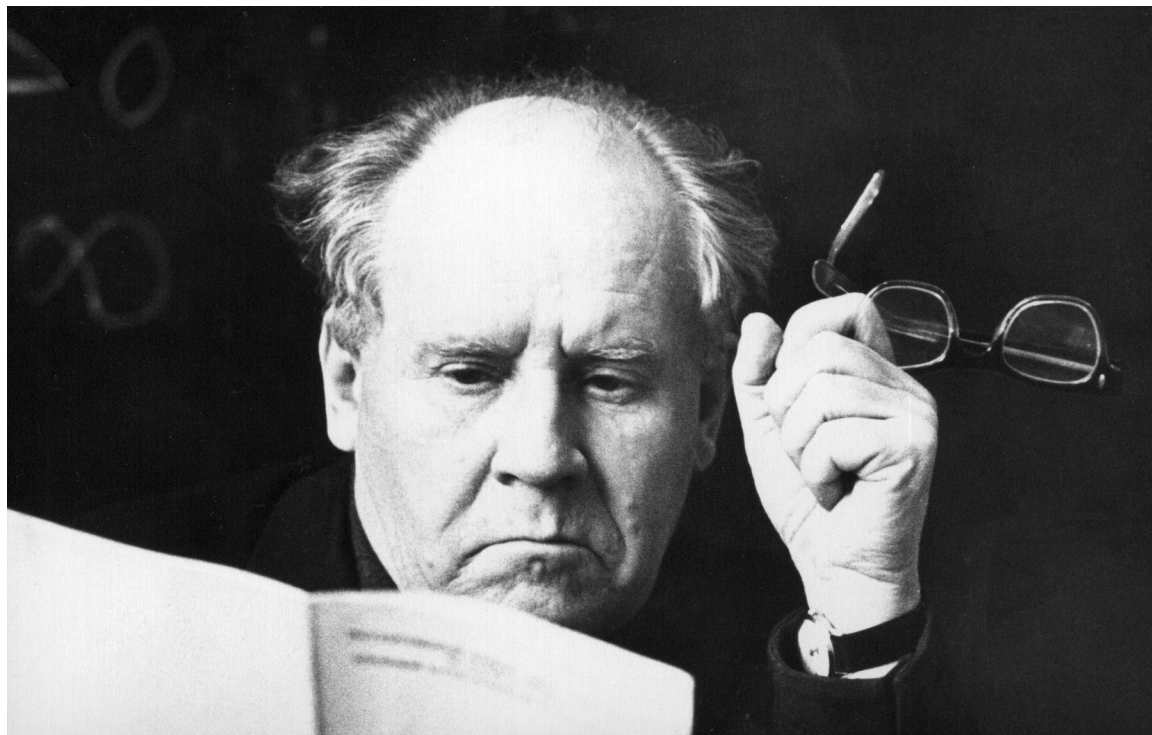


ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**XXI Международная научная конференция  
по дифференциальным уравнениям  
(Еругинские чтения - 2023)**

Материалы конференции  
(Могилев, 23 – 27 мая 2023 года)

**В двух частях**

**Часть 2**

**Уравнения с частными производными  
Интегро-дифференциальные и стохастические  
дифференциальные уравнения  
Дифференциальные уравнения и их приложения  
Методика преподавания математических дисциплин  
в высшей школе**

Могилев  
«Белорусско-Российский университет»  
2023

УДК 517.9:001(045)

ББК 22.161.6:73

Д22

Редакционная коллегия: *В. В. Амелькин, А. Б. Антонец, А. И. Астровский, М. М. Васильковский, А. Л. Гладков, В. И. Громак, А. К. Деменчук, С. А. Мазаник, Е. К. Макаров, И. И. Маковецкий*

*Конференция проводится при финансовой поддержке  
Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований*

**XXI Международная** научная конференция по дифференциальным уравнениям  
Д22 (Еругинские чтения – 2023): материалы конф.: в 2 ч. / Ин-т мат. нац. акад. наук Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Белорус.-Рос. ун-т; редкол.: В. В. Амелькин [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2023. — Ч. 2. – 169 с.

ISBN 978-985-492-296-6 (ч. 2).

Сборник содержит доклады, представленные на XXI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения–2023) по вопросам уравнений с частными производными, интегро-дифференциальных и стохастических дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений и их приложений, методики преподавания математических дисциплин в высшей школе.

УДК 517.9:001(045)

ББК 22.161.6:73

ISBN 978-985-492-296-6 (ч. 2)

ISBN 978-985-492-294-2

© Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования «Белорусско-Российский университет», 2023

$$\begin{aligned}
& + \sum_{c,s=1}^r \theta_{ic} \min(N_{ic}(t), \bar{d}_i(t)) \sum_{\substack{j=0 \\ (j \neq i)}}^n \bar{H}_{icjs} q_{icjs} \Big) - \\
& - \gamma_i h_i(m_i - \bar{d}_i(t)) + \lambda \sum_{c=1}^r a_{0cic} p_{0cic} + c_i, \quad i = \overline{1, n},
\end{aligned}$$

где  $N_{ic}(t)$  — среднее количество заявок типа  $c$  (в очереди и на обслуживании) в системе  $S_i$  в момент времени  $t$ ;  $\bar{d}_i(t)$  — среднее число исправных линий обслуживания в системе  $S_i$  в момент времени  $t$ ,  $0 \leq \bar{d}_i(t) \leq m_i$ ;  $b_{icjs}$  — математическое ожидание случайного дохода, получаемого системой  $S_i$  в случае, когда заявка, получив обслуживание в этой системе, переходит на обслуживание в систему  $S_j$  как заявка типа  $c$ ;  $\bar{H}_{icjs}$  — математическое ожидание случайного дохода, получаемого системой  $S_i$  в случае, когда заявка, не дождалась обслуживания и переходит на обслуживание в систему  $S_j$  как заявка типа  $s$ ;  $h_i$  — математическое ожидание случайных затрат, связанных с восстановлением неисправной линии обслуживания в системе  $S_i$ ;  $a_{0cic}$  — математическое ожидание случайного дохода, который получает система  $S_i$ , в случае, когда заявка типа  $c$  поступает из внешней среды на обслуживание в эту систему;  $c_i$  — математическое ожидание дохода, получаемого системой  $S_i$  за счет процентов на денежные средства находящихся в ней,  $i, j = \overline{1, n}$ ,  $c = \overline{1, r}$ .

### Литература

1. Матальцкий М. А., Статкевич С. Э. *Стохастические сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием: моногр.* Гродно: ГрГУ, 2014.
2. Матальцкий М. А., Науменко В. В. *Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок: моногр.* Гродно: ГрГУ, 2016.
3. Статкевич С. Э., Матальцкий М. А. *Об одном методе исследования НМ-сетей с ограниченным временем ожидания заявок* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2010. Т. 92. № 1. С. 13–119.
4. Статкевич С. Э. *Об одном методе исследования НМ-сетей с ненадежными системами обслуживания* // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2011. Т. 111. № 2. С. 89–105.

## КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ, ИНТЕРАКТИВНЫЕ СРЕДСТВА АНАЛИЗА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДИНАМИКИ НИЗОВЫХ ЛЕСНЫХ ПОЖАРОВ

В.Б.Таранчук, Д.В.Баровик

На земном шаре существуют целые регионы, в которых лесные пожары происходят с регулярной периодичностью, и при этом не фиксируется успешность в их предотвращении и тушении. Требуются новые технические решения, более эффективные методы организации и управления работами. Наиболее сложным при этом является этап ликвидации чрезвычайных ситуаций, когда для принятия оптимальных управленческих решений принципиально важно иметь достоверные прогнозы распространения фронта горения, в том числе, оценки затрат и последствий при альтернативных вариантах действий. В правильных экспертных решениях обязательны учет конкретной обстановки, состава и состояния растительности, рельефа территории, истории и текущих погодных условий, множества других факторов. Понятно, что анализировать громадный объем

информации в очень сжатые сроки затруднительно без использования информационных технологий, а проигрывать сценарии с оценками разных вариантов действий без моделей развития процессов вовсе невозможно. Выход – использовать созданные, проверенные компьютерные модели.

Разработки математических моделей лесных пожаров начались с середины прошлого века в США и активно продолжаются во всем мире в настоящее время, текущее состояние, основные публикации, обзоры упомянуты в [1]. К сожалению, в обзорах научных публикаций наряду с определенными достижениями отмечаются ряд нерешенных вопросов, основные из которых следующие: недостаточная обоснованность принимаемых в моделях уравнений и входящих в них коэффициентов для описаний кинетики физико-химических превращений и реакций; сложность выбора адекватных моделей турбулентности в газовой фазе; незначительное число аналитических решений подобных задач, которые обязательны при оценках точности получаемых приближенных решений; отсутствие масштабных натурных экспериментов, которые можно принять за эталон для верификации моделей.

Наблюдается пробел между слишком упрощенными моделями, дающими прогнозы с неприемлемой для достоверных оценок погрешностью, и моделями с таким чрезмерным количеством параметров, когда разработка даже относительно быстродействующих численных методов и алгоритмов их реализации становится самостоятельной проблемой [2].

В большинстве приведенных в литературе компьютерных моделей процесс распространения лесных пожаров анализируется только в однородных средах, хотя в реальности однородное распределение лесных горючих материалов (мхов, опада, трав, кустарников, деревьев и т.п.) встречается крайне редко. При этом известно, что многие наблюдаемые эффекты протекания лесных пожаров вызваны именно неоднородностью. Например, ускоренное распространение огня вдоль просек.

Выполненные в данном исследовании вычислительные эксперименты, предложенные и использованные методы обработки и визуализации результатов позволили выявить и в докладе будут предметом обсуждения особенности распространения лесных пожаров при наличии неоднородностей в плотности лесного горючего материала, в частности, когда на площади имитируются поляны различных форм и размеров. Отдельно и специально рассмотрены результаты попыток обнаружить эффекты в распределении цифровых полей температуры, а также «течений» (перепадов) концентраций кислорода, вызванных именно неоднородностями размещения на площади горючей растительности, в том числе с учетом влияния направления и силы ветра.

Ввиду ограниченности объема тезисов, но для общего понимания сложности принятого математического описания (двумерная с осреднением по высоте полога леса математическая модель распространения лесных пожаров) и соответствующей компьютерной модели, ниже приведены уравнения краевой задачи для определения распределений по площади и эволюции (динамики по времени) следующих величин:  $T$  – температура (в Кельвинах) лесного массива как сплошной многофазной реагирующей среды;  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , – объемные доли компонент лесного горючего материала (ЛГМ), где через  $\varphi_1$  обозначено сухое органическое вещество ЛГМ,  $\varphi_2$  – содержащаяся в древесине (растительности) вода в связанной и свободной формах,  $\varphi_3$  – коксик (древесный уголь), являющийся продуктом пиролиза ЛГМ в условиях недостатка кислорода,  $\varphi_4$  – зола, негорючая минеральная часть ЛГМ;  $c_\nu$ ,  $\nu = 1, 2, 3$ , – массовые концентрации компонентов газовой фазы, где  $c_1$  – кислород,  $c_2$  – горючие газы, возникающие в процессе термического разложения,  $c_3$  – смесь остальных негорючих газов, включая водяной пар, как

результат сушки; углекислый газ, выделяющийся при догорании коксика и окислении горючих газов; инертные компоненты воздушной смеси и продуктов реакций пиролиза и горения (полное описание, начальные и краевые условия приведены в [3, 4]):

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \Phi_{\varphi_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \Phi_{\varphi_2}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \Phi_{\varphi_3}, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c_\nu}{\partial t} + (V, \text{grad} c_\nu) - \frac{1}{\rho_5} \text{div}(\rho_5 D_T \text{grad} c_\nu) = \Phi_{c_\nu}, \quad n = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho_5 c_{p5} (V, \text{grad} T) - \text{div}(\lambda_T \text{grad} T)}{\rho_5 c_{p5} + \sum_{j=1}^4 \rho_j \varphi_j c_{pj}} = \Phi_T. \quad (3)$$

Отметим, что записанные уравнения нелинейные, входящие функции зависят от  $T$ ,  $c_\nu$ ,  $\varphi_j$ ; все учитываемые в модели величины подробно описаны в [2-5].

Система дифференциальных уравнений модели решалась численно. Применялись явные разностные схемы с равномерной сеткой по пространству и переменным временным шагом по времени. Текущие значения временного шага уточнялись из условий устойчивости численной схемы [2], с учетом динамики фронта и скоростей протекания физико-химических процессов. Вычислительные эксперименты реализованы в многофункциональном интерактивном программном комплексе, разработанном на языке Wolfram Language в системе компьютерной алгебры Mathematica [3]. Важными моментами организации вычислений являются: используемый дополнительный инструментарий, обеспечивающий интеллектуальный анализ получаемых решений; включенные в комплекс специальные средства протоколирования результатов; инструменты «ручной» коррекции параметров расчетной сетки; набор функций когнитивной графической визуализации; возможности пересчета для любого временного интервала на другой пространственной сетке. Соответствующие методические и технические решения поясняются отдельно. Необходимость адаптации хода вычислений (включая пространственную сетку, временной шаг) обусловлена длительностью расчетов каждого конкретного варианта, а «вмешательство» анализирующего промежуточные результаты специалиста, его выполняемые специально разработанными средствами уточнения числа расчетных узлов позволяют сократить ненужные пересчеты на отдельных участках.

Демонстрируются результаты развития лесного пожара при наличии в лесном массиве полян и водных преград различных форм, размеров и расположения, а также с учетом различной силы и направления ветра [3, 5].

### Литература

1. Баровик Д.В., Таранчук В.Б. *Состояние проблемы и результаты компьютерного прогнозирования распространения лесных пожаров* // Вестник БГУ, серия 1. 2011. 3. С. 78-84.
2. Баровик Д.В., Корзюк В.И., Таранчук В.Б. *К обоснованию математических моделей низовых лесных пожаров* // Труды института математики. 2013. 21(1). С. 3-14.
3. Barovik D.V., Taranchuk V.B. *Tools for the analysis and visualisation of distributions and vector fields in surface forest fires modelling* // Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2022. (2), P. 82-93.
4. Barovik D., Taranchuk V. *Mathematical modelling of running crown forest fires* // Mathematical Modelling and Analysis. 2010. 15 (2). P.161-174.
5. Баровик Д.В., Таранчук В.Б. *Компьютерная модель, примеры анализа влияния ландшафтно-метеорологических факторов на динамику низовых лесных пожаров* // Экономика. Информатика. 2020. 47(3). С. 610-622.