2. Уравнение $P(x) = 0$ имеет m простых корней, где $m \geqslant 2$.
3. Функция $R(x) \neq 0$ при $x = x_l$, если $P(x_l) = 0$, $l = 1, 2, \ldots, m$.

Отметим, что признаки существования сепаратрис, идущих из одного седла в другое, из седла в то же седло, из седла в узел, указаны в работах [1—4].

Всегда можно считать, что одна из особых точек находится в начале координат. Пусть

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{l+1} < x_l = 0 < x_{l+1} < \ldots < x_m,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — абсциссы особых точек. Фазовая плоскость прямыми $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_m$ разобьется на вертикальные полосы. Каждая из этих прямых является инвариантным множеством. Ограничимся рассмотрением поведения траекторий в полосе $0 < x < x_{l+1}$, так как в остальных полосах рассуждения будут аналогичны. Слева от прямой $x = x_1$ и справа от прямой $x = x_m$, а также внутри полос траектории, идущей из особой точки в ту же точку, не будет на основании [4].

Пусть вторая особая точка расположена на оси OX. Если это не так, то преобразованием $x = \overline{x}$, $y = \alpha\overline{x} + \overline{y}$, где $\alpha = \frac{Q(x_{l+1})}{R(x_{l+1})\,x_{l+1}}$, систему (1) сведем к системе того же вида

$$\dot{x} = P(x),\quad \dot{y} = N(x) + R(x)y, \tag{2}$$

где $N(0) = N(x_{l+1}) = 0$ и $N(x) = Q(x) + \alpha x R(x) - \alpha P(x)$. Точки $O(0;\ 0)$ и $A(x_{l+1};\ 0)$ — особые. Вертикальных асимптот нет. Траектории, находящиеся в полосе, за пределы ее выйти не могут. Особая точка будет либо узлом, либо седлом. Из A в O может идти бесконечное множество траекторий, либо одна, либо ни одной при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Пусть траектории входят в точку O при $t \to +\infty$.

1'. $R(x)$ сохраняет знак или меняет его n раз, где $n=2i$, т. е. $R(0)R(x_{l+1})>0$. Тогда λ_2 для точек O и A имеет одинаковые знаки, а λ_1 — разные. ($\lambda_{1,2}$ — корни характеристического уравнения для особой точки $\lambda_1=P'(x_j)$, $\lambda_2=R(x_j)$, $j=l$, $l+1$.) Без ограничения общности будем считать, что $O(0;\ 0)$ — узел, тогда $A(x_{l+1};\ 0)$ — седло. Траектории $x=0$ и $x=x_{l+1}$ одновременно стремятся к особой точке. Здесь $|\dot{x}|<+\infty$. Справа к точке O стремятся все траектории и образуют двумерное многообразие, т. е. заполняют всю полосу. Из точки A слева выходит одна траектория $y=S(x)$, т. е. многообразие состоит из одной линии. Эти два многообразия пересекаются по кривой $y=S(x)$. Пересечение многообразий будет нормальным на основании [1]. Существует единственная траектория, идущая из точки A в точку O. Эта траектория устойчива при возмущении.

Если $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ — полиномы, то из явного выражения для сепаратрисы следует, что существует единственная траектория, идущая из седла в узел, так как $\int\limits_{x_{l+1}}^{0} \psi(x_0;\ x)\,dx = C$, где

$$\psi(x_0;\ x)=\frac{Q(x)}{P(x)}\exp\left[-\int\limits_{x_0}^{x}\frac{R(x)}{P(x)}\,dx\right].$$

Остальные траектории, расположенные в окрестности точки O выше кривой $y=S(x)$, уходят в $+\infty$ по y, а если же траектории расположены в окрестности точки O ниже $y=S(x)$, то уходят в $-\infty$ по y при $t\to+\infty$.

2'. $R(x)$ меняет знак r-раз, где $r=2i-1$, т. е. $R(0)R(x_{l+1})<0$, причем $R(0)P'(0)>0$, $R(x_{l+1})P'(x_{l+1})>0$. Тогда точки O и A — узлы. Все траектории, выходящие из A, стремятся к O, и нет изолированной траектории, идущей из A в O.

3'. $R(x)$ меняет знак r-раз, где $r=2i-1$, т. е. $R(0)R(x_{l+1})<0$, причем $R(0)P'(0)<0$, $R(x_{l+1})P'(x_{l+1})<0$. Точки O и A — седла. В этом случае может быть либо одна траектория, идущая из A и O, либо ни одной.

Если $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ — полиномы, то $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{R(x)}{P(x)}\,dx\to+\infty$ при $x\to x_{l+1}$ и $\int\limits_{x_0}^{x}\frac{R(x)}{P(x)}\,dx\to+\infty$ при $x\to 0$.

Тогда для существования единственной траектории, идущей из седла в седло, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_{0}^{x_{l+1}}\psi(x_0;\ x)\,dx=0\quad x\in[0;\ x_{l+1}]. \tag{3}$$

Теорема 1. Если для системы (1) выполнены условия 1—3 и кривая $Q(x)+R(x)y=0$ не пересекает оси OX на $]0;\ x_{l+1}[$, то на $[0;\ x_{l+1}]$ нет траектории, идущей из седла в седло.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\dot{x}>0$, а $\dot{y}>0$ под изоклиной нуля и $\dot{y}<0$ над изоклиной нуля в окрестности точки O. Сепаратриса, вышедшая из точки O справа при $t\to+\infty$ расположена выше оси OX, а из A слева при $t\to-\infty$ расположена ниже оси OX. Эти сепаратрисы не пересекутся, так как $y'_x>0$ в области $0<x<x_k$, $y<0$ и $x_k<x<x_{l+1}$, $y>0$, где x_k — нуль функции $R(x)$, т. е. нет траектории, идущей из седла в седло.

Теорема 2. Если для системы (1) выполнены условия 1—3 и кривая $Q(x)+R(x)y=0$ пересекает ось OX один раз на $]0;\ x_{l+1}[$ в точке $(x_j;\ 0)$, а $R(x)$ меняет знак один раз при переходе x через x_k, где $x_j<x_k$, то на $[0;\ x_{l+1}]$ нет траектории, идущей из одного седла в другое при $x_0>\frac{x_{l+1}}{2}$, где x_0 — точка экстремума функции $Q(x)+R(x)y=0$, ближайшая к началу координат.

Теорема доказывается аналогично [3] методом сравнения поля уравнения фазовых траекторий системы (1) с полями симметричными, где $\varphi(x)\equiv 1$.

Пример.

$$\dot{x}=(ax+b)x,\quad \dot{y}=(a_1x+b_1)x+(cx+d)y, \qquad (4)$$

где $a,\ b,\ d\neq 0,\ ad-bc\neq 0$. Преобразованием $x=x_1$ $y=\frac{ab_1-a_1b}{ad-bc}x_1+y_1$ систему (4) приведем к виду

$$\dot{x}_1=(ax_1+b)x_1,\quad \dot{y}_1=k(ax_1+b)x_1+(cx_1+d)y_1, \qquad (5)$$

где $k=\frac{a_1d-b_1c-a_1b+ab_1}{ad-bc}$. $O(0;\ 0)$ и $A\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$ — особые точки. $(cx+d)$ на $]0;\ -\frac{b}{a}[$ меняет знак, $b\cdot d<0$, тогда точки O и A — седла.

По теореме 1 при $k\neq 0$ нет траектории, идущей из седла в седло. При $k=0$ такой траекторией будет прямая $y_1=0$. Тогда система (4) при $a_1d-b_1c=a_1b-b_1d$, $b\cdot d<0$ и $ab(bc-ad)<0$ имеет единственную траекторию $y=\frac{ab_1-a_1b}{ad-bc}x$, идущую из седла в седло.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=P(x),\quad \dot{y}=Q(x)+R(x)y,\quad \dot{z}=M(x;\ y)+N(x;\ y)z, \qquad (6)$$

где 1) $P(x),\ Q(x),\ R(x),\ M(x;\ y),\ N(x;\ y)$ — непрерывно дифференцируемые функции по x и y, не имеющие общих множителей;

2) уравнение $P(x)=0$ имеет m простых корней, где $m\geqslant 2$;

3) $R(x)\neq 0,\ N(x;\ y)\neq 0$ при $x=x_l,\ y=y_l$, где x_l — корень $P(x)=0$, а $y_l=-\frac{Q(x_l)}{R(x_l)},\ l=1,2,\ \dots,\ m$.

Пусть абсциссы особых точек расположены следующим образом: $x_1<x_2<\dots<x_m$. Пространство XYZ плоскостями $x=x_1,\ x=x_2,\ \dots,\ x=x_m$ разобьется на вертикальные полосы. Каждая плоскость $x=x_l(l=1,2,\ \dots,\ m)$ является инвариантным множеством — на ней расположены целые траектории. Они описываются двумерной системой

$$\dot{y}=Q(x_l)+R(x_l)y,\quad \dot{z}=M(x_l;\ y)+N(x_l;\ y)z. \qquad (7)$$

В плоскости $x=x_l$ будет только одна особая точка: либо узел, либо седло. Справа от плоскости $x=x_m$ и слева от $x=x_1$, и в плоскости $x=x_l$ траектории, идущей из особой точки в ту же точку, не будет на основании [4]. Для описания траекторий, находящихся в полосах, найдем сначала их проекции на плоскость $Z=0$. Эти проекции являются траекториями двумерной системы (1)

$$\dot{x}=P(x),\quad \dot{y}=Q(x)+R(x)y.$$

Затем строим цилиндрические поверхности, направляющими которых являются траектории системы (1), а образующие параллельны оси OZ. Эти цилиндрические поверхности являются инвариантным множеством. Они задают расслоение каждой полосы.

Для системы (6) траектория, идущая из одной особой точки в другую, может быть лишь в том случае, если она существует для системы (1).

Пусть $y=S(x)$ — уравнение единственной траектории, идущей из одной особой точки в другую в полосе $x_l\leqslant x\leqslant x_{l+1}$ для системы (1). Для системы (6) предположим, что на $[x_l; x_{l+1}]$ особые точки лежат на оси OX, причем одна совпадает с началом координат. Общность рассуждений от этого не изменится. Применив к системе (6) преобразование $x=\tilde{x}$, $y=\tilde{y}+S(\tilde{x})$, $z=\tilde{z}$, получим систему

$$\dot{x}=P(x),\quad \dot{y}=R(x)y,\quad \dot{z}=M(x;\ y+S(x))+N(x;\ y+S(x))z. \tag{8}$$

Поведение траекторий системы (8) описывается системой:

$$\dot{x}=P(x),\quad \dot{z}=M(x;\ S(x))+N(x;\ S(x))z \tag{9}$$

в плоскости $y=0$. Поэтому, если система (1) имеет единственную траекторию, идущую из одной особой точки в другую, а система (9) имеет хотя бы одну такую траекторию, то система (6) всегда имеет хотя бы одну траекторию, идущую из одной особой точки в другую. Такие траектории системы (6) будут расположены на одной поверхности.

Теорема 3. Если для системы (6) выполнены условия 1—3, то для того, чтобы на $[x_l; x_{l+1}]$ существовала одна траектория (бесконечное множество траекторий, лежащих на одной цилиндрической поверхности), идущая из одной особой точки в другую, необходимо и достаточно, чтобы система (1) имела единственную траекторию и система (9) одну такую траекторию (бесконечное множество траекторий).

Доказательство. Достаточность доказана выше.

Необходимость. Пусть система (6) имеет одну траекторию (бесконечное множество траекторий, лежащих на одной цилиндрической поверхности), идущую из одной особой точки в другую. Так как система (1) описывает поведение проекций системы (6) на плоскости $Z=0$, то чтобы здесь была единственная траектория, идущая из одной особой точки в другую, нужно чтобы все траектории системы (6), идущие из одной особой точки в другую, находились на цилиндрической поверхности $y=S(x)$. Поведение траекторий на поверхности $y=S(x)$ описывается системой (9).

Аналогичная теорема справедлива и для системы n дифференциальных уравнений.

Теорема 4. Если система

$$\dot{x}=P(x_1),\ \dot{x}_k=Q_{k-1}(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_{k-1})+R_{k-1}(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_{k-1})x_k \tag{10}$$

$(k=2, 3, \ldots, n)$ удовлетворяет условиям:

1) $P(x_1)$, $Q_{k-1}(x_1; x_2; \ldots; x_{k-1})$, $R_{k-1}(x_1; x_2; \ldots; x_{k-1})$ — непрерывно дифференцируемые функции по $x_1; \ldots; x_{k-1}$ и не имеют общих множителей;

2) уравнение $P(x_1)=0$ имеет m простых корней, где $m\geqslant 2$;

3) $R_{k-1}(x_1^l; \ldots; x_{k-1}^l)\neq 0$, $l=1, 2, \ldots, m$ и x_1^l — корень уравнения $P(x_1)=0$, а $x_{k-1}=-\dfrac{Q_{k-1}(x_1^l; \ldots; x_{k-1}^l)}{R_{k-1}(x_1^l; \ldots; x_{k-1}^l)}$, то для существования единственной траектории (бесконечного множества траекторий, лежащих на од ой цилиндрической поверхности), идущей из одной особой точки в другую, необходимо и достаточно, чтобы система первых $(n-1)$ уравнений имела единственную такую траекторию и система

$$\dot{x}_1=P(x_1),\ \dot{x}_k=Q_{k-1}(x_1;\ S_1(x_1);\ \ldots;\ S_{k-2}(x_1)+$$
$$+R_{k-1}(x_1;\ S(x_1));\ \ldots;\ S_{k-2}(x_1)x_k, \tag{11}$$

где $S_i(x)$ — уравнение траектории, идущей из одной особой точки в другую для $(i+1)$ первых уравнений системы (10), $(i=1, 2, \ldots, k-2)$ имела одну такую траекторию (бесконечное множество траекторий).

Пример.

$$\dot{x}=(ax+b)x,\quad \dot{y}=(a_1x+b_1)(x+(cx+d)y,$$
$$\dot{z}=a_2x^2+b_2xy+c_2y^2+d_2x+l_2y+(c_1x+d_1y+l_1)z, \tag{12}$$

$b\cdot d<0$, $ab(ad-bc)>0$. Если $a_1d-b_1c=a_1b-b_1a$, то в плоскости XOY существует траектория, идущая из седла в седло, $y=kx$, где $k = \frac{a_1 b - a b_1}{ad - bc}$.

Система (12) при $a_1 d - b_1 c = a_1 b - b_1 a$ и

1) $bl_1 > 0$, $ab[l_1 a - (c_1 + kd_1) b] > 0$ или $bl_1 < 0$ и $ab[l_1 a - (c_1 + kd_1) b] < 0$, или $bl_1 < 0$, $ab[l_1 a - (c_1 + kd_1) b] > 0$, $(a_2 + b_2 k + c_2 k^2) l_1 - (d_2 + l_2 k)(c_1 + kd_1) = (a_2 + b_2 k + c_2 k^2) b - (d_2 + l_2 k) a$ имеет траекторию, идущую из одной особой точки в другую;

2) $bl_1 > 0$, $ab[l_1 a - (c_1 + d_1 k) b] < 0$ имеет бесконечное множество траекторий, идущих из одной особой точки в другую.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goron Paul.— «Sian. j. Appl. math», januaru 1974, 26, № 1.
2. Авдонин Н. И.— «Дифференц. уравнения», 1968, 4, № 4, 639.
3. Авдонин Н. И.— «Дифференц. уравнения», 1970, 6, № 7, 1188.
4. Табуева В. А.— «Изв. вузов СССР. Математика», 1958, № 4, 227.

Поступила в редакцию 14/I 1977 г.

Кафедра высшей математики

УДК 517.943.2.

Л. Н. ГАЙШУН

К УСТОЙЧИВОСТИ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве привлекают внимание математиков и других специалистов [1—4], так как, помимо чисто теоретического, имеют большое практическое значение [1].

Пусть B — банахово (действительное или комплексное) пространство; $L(B)$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов B в B; $G(B)$ — группа обратимых элементов алгебры $L(B)$; R^m — m-мерное евклидово пространство и $R^m_+ = \{t : t \in R^m, t_1 \geqslant 0, \ldots, t_m \geqslant 0\}$.

Рассмотрим вполне интегрируемую [5] систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t_j} = f_j(t, x(t)), \quad (j = 1, \ldots, m), \tag{1}$$

где $x(t) \in B$, $t \in R^m_+$, $f_j(t, x)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — функции, определенные для $(t, x) \in R^m_+ \times B$ со значениями в B, непрерывно дифференцируемые в $R^m_+ \times B$ [5].

Предположим, что $f_j(t, 0) = 0$ $(j = 1, \ldots, m;\ t \in R^m_+)$. Тогда функция $x(t) \equiv 0$ является решением системы (1). Это решение будем называть нулевым или тривиальным.

Определение. Нулевое решение системы (1) устойчиво (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\|x(t)\| < \varepsilon$ как только $\|x^0\| < \delta$; $x^0 = x(t^0)$; это решение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и существует такое $\Delta > 0$, что $x(t) \to 0$ при $t_1 + \ldots + t_m \to 0$, если $\|x^0\| < \Delta$.

При изучении вопросов устойчивости системы (1) полезна одна лемма, для формулировки которой сделаем некоторые замечания. Пусть Γ — некоторая спрямляемая кривая в R^m, начинающаяся в точке t^0 и оканчивающаяся в точке t^1 (которая может быть бесконечно удаленной) и такая, что при движении вдоль Γ от t^0 к t^1 координаты $t_1, \ldots, t_m$ движущейся точки не убывают. Через $\Gamma(t^0, t)$ будем обозначать часть кривой Γ, начинающуюся в точке t^0 и оканчивающуюся в точке $t \in \Gamma$. Пусть в точках Γ определена действительная неотрицательная функция $g(t)$.