3. Вельбицкий И. В.— «Кибернетика», 1973, № 3, 47.
4. Глушков В. М. и др. Алгебра. Языки. Программирование. Киев, 1975.
5. Алгоритмический язык АЛГОЛ-68.— «Кибернетика», 1969, ч. 1, № 6, 17; 1970, ч. 2, № 1, 13.

Поступила в редакцию 28/II 1976 г. *Кафедра МО ЭВМ*

УДК 518:517.91/.94

В. Н. ШАЛИМА

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ОДНОШАГОВЫМИ МЕТОДАМИ

Пусть для задачи Коши

$$y^{(m)}=f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(m-1)}); \tag{1}$$

$$y^{(i)}(x_0)=y_0^{(i)},\ i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1, \tag{2}$$

необходимо найти в точке $X>x_0$ с абсолютными ошибками, не превосходящими величины $\varepsilon>0$, значения решения и его производных до порядка $m-1$ включительно. Будем считать функцию $f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(m-1)})$ достаточно гладкой в следующей области G_ε изменения ее аргументов: $x\in[x_0,\ X]$, границы изменения $y^{(i)}=y^{(i)}(x,\ \xi,\ \eta^{(0)},\ \ldots,\ \eta^{(m-1)})$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$, описываются изменением начальных данных ξ, $\eta^{(0)},\ \ldots,\ \eta^{(m-1)}$, где $\xi\in[x_0,\ X]$, а $\eta^{(i)}$ такие, что выполняются неравенства

$$|y^{(i)}(X,\ x_0,\ y_0,\ \ldots,\ y_0^{(m-1)})-y^{(i)}(X,\ \xi,\eta^{(0)},\ \ldots,\ \eta^{(m-1)})|\leqslant\varepsilon,$$
$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1.$$

Здесь и далее через $y^{(i)}(x,\ \alpha,\ \beta^{(0)},\ \ldots,\ \beta^{(m-1)}$ обозначена i-ая производная по x решения $y(x)$ уравнения (1) при начальных условиях $y^{(i)}(\alpha)=\beta^{(i)}$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$.

Предположим, что для решения поставленной задачи избран одношаговый метод, позволяющий по информации типа (2) в точке x_n находить в очередной точке $x_{n+1}=x_n+h$ значения приближенного решения и его первых $m-1$ производных с локальной погрешностью порядка h^{k+1}. Рассмотрим вопрос о его сходимости.

Обозначим через $y^{(i)}(x,\ x_n,\ y_n^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(m-1)})=y_n^{(i)}(x)$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$, точное значение в точке x i-ой производной по x решения уравнения (1) в случае начальных данных x_n, $y_n^{(0)},\ \ldots,\ y_n^{(m-1)}$, где $y_n^{(i)}$ — приближенное значение i-ой производной искомого решения в точке x_n. При этом $y_n^{(0)}(x)=y_n(x)$, $y_n^{(0)}=y_n$, $n=0,\ 1,\ \ldots,\ N$. Введем, кроме того, обозначение

$$\overline{E}_n=[y_0(x_n)-y_n,\ y_0'(x_n)-y_n',\ \ldots,\ y_0^{(m-1)}-y_n^{(m-1)}]^T,\ n=0,\ 1,\ \ldots,\ N,$$

где T — знак транспонирования.

Предположим, что для всех $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$ выполняются неравенства

$$\|\overline{E}_i\|_1 e^{(X-x_i)F}\leqslant\frac{i\varepsilon}{N}, \tag{3}$$

где $F>0$ — некоторая постоянная, и покажем, что, если шаг h выбран достаточно малым, удовлетворяющим, например, неравенству

$$h^k\leqslant\frac{\varepsilon}{(X-x_0)C}, \tag{4}$$

где $C>0$ — постоянная величина, то неравенства (3) выполняются также для значений $i=n+1,\ \ldots,\ N$, и приближенное решение не выйдет за пределы области G_ε. Для этого рассмотрим вектор $\overline{E}_{n+1}$, который можно представить в форме

$$\overline{E}_{n+1}=\begin{bmatrix} y_0(x_{n+1})-y_n(x_{n+1})+y_n(x_{n+1})-y_{n+1} \\ y_0'(x_{n+1})-y_n'(x_{n+1})+y_n'(x_{n+1})-y_{n+1}' \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(m-1)}(x_{n+1})-y_n^{(m-1)}(x_{n+1})+y_n^{(m-1)}(x_{n+1})-y_{n+1}^{(m-1)} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

или

$$\overline{E}_{n+1}=\overline{z}_{n+1}+\overline{R}_{n+1}, \tag{6}$$

где $\overline{z}_{n+1}=[y_0(x_{n+1})-y_n(x_{n+1}), \dots, y_0^{(m-1)}(x_{n+1})-y_n^{(m-1)}(x_{n+1})]^T$,

$$\overline{R}_{n+1}=[r_{n+1}^{(0)}, r_{n+1}^{(1)}, \dots, r_{n+1}^{(m-1)}]^T,$$

$$r_{n+1}^{(i)}=y_n^{(i)}(x_{n+1})-y_{n+1}^{(i)}, \quad i=0, 1, \dots, m-1,$$

причем, согласно предположению, $r_{n+1}^{(i)}=O(h^{k+1})$ для всех $i=0, 1, \dots, m-1$. На основании (6) получаем

$$\|\overline{E}_{n+1}\|_\text{I}\leqslant\|\overline{z}_{n+1}\|_\text{I}+\|\overline{R}_{n+1}\|_\text{I}, \tag{7}$$

при этом, очевидно, для $\|\overline{R}_{n+1}\|_\text{I}$ справедлива оценка $\|\overline{R}_{n+1}\|_\text{I}\leqslant h^{k+1}R$, где $R>0$ — константа.

Для оценки $\|\overline{z}_{n+1}\|_\text{I}$ рассмотрим вектор

$$\overline{z}(x)=[y_0(x)-y_n(x), y_0'(x)-y_n'(x), \dots, y_0^{(m-1)}(x)-y_n^{(m-1)}(x)]^T.$$

Так как

$$y_0^{(i)}(x)=y^{(i)}[x, x_n, y_0(x_n), \dots, y_0^{(m-1)}(x_n)], \quad i=0, 1, \dots, m-1,$$

то $\overline{z}(x)$ есть решение системы дифференциальных уравнений $\overline{z}'(x)=A(x)\overline{z}(x)$ с начальными условиями

$$\overline{z}(x_n)=[y_0(x_n)-y_n, y_0'(x_n)-y_n', \dots, y_0^{(m-1)}(x_n)-y_n^{(m-1)}]^T,$$

где $A(x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial y'} & \frac{\partial f}{\partial y''} & \dots & \frac{\partial f}{\partial y^{(m-2)}} & \frac{\partial f}{\partial y^{(m-1)}} \end{bmatrix}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}=\frac{\partial}{\partial y^{(i)}}f[x, y_n, y_n', \dots, y_n^{(i)}+\Theta_i(x)[y_0^{(i)}(x_n)-y_n^{(i)}], \dots, y_0^{(m-1)}(x_n)],$$

$$0<\Theta_i(x)<1, \; i=0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда, согласно [1], учитывая введенные обозначения, получаем

$$\overline{z}(x)=\Omega(x_n, x)\overline{E}_n. \tag{8}$$

Здесь $\Omega(x_n, x)$ есть матрицант матрицы $A(x)$, причем

$$\|\Omega(x_n, x)\|_\text{I}\leqslant e^{\int_{x_n}^{x}\|A(t)\|_\text{I}dt}. \tag{9}$$

Пусть

$$F=\max\left\{1, \sum_{i=0}^{m-1}M_i\right\}, \text{ где } M_i=\max_{G_\varepsilon}\left|\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}}\right|, \; i=0, 1, \dots, m-1.$$

Тогда неравенство (9) примет вид

$$\|\Omega(x_n, x)\|_\text{I}\leqslant e^{(x-x_n)F}. \tag{10}$$

Полагая в равенстве (8) $x=x_{n+1}$ и учитывая (10), получаем

$$\|\overline{z}(x_{n+1})\|_\text{I}=\|\overline{z}_{n+1}\|\leqslant\|\overline{E}_n\|_\text{I}e^{(x_{n+1}-x_n)F}.$$

Таким образом, принимая во внимание последнее неравенство, для $\|\overline{E}_{n+1}\|_{\mathrm{I}}$ из (7) имеем

$$\|\overline{E}_{n+1}\|_{\mathrm{I}} \leqslant \|\overline{E}_n\|_{\mathrm{I}} e^{(x_{n+1}-x_n)F} + h^{k+1}R. \tag{11}$$

Умножая неравенство (11) на $e^{(X-x_{n+1})}$ и учитывая (3) при $i=n$, получим

$$\|\overline{E}_{n+1}\|_{\mathrm{I}} e^{(X-x_{n+1})} \leqslant \frac{n\varepsilon}{N} + h^{k+1}Re^{(X-x_0)F}.$$

Отсюда, полагая $C = Re^{(X-x_0)F}$ и учитывая (4), получаем

$$\|\overline{E}_{n+1}\|_{\mathrm{I}} \leqslant \frac{(n+1)\varepsilon}{N}.$$

Аналогичные неравенства нетрудно получить для $i=n+2, \ldots, N$. Оценим при сделанных предположениях скорость сходимости вычислительного метода. На основании неравенства (11), при $\|\overline{E}_0\|_{\mathrm{I}}=0$, справедлива оценка

$$\|\overline{E}_n\|_{\mathrm{I}} \leqslant h^{k+1}R(1+e^{hF}+e^{2hF}+\ldots+e^{(n-1)hF}) = h^{k+1}R\frac{e^{nhF}}{e^{hF}-1},$$

где $h=x_{n+1}-x_n$.

Принимая во внимание очевидные неравенства $e^u-1 \geqslant u$, $e^u-1 \leqslant ue^u$, получаем $\|\overline{E}_n\|_{\mathrm{I}} \leqslant h^k C(X-x_0)$. Отсюда следует равномерная сходимость метода со скоростью порядка h^k, причем, если выполнено неравенство (4), то $\|\overline{E}_n\|_{\mathrm{I}} \leqslant \varepsilon$.

Приведем примеры вычислительных правил решения задачи (1), (2), построенных способом, основанным на принципе последовательного повышения порядка точности результата [2], для конкретных значений m. В целях сокращения записей используем обозначения $f_{n+\gamma}^{[\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{m-1}]} = f(x_n+\gamma h, y_{n+\gamma}^{[\mu_0]}, \ldots, y_{n+\gamma}^{[\mu_{m-1}](m-1)})$, где $y_{n+\gamma}^{[\mu_i](i)}$ есть приближенные значения величин $y^{(i)}(x_n+\gamma h)$, найденных с локальными ошибками порядка h^{μ_i}, $i=0, 1, \ldots, m-1$.

Метод четвертого порядка точности для $m=2$:

$$\overset{[2]}{y}{}'_{n+1/6} = \overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h}{6} f_n^{[5, \mu_1]},$$

$$\overset{[3]}{y}_{n+1/6} = \overset{[5]}{y}_n + \frac{h}{6}\overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h^2}{72} f_n^{[5, \mu_1]},$$

$$\overset{[3]}{y}{}'_{n+1/3} = \overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h}{3} f_{n+1/6}^{[3, 2]},$$

$$\overset{[4]}{y}_{n+1/3} = \overset{[5]}{y}_n + \frac{h}{3}\overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h^2}{54}[f_n^{[5, \mu_1]} + 2f_{n+1/6}^{[3, 2]}],$$

$$\overset{[4]}{y}{}'_{n+1/2} = \overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h}{8}[f_n^{[5, \mu_1]} + 3f_{n+1/3}^{[4, 3]}],$$

$$\overset{[4]}{y}_{n+1/2} = \overset{[5]}{y}_n + \frac{h}{2}\overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h^2}{16}[f_n^{[5, \mu_1]} + f_{n+1/3}^{[4, 3]}],$$

$$\overset{[4]}{y}{}'_{n+1} = \overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h}{2}[f_n^{[5, \mu_1]} - 3f_{n+1/3}^{[4, 3]} + 4f_{n+1/2}^{[4, 4]}],$$

$$\overset{[5]}{y}_{n+1} = \overset{[5]}{y}_n + h\overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h^2}{6}[f_n^{[5, \mu_1]} + 2f_{n+1/2}^{[4, 4]}],$$

$$\overset{[5]}{y}{}'_{n+1} = \overset{[5]}{y}{}'_{n+1} + \frac{h}{6}[f_n^{[5, \mu_1]} + 4f_{n+1/2}^{[4, 4]} + f_{n+1}^{[5, 4]}].$$

Здесь μ_1 может принимать значения 4 или 5. При $\mu_1=4$ приведенное правило требует четырехкратного вычисления значений правой части уравнения на одном шаге вычислений, при $\mu_1=5$ — пятикратного. Если к нему присоединить формулу

$$\overset{[4]}{y}_{n+1} = \overset{[5]}{y}_n + h\overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h^2}{2} f^{[4,\,3]}_{n+1/3},$$

то путем сравнения величин $\overset{[5]}{y}_{n+1}$ и $\overset{[4]}{y}_{n+1}$ можно судить о локальной точности приближенного решения и, тем самым, выбирать шаг h с учетом требуемой точности результата. К приведенным расчетным формулам можно также добавить формулу

$$\overset{[5]}{Y}_{n+1} = \overset{[5]}{y}_n + h\overset{[5]}{y}{}'_n + \frac{h^2}{24}\left[2f_n^{[5,\,\mu_1]} + 9f^{[4,\,3]}_{n+1/3} + f^{[5,\,4]}_{n+1}\right],$$

на основании которой можно получить дополнительную информацию о локальной погрешности полученного приближенного решения. Без дополнительной затраты труда на вычисление значений правой части исходного уравнения могут быть получены значения приближенного решения в промежуточных точках отрезка $[x_n, x_{n+1}]$ с локальной ошибкой порядка h^5 по формуле

$$y_{n+\gamma} = y_n + h\gamma y'_n + \frac{h^2\gamma^2}{6}\left\{[3-\gamma(3-\gamma)]\, f_n^{[5,\,\mu_1]} + \right.$$
$$\left. + 2\gamma(2-\gamma)\, f^{[4,\,4]}_{n+1/2} + \gamma(\gamma-1)\, f^{[5,\,4]}_{n+1}\right\},$$

где $0 < \gamma < 1$.

Среди методов, построенных для задачи (1), (2) в случае $m = 3$, рассмотрим следующий метод второго порядка точности:

$$\overset{[2]}{y}{}''_{n+1} = \overset{[3]}{y}{}''_n + hf_n^{[\mu_0,\,\mu_1,\,\mu_2]},$$

$$\overset{[3]}{y}{}'_{n+1} = \overset{[4]}{y}{}'_n + h\overset{[3]}{y}{}''_n + \frac{h^2}{2} f_n^{[\mu_0,\,\mu_1,\,\mu_2]},$$

$$\overset{[4]}{y}_{n+1} = \overset{[5]}{y}_n + h\overset{[4]}{y}{}'_n + \frac{h^2}{2}\overset{[3]}{y}{}''_n + \frac{h^3}{6} f_n^{[\mu_0,\,\mu_1,\,\mu_2]},$$

$$\overset{[3]}{y}{}''_{n+1} = \overset{[3]}{y}{}''_n + \frac{h}{2}\left[f_n^{[\mu_0,\,\mu_1,\,\mu_2]} + f^{[4,\,3,\,2]}_{n+1}\right],$$

$$\overset{[4]}{y}{}'_{n+1} = \overset{[4]}{y}{}'_n + h\overset{[3]}{y}{}''_n + \frac{h^2}{6}\left[2f_n^{[\mu_0,\,\mu_1,\,\mu_2]} + f^{[4,\,3,\,2]}_{n+1}\right],$$

$$\overset{[5]}{y}_{n+1} = \overset{[5]}{y}_n + h\overset{[4]}{y}{}'_n + \frac{h^2}{2}\overset{[3]}{y}{}''_n + \frac{h^3}{24}\left[3f_n^{[\mu_0,\,\mu_1,\,\mu_2]} + f^{[4,\,3,\,2]}_{n+1}\right],$$

где μ_0 может принимать значения 4 или 5, $\mu_1 = 3$; 4, $\mu_2 = 2$; 3. При значениях μ_i, $i = 0, 1, 2$, равных 4; 3; 2 соответственно, метод требует однократного вычисления значений правой части уравнения на одном шаге. Вычисление значений y_{n+1} и y'_{n+1} с локальными ошибками порядка h^5 и h^4 соответственно позволяет ожидать получения более точных результатов по сравнению с другими методами второго порядка, например, типа схемы Эйлера с пересчетом [3], которая может быть применена для решения задачи Коши в случае системы обыкновенных, дифференциальных уравнений, эквивалентной исходному дифференциальному уравнению.

Методы, аналогичные рассмотренным, могут быть предложены и для уравнений более высоких порядков.

В заключение приведем некоторые результаты численных экспериментов, выполненных на ЭВМ «Минск-32».

Пример 1. $y'' = -\dfrac{1+y'^2}{y}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Точное решение $y(x) = \sqrt{5-(x-2)^2}$. Задача решалась на отрезке [0; 4] стандартным методом Рунге — Кутта, примененным к эквивалентной системе дифференциальных уравнений первого порядка, методом Рунге —

Кутта — Нистрема [4] и предложенным методом четвертого порядка точности при $\mu_1 = 4$. В табл. 1 указаны относительные ошибки полученных результатов.

Пример 2. $y''' = \frac{4y + 4y' + y''}{9}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$.

Точное решение $y(x) = e^x$. Задача решалась на промежутке [0; 10] методом Эйлера с пересчетом, примененным к эквивалентной системе, а также предложенным методом второго порядка точности при $\mu_0 = 4$; $\mu_1 = 3$; $\mu_2 = 2$. В табл. 2 приведены относительные ошибки соответствующих значений приближенных решений.

Таблица 1

h	x	Метод Р—К для системы	Метод Р—К—Н	Предлагаемый метод
0,5	2,0	0,09	0,05	0,02
	4,0	2,3	0,9	0,08
0,25	2,0	0,006	0,005	0,0006
	4,0	0,06	0,05	0,003
0,125	2,0	0,0004	0,0003	0,0001
	4,0	0,003	0,003	0,0002

Таблица 2

h	x	Метод Эйлера с пересчетом	Предлагаемый метод
0,5	0,5	0,015	0,00021
	5,0	0,16	0,0049
	10,0	0,34	0,0089
0,125	0,5	0,0012	0,000009
	5,0	0,012	0,00058
	10,0	0,024	0,00013

Таким образом, предлагаемый алгоритм позволяет получать более точные результаты не только локально, но и на достаточно больших промежутках изменения аргумента.

В заключение, пользуясь случаем, приношу благодарность своему научному руководителю В. В. Бобкову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов А. Д. — В сб.: Вычислительные методы и программирование, V. МГУ, 1966, 28.
2. Бобков В. В. — «Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук», № 2, 1973, 52.
3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М., 1973.
4. Березин И. С. и Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., 1959.

Поступила в редакцию 2/IV 1976 г.

Кафедра вычислительной математики