УДК 519.17

СЛАБЫЕ РЁБЕРНЫЕ ПОКРЫТИЯ В ГРАФАХ: СЛОЖНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ И НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА

Ю. Л. Орлович[1], А. Д. Суравежкин[1], Ю. А. Картынник[2]

[1] *Белорусский государственный университет,*
Минск, Беларусь, orlovich@bsu.by
[2] *Корпорация Гугл,*
Цюрих, Швейцария, kartynnik@gmail.com

Рассматривается задача о наименьшем слабом рёберном покрытии графа, которая представляет собой естественное обобщение классической проблемы наименьшего рёберного покрытия. В предположении P ≠ NP установлена NP-трудность задачи построения $(k \ln n)$-приближённого решения для оптимизационной версии рассматриваемой задачи, где $k > 0$ – некоторая фиксированная рациональная константа и n – порядок входного графа. Получена характеризация в терминах запрещённых порождённых подграфов для наследственного класса графов, в которых у каждого порождённого подграфа без изолированных вершин все минимальные (по включению) слабые рёберные покрытия имеют одинаковую мощность.

Ключевые слова: граф; рёберное покрытие; слабое рёберное покрытие; доминирующее множество; NP-трудность; сложность аппроксимации; наследственный класс.

WEAK EDGE COVERS IN GRAPHS: APPROXIMATION COMPLEXITY AND HEREDITARY PROPERTIES

Yu. L. Orlovich[a], A. D. Suraveshkin[a], Y. A. Kartynnik[b]

[a] *Belarusian State University,*
Minsk, Belarus, orlovich@bsu.by
[b] *Google LLC,*
Zurich, Switzerland, kartynnik@gmail.com

The minimum weak edge cover problem, which is a natural generalization of the classical minimum edge cover problem, is considered. The NP-hardness of the problem of constructing $(k \ln n)$-approximate solution for the optimization version of the problem under consideration is established, where $k > 0$ is a fixed rational constant and n is the order of the input graph. A characterization in terms of forbidden induced subgraphs is obtained for the hereditary class of graphs in which for every induced subgraph without isolated vertices all minimal (by inclusion) weak edge covers have the same cardinality.

Keywords: graph; edge cover; weak edge cover; dominating set; NP-hardness; approximation complexity; hereditary class.

1. Введение

Данная работа продолжает начатое в [1, 2] исследование ослабленного варианта классического понятия рёберного покрытия. Стандартные понятия теории графов, не определяемые далее, можно найти в [3].

Напомним, что подмножество рёбер графа называется *рёберным покрытием* [4], если каждая вершина графа инцидентна по крайней мере одному ребру из этого подмножества. Число рёбер в наименьшем (по мощности) рёберном покрытии графа G называется *числом рёберного покрытия* этого графа и обозначается через $\rho(G)$.

Подмножество рёбер графа называется *слабым рёберным покрытием*, если каждая вершина графа инцидентна некоторому ребру из данного подмножества или лежит в треугольнике, содержащем такое ребро. Слабое рёберное покрытие графа называется *минимальным*, если оно не содержит никакого другого слабого рёберного покрытия этого графа. Наименьшая из мощностей (минимальных) слабых рёберных покрытий графа G называется *числом слабого рёберного покрытия* этого графа и обозначается через $\rho'(G)$.

Заметим, что рёберные и слабые рёберные покрытия существуют лишь в графах без изолированных вершин. Понятно также, что в графе, не содержащем треугольников, понятия рёберного и слабого рёберного покрытий совпадают и, следовательно, для любого такого графа G выполнено равенство $\rho'(G) = \rho(G)$. В общем случае каждое рёберное покрытие является слабым рёберным покрытием и, значит, для графа G, не содержащего изолированных вершин, верно $\rho'(G) \le \rho(G)$.

Рассмотрим следующую оптимизационную задачу минимизации.

НАИМЕНЬШЕЕ СЛАБОЕ РЁБЕРНОЕ ПОКРЫТИЕ

Условие. Дан граф G.

Задача. Найти такое (минимальное) слабое рёберное покрытие E' графа G, что $|E'| = \rho'(G)$.

Известно [2], что эта задача является NP-трудной даже для некоторых специальных классов графов (кубические и расщепляемые графы).

Сформулированная задача обнаруживает глубокую связь с классической задачей о покрытии конечного множества наименьшим набором из предоставленных его непустых подмножеств [5]. Эта связь становится явной, если для данного графа G рассмотреть соответствующий ему гиперграф $H(G) = (V(G), \{PN[e] \mid e \in E(G)\})$, где $PN[e] = N[u] \cap N[v]$ – собственное окружение ребра $e = \{u, v\}$ и $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ – замкнутое окружение вершины x. Тогда множество $E' \subseteq E(G)$ является слабым рёберным покрытием графа G, если и только если соответствующее множество $\{PN[e] \mid e \in E'\}$ гиперрёбер гиперграфа $H(G)$ покрывает множество его вершин. Кроме этого, наименьшие слабые рёберные покрытия графа G находятся во взаимно однозначном соответствии с наименьшими покрытиями множества вершин гиперграфа $H(G)$ некоторыми из его гиперрёбер. В частности, $\rho'(G) = \rho(H(G))$, где $\rho(H(G))$ – число рёберного покрытия гиперграфа $H(G)$.

Напомним, что задача $f(n)$*-приближённого решения* (или $f(n)$*-аппроксимации*) некоторой оптимизационной задачи минимизации P заключается в нахождении по произвольному примеру x размера n задачи P такого её допустимого решения y со значением параметра оптимизации $m(x, y)$, что $m(x, y)/\mathrm{opt}(x) \le f(n)$, где $\mathrm{opt}(x)$ – значение оптимального решения для x.

2. Сложность аппроксимации

Нетрудно показать, что задача построения $O(\ln |G|)$-приближённого решения задачи Наименьшее слабое рёберное покрытие в любом графе G может быть решена за полиномиальное время относительно порядка $|G|$ этого графа с помощью простого «жадного» алгоритма (каждый раз выбирающего ребро, покрывающее наибольшее число ещё непокрытых вершин). С другой стороны, как следует из теоремы 2 – основного результата данного раздела, – в некотором смысле качество приближения, достигаемое этим алгоритмом, не может быть существенно улучшено.

Далее нам понадобится следующий хорошо известный результат (см., например, [6, 7, 8]).

Теорема 1. В предположении $\mathrm{P} \ne \mathrm{NP}$ для оптимизационной задачи Наименьшее доминирующее множество соответствующая задача построения $(c \ln |G|)$-приближённого решения является NP-трудной, где $c > 0$ – некоторая фиксированная рациональная константа.

Пусть G – граф. *Композицией* $G[K_2]$ называется граф, множеством вершин которого является декартово произведение $V(G) \times \{a, b\}$, а смежность вершин (u_1, u_2) и (v_1, v_2) определяется следующим образом: либо $u_1 = v_1$, либо $u_1 v_1 \in E(G)$. Рёбра вида $\{(u, a), (u, b)\}$ композиции $G[K_2]$ будем называть *главными* рёбрами.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть G – произвольный граф и $H = G[K_2]$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) любое слабое рёберное покрытие E' графа H можно преобразовать за полиномиальное от порядка $|H|$ графа H время в такое слабое рёберное покрытие E'' этого графа, что $|E''| \le |E'|$ и E'' состоит только из главных рёбер графа H.

2) доминирующие множества графа G находятся во взаимно однозначном соответствии со слабыми рёберными покрытиями графа H, которые состоят только из главных рёбер, при этом, если E'' – такое слабое рёберное покрытие графа H, то соответствующее доминирующее множество D графа G определяется так:

$$D = \{u \in V(G) \mid \{(u, a), (u, b)\} \in E''\}.$$

3) $\gamma(G) = \rho'(H)$, где $\gamma(G)$ – число доминирования графа G.

Теперь перейдём к обоснованию теоремы 2.

Теорема 2. В предположении $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ для оптимизационной задачи НАИМЕНЬШЕЕ СЛАБОЕ РЁБЕРНОЕ ПОКРЫТИЕ соответствующая задача построения $(k \ln n)$-приближённого решения является NP-трудной, где $k > 0$ – некоторая фиксированная рациональная константа и n – порядок входного графа.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на результат теоремы 1 и лемму 1. Действительно, зафиксируем константу $k = c / 2$, где $c > 0$ – фиксированная рациональная константа из условия теоремы 1. Предположим, что для задачи НАИМЕНЬШЕЕ СЛАБОЕ РЁБЕРНОЕ ПОКРЫТИЕ соответствующая задача построения $(k \ln n)$-приближённого решения является полиномиально разрешимой, где n – порядок входного графа.

Рассмотрим произвольный граф G и построим граф $H = G[K_2]$. С помощью соответствующего приближённого полиномиального алгоритма найдём слабое рёберное покрытие $E' \subseteq E(H)$, мощность которого отличается от мощности оптимального (т. е. наименьшего) слабого рёберного покрытия не более чем в $k \ln |H|$ раз. В силу утверждения 1 леммы 1 слабое рёберное покрытие E' можно преобразовать за полиномиальное от порядка $|H|$ графа H время в слабое рёберное покрытие $E'' \subseteq E(H)$, мощность которого не превосходит $|E'|$, состоящее только из главных рёбер.

Зная теперь $E'' \subseteq E(H)$ и используя утверждения 2 и 3 леммы 1, построим доминирующее множество $D \subseteq V(G)$ графа G, мощность которого равна $|E''|$ и отличается от мощности оптимального (т. е. наименьшего) доминирующего множества графа G не более чем в $k \ln(2|G|)$ раз. Поскольку при $|G| \ge 2$ и $k = c / 2$ выполнено

$$k\ln(2|G|) \le k\ln(|G|^2) = 2k\ln(|G|) = c\ln(|G|),$$

получаем, что для задачи НАИМЕНЬШЕЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО соответствующая задача построения $(c\ln|G|)$-приближённого решения является полиномиально разрешимой. Но это противоречит теореме 1, что и завершает схему доказательства теоремы 2.

Напомним, что граф G называется *расщепляемым* [9], если множество его вершин можно разбить на клику и независимое множество. Граф G называется $(1, 2)$-*полярным* (см., например, [10, 11]), если существует такое разбиение $A \cup B = V(G)$ множества его вершин, что порождённый подграф $G(A)$ является полным, а $G(B)$ – дизъюнктным объединением полных графов, порядок каждого из которых не превышает 2.

Известно [12], что утверждение теоремы 1 остаётся верным в следующем усиленном варианте: в предположении $\mathrm{P} \ne \mathrm{NP}$ в классе расщепляемых графов задача построения $(c\ln|G|)$-приближённого решения задачи НАИМЕНЬШЕЕ ДОМИНИРУЮЩЕЕ МНОЖЕСТВО является NP-трудной, где $c > 0$ – некоторая фиксированная рациональная константа. Поскольку для расщепляемого графа G композиция $G[K_2]$ является $(1, 2)$-полярным графом получаем, что результат теоремы 2 также верен в классе $(1, 2)$-полярных графов.

3. Наследственные свойства

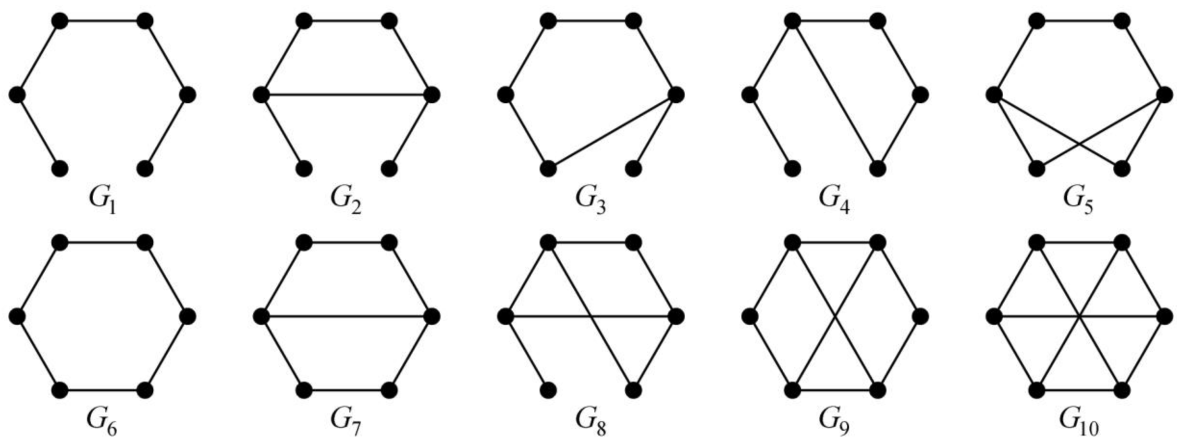
Напомним, что граф G называется F-*свободным* для некоторого набора графов F, если G не содержит порождённых подграфов, изоморфных любому из графов этого набора. Класс графов X называется *наследственным*, если вместе с каждым графом $G \in X$ этому классу принадлежит любой порождённый подграф графа G (другими словами, класс X замкнут относительно операции удаления вершины). Любой наследственный (и только наследственный) класс графов X может быть задан множеством F_X своих запрещённых порождённых подграфов. Это означает, что $G \in X$ тогда и только тогда, когда G является F_X-свободным графом (см., например, [13]). Граф H называется *минимальным запрещённым порождённым подграфом* для класса X, если $H \notin X$ и каждый порождённый подграф графа H, отличный от H, принадлежит классу X.

В работе [2] введён в рассмотрение наследственный класс *хорошо слабо-рёберно-покрытых графов* – графов, в которых у каждого порождённого подграфа без изолированных вершин все минимальные слабые рёберные покрытия имеют одинаковую мощность.

В классе хорошо слабо-рёберно-покрытых графов задача НАИМЕНЬШЕЕ СЛАБОЕ РЁБЕРНОЕ ПОКРЫТИЕ разрешима за полиномиальное время. Решением этой задачи будет являться произвольное минимальное слабое рёберное покрытие, которое может быть найдено простым «жадным» алгоритмом.

В следующей теореме содержится характеризация класса хорошо слабо-рёберно-покрытых графов в терминах минимальных запрещённых порождённых подграфов, из которой следует полиномиальный алгоритм распознавания таких графов.

Теорема 3. Граф G является хорошо слабо-рёберно-покрытым тогда и только тогда, когда G – $\{K_4 - e, \overline{P}_5, G_1, G_2, \ldots, G_{10}\}$-свободный граф (рисунок).



Графы $G_1, G_2, \ldots, G_{10}$

В работе [14] введён и охарактеризован в терминах запрещённых порождённых подграфов наследственный класс доминантно-паросочетательных графов. Граф G называется *доминантно-паросочетательным* (dominant-matching), если для каждого его порождённого подграфа H без изолированных вершин выполнено равенство $\gamma(H) = \alpha_1(H)$, где $\alpha_1(H)$ – число паросочетания графа H. Имеет место следующий результат.

Теорема 4 ([14])**.** Граф G является доминантно-паросочетательным тогда и только тогда, когда G – $\{K_1 + \overline{P}_3, K_4 - e, K_4, G_1, G_2, \ldots, G_{10}\}$-свободный граф.

Как следует из теорем 3 и 4, каждый доминантно-паросочетательный граф является хорошо слабо-рёберно-покрытым и, следовательно, класс хорошо слабо-рёберно-покрытых графов является естественным расширением класса доминантно-паросочетательных графов.

Характеризация класса хорошо слабо-рёберно-покрытых графов, полученная в теореме 3, также обнаруживает тесную связь с характеризацией класса доминантно-покрытых графов. Граф G называется *доми-*

нантно-покрытым (dominant-covering), если для каждого его порождённого подграфа H без изолированных вершин выполнено $\gamma(H)=\beta(H)$, где $\beta(H)$ – число вершинного покрытия графа H. В [14] установлен следующий результат: граф G является доминантно-покрытым тогда и только тогда, когда $G - \{K_3, C_5, G_1, G_2, G_4, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}\}$ -свободный граф.

5. Заключение

В предположении $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ установлена NP-трудность задачи построения $(k \ln n)$-приближённого решения для оптимизационной версии задачи Наименьшее слабое рёберное покрытие, где $k > 0$ – некоторая фиксированная рациональная константа и n – порядок входного графа. Тем самым, в предположении $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$, для рассматриваемой задачи получен отрицательный ответ на вопрос о существовании приближённых полиномиальных алгоритмов с константными оценками точности.

Получена характеризация наследственного класса хорошо слабо-рёберно-покрытых графов в терминах минимальных запрещённых порождённых подграфов, из которой следует полиномиальный алгоритм распознавания таких графов. Отмечена взаимосвязь данного класса графов с другими наследственными классами графов: доминантно-паросочетательные и доминантно-покрытые графы.

Библиографические ссылки

1. *Дыбовская Д. А.* Слабые рёберные покрытия и ассоциированные с ними классы графов // 77-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета : материалы конф. В 3 ч. Ч. 1, Минск, 11–22 мая 2020 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: В. Г. Сафонов (гл. ред.) [и др.]. Минск : БГУ, 2020. С. 58–61.

2. *Орлович Ю. Л., Суравежкин А. Д., Картынник Ю. А.* Структурные и алгоритмические аспекты слабых рёберных покрытий в графах // Информационные системы и технологии = Information Systems and Technologies : материалы междунар. науч. конгресса по информатике. В 3 ч. Ч. 2, Респ. Беларусь, Минск, 27–28 окт. 2022 г. / Белорус. гос. ун-т ; редкол.: С. В. Абламейко (гл. ред.) [и др.]. Минск : БГУ, 2022. С. 251–258.

3. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И.* Лекции по теории графов. М. : УРСС, 2021.

4. *Gallai T.* Uber extreme Punkt- und Kantenmengen // Ann. Univ. Sci. Budap. Rolando Eötvös, Sect. Math. 1959. № 2. P. 133–138.

5. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М. : Мир, 1982.

6. *Feige U.* A threshold of ln *n* for approximating set cover // J. ACM. 1998. Vol. 45, № 4. P. 634–652.

7. *Raz R., Safra S.* A sub-constant error-probability low-degree test, and a sub-constant error-probability PCP characterization of NP // Proceedings of the 29th annual ACM symposium on theory of computing. New York, NY : ACM, Association for Computing Machinery. 1999. P. 475–484.

8. *Du D.-Z., Ko K.-I, Hu X.* Design and analysis of approximation algorithms. Springer Optimization and Its Applications. Vol. 62. New York, NY : Springer, 2012.

9. *McKee T. A. McMorris F. R.* Topics in intersection graph theory. SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Philadelphia, PA : SIAM, 1999. Vol. 2.

10. *Tyshkevich R. I., Chernyak A. A.* Decomposition of graphs // Cybernetics. 1985. Vol. 21. P. 231–242.

11. *Гагарин А. В., Метельский Ю. М.* Характеризация (1, 2)-полярных графов // Известия Национальной академии наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1999. № 3. С. 107–112.

12. *Картынник Ю. А.* Структурные и алгоритмические свойства классов графов, определяемых в терминах окрестностных множеств вершин : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.09. Минск, 2019.

13. *Kitaev S., Lozin V.* Words and graphs. Monographs in Theoretical Computer Science. Cham : Springer, 2015.

14. *Zverovich I. E., Zverovich O. I.* Dominant-matching graphs // Discuss. Math., Graph Theory. 2004. Vol. 24, № 3. P. 485–490.