УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ТРЕХТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

А. И. Калинин[1], Л. И. Лавринович[2]

[1] *Белорусский государственный университет,*
Минск, Беларусь, kalininai@bsu.by
[2] *Белорусский государственный университет,*
Минск, Беларусь, lavrinovich@bsu.by

Рассматривается задача минимизации энергетических затрат для линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей три группы переменных с существенно различными скоростями изменения. Строятся асимптотические приближения к решению этой задачи в виде программы и обратной связи. Основное достоинство предлагаемых вычислительных процедур состоит в том, что при их применении исходная задача распадается на три невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

Ключевые слова: малый параметр; сингулярно возмущенная система; квадратичный функционал; оптимальное управление; обратная связь; асимптотические приближения.

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF MINIMIZING ENERGY COSTS IN CONTROLLING A THREE-TEMPO SINGULARLY PERTURBED LINEAR SYSTEM

A. I. Kalinin[a], L. I. Lavrinovich[b]

[a] *Belarusian State University,*
Minsk, Belarus, kalininai@bsu.by
[b] *Belarusian State University,*
Minsk, Belarus, lavrinovich@bsu.by

The problem of minimizing energy costs for a linear singularly perturbed system containing three groups of variables with significantly different rates of change is considered. Asymptotic approximations to the solution of this problem in the form of a program and feedback are constructed. The main advantage of the proposed computational procedures is that when they are applied, the original problem is divided into three unperturbed optimal control problems of lower dimension.

Keywords: small parameter; singularly perturbed system; quadratic functional; optimal control; feedback; asymptotic approximations.

1. Введение

В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных. Это вызвано эффективностью асимптотических методов решения таких задач, при применении которых исходная задача распадается на задачи оптимального управления меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

В первых работах, посвященных задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями, рассматривались динамические системы, содержащие только две группы переменных с существенно различными скоростями изменения, которые были названы медленными и быстрыми переменных (см. обзоры [1] – [4]). В дальнейшем появились работы по оптимизации систем с несколькими группами быстрых переменных, которые содержали при производных параметры различных порядков малости. Их обзор содержится в [5]. Представленный доклад посвящен построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению задачи об управлении с минимальными энергетическими затратами сингулярно возмущенной системой с двумя группами быстрых переменных.

2. Постановка задачи

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)=\left(u_1(t),\ldots,u_r(t)\right)$, $t\in T=\left[t_*,t^*\right]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1u\,,\ x(t_*) = x_*\,,\\
\mu\dot{y} &= A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2u\,,\ y(t_*) = y_*\,,\\
\mu^2\dot{z} &= A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3u,\ z(t_*) = z_*\,,
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
x(t^*) = 0\,,\ y(t^*) = 0\,,\ z(t^*) = 0\,, \tag{2}
$$

$$
J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}}Pudt \to \min, \tag{3}
$$

где μ – малый положительный параметр, t_*, t^* – заданные моменты времени $(t_* < t^*)$, x – n_1-вектор медленных переменных, y, z – векторы быстрых переменных размерности n_2 и n_3 соответственно. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. В критерии качества P – положительно-определенная симметрическая матрица.

Предположение 1. Матрицы A_{33}, $C = A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}$ устойчивые, т.е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка $(N = 0, 1, 2, \ldots)$, если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O\left(\mu^{N+1}\right)$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x,y,z,t,\mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (x_*, y_*, z_*, t_*), $t_* < t^*$, имеет место $u^{(N)}(x_*, y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t,\mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1) – (3).

3. Базовые задачи

Основная идея применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений (в момент времени t^*) сопряженных переменных – конечномерных элементов, по которым можно легко восстановить решение задачи. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения трех базовых невозмущенных задач оптимального управления с n_1, n_2, n_3 фазовыми переменными соответственно. Первой из них является вырожденная задача

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u,\ x(t_*) = x_*,\ x(t^*) = 0,$$
$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P u dt \to \min,$$

где

$$A_0 = A_{11} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{31} - \left(A_{21} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32}\right)C^{-1}\left(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}\right),$$
$$B_0 = B_1 - A_{13}A_{33}^{-1}B_3 - \left(A_{12} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32}\right)C^{-1}D,$$
$$D = B_2 - A_{23}A_{33}^{-1}B_3.$$

В дальнейшем эту задачу будем называть первой базовой.

Во второй базовой задаче

$$\dot{y} = Cy + Du,\ y(0) = C^{-1}Du^0\left(t^*\right),$$
$$y(-\infty) = 0,\ J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}} Puds \to \min,$$

$u^0(t),\ t \in T,$ – решение первой базовой задачи.

Третья базовая задача имеет вид

$$\dot{z} = A_{33}z + B_3u,\ z(0) = A_{33}{}^{-1}B_3\left(u^0\left(t^*\right) + u^*(0)\right),$$
$$z(-\infty) = 0,\ J_3(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}} Pud\tau \to \min,$$

где $u^*(s),\ s \le 0,$ – решение второй базовой задачи. Обозначим через $u_*(\tau)$, $\tau \le 0,$ оптимальное управление в третьей базовой задаче.

П р е д п о л о ж е н и е 2. Динамические системы в базовых задачах являются вполне управляемыми.

Сделанные предположения гарантируют существование и единственность решений базовых задач, которые являются нормальными экстремалями.

Т е о р е м а. При выполнении предположений 1–2 в задаче (1) – (3) с достаточно малым μ существует единственное оптимальное управление, представимое в виде

$$u^0(t,\mu) = P^{-1}\left(B_1^{\mathrm{T}}\psi_1^0(t,\mu) + B_2^{\mathrm{T}}\psi_2^0(t,\mu) + B_3^{\mathrm{T}}\psi_3^0(t,\mu)\right),\ t \in T.$$

Начальные значения $\lambda(\mu) = \psi_1^0\left(t^*,\mu\right)$, $\nu(\mu) = \psi_2^0\left(t^*,\mu\right)$, $\eta(\mu) = \psi_3^0\left(t^*,\mu\right)$ вектора сопряженных переменных $\left(\psi_1^0(t,\mu),\psi_2^0(t,\mu),\psi_3^0(t,\mu)\right)$, $t \in T,$ который в силу принципа максимума [6] соответствует оптимальному управлению, допускают асимптотические разложения

$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k\,,\ \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\nu_k\,,\ \eta(\mu) \sim \eta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\eta_k,$$

в которых

$$\nu_0=\sigma_0-\left(\left(A_{12}-A_{13}A_{33}^{-1}A_{32}\right)C^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\lambda_0,\ \eta_0=\chi_0-\left(A_{13}A_{33}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\lambda_0+\left(A_{23}A_{33}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\nu_0,$$

а λ_0, σ_0, χ_0 – начальные значения сопряженных переменных соответственно в первой, второй и третьей базовых задачах.

Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка представимо в виде

$$u^{(0)}(t,\mu)=u^0(t)+u^*\left(\left(t-t^*\right)/\mu\right)+u_*\left(\left(t-t^*\right)/\mu^2\right),\ t\in T,$$

и может быть сформировано непосредственно после решения базовых задач. Для построения асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка нужно дополнительно интегрировать невозмущенные системы линейных дифференциальных уравнений и находить решения невырожденных линейных алгебраических систем.

4. Заключение

В докладе предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи. При реализации предлагаемых алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на три невозмущенные задачи меньшей размерности Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. Кроме того, вычислительные процедуры алгоритмов не содержат интегрирований жестких систем.

Представленная в докладе методика решения задачи является естественным развитием подхода, изложенного в [7], [8]. При этом предложенная методика позволяет исследовать задачи, в которых имеется несколько групп быстрых переменных с иерархией скоростей по целым степеням малого параметра. При этом количество задач, на которые распадается исходная задача, равно количеству групп разнотемповых переменных. Такое обобщение вносит в алгоритм непринципиальные изменения, которые легко прослеживаются на примере рассмотренной задачи. В то же время это приводит к громоздким формулам.

Отметим также, что развитие полученных результатов на нестационарные системы с достаточно гладкими коэффициентами не вызывает принципиальных трудностей.

Библиографические ссылки

1. *Дмитриев М. Г., Курина Г. А.* Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.

2. *Калинин А. И.* Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 104–114.

3. Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002 – 2012 / Y. Zhang [et al.] // Int. J. Information and Systems Sciences. 2014. Vol. 9, no. 1, P. 1–36.

4. *Kokotovic P. V., Khalil H. K.* Singular perturbations in systems and control. New York : IEEE Press, 1986.

5. *Курина Г. А., Калашникова М. А.* Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными // Автоматика и телемеханика. 2022. № 11. С. 3–61.

6. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. М. : Наука, 1983.

7. *Калинин А. И., Лавринович Л. И.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 194–206.

8. *Калинин А. И., Лавринович Л. И*. Применение метода малого параметра к сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задаче оптимального управления // Автоматика и телемеханика. 2016. №. 5. С. 3–18.