УДК 330.4(075.8)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ПОКАЗАТЕЛЯМИ СРАВНИТЕЛЬНОЙ СТАТИКИ ТЕОРИИ ФИРМЫ

В. В. Альсевич

Белорусский государственный университет,
Минск, Беларусь, alsevichvv@bsu.by

В работе приводится вывод аналога теоремы Слуцкого, полученной в теории потребления, для задачи теории фирмы.

Ключевые слова: задача фирмы; аналог теоремы Слуцкого.

STUDY OF THE DEPENDENCY BETWEEN INDICATORS OF COMPARATIVE STATICS OF THE THEORY OF THE FIRM

V. V. Alsevich

Belarusian State University,
Minsk, Belarus, alsevichvv@bsu.by

The paper presents a derivation of an analogue of Slutsky's theorem, obtained in the theory of consumption, for the problem of the theory of the firm.

Keywords: firm problem; analogue of Slutsky's theorem.

1. Введение

Из экономической литературы известно, что в теории потребления одним из основных результатов является теорема Е. Е. Слуцкого, выражающая поведение потребителя в зависимости от одновременного изменения цен и бюджета (см., напр., [1–4]). Независимо от Слуцкого аналогичная теорема была доказана другими авторами, в частности, Дж. Хиксом [5], хотя при этом он подходил из других соображений, чем Слуцкий. Следует отметить, что именно в интерпретации Хикса в основном приводится в учебной литературе эта теорема и фамилия Хикса при этом не упоминается [6].

Если сравнить частные случаи задач фирмы с задачей потребления, они в чем-то схожи. Возникает вопрос: а не справедлива ли подобная теорема в теории производства (фирмы)? Следует подчеркнуть, что сравнение необходимо проводить именно с частными случаями задач фирмы (при фиксированном выпуске или фиксированных издержках), поскольку вывод об оптимальном поведении фирмы, полученный из общепринятой постановки задачи производства, дает уравнения (см. ниже), из которых решение можно получить лишь при определенном соотношении цен, при котором прибыль равна нулю, что соответствует условиям равновесия, которое в реальной экономике не осуществимо [7, 8].

Возникают вопросы: а) как зависит цена на выпускаемую продукцию при изменении цен на производственные факторы, чтобы не изменилась, например, прибыль фирмы? б) как при этом зависят между собой показатели сравнительной статики теории фирмы?

В предлагаемой работе предпринята попытка получить некоторые ответы на поставленные вопросы.

В силу ограниченности объема данного сообщения приводится только результат для задачи фирмы с фиксированным выпуском.

2. Решение задачи фирмы при фиксированном выпуске

Как известно, основная задача фирмы в долгосрочном периоде в неоклассической теории заключается в максимизации *прибыли* на всем пространстве факторов:

$$\Pi(x) = p_0 f(x) - p'x \to \max, \quad x \in \mathbf{R}_+^m,$$

где p_0 – цена производимой фирмой продукции; x – m-вектор затрат; $p = (p_1, ..., p_m)$ – вектор цен факторов производства; $f(x)$ – производственная функция (вогнутая), ставящая в соответствие каждому набору x затрат факторов максимальный объем Q выпуска продукции одного типа и удовлетворяющую определенным свойствам, в частности, в некоторой области пространства затрат (называемой экономической) увеличение использования затрат каждого фактора не приводит к уменьшению выпуска продукции, а в части экономической области (называемой особой) увеличение использования затрат каждого фактора ведет к увеличению выпуска; $R = p_0 f(x)$ – доход; $C = p'x$ – издержки производства. Заметим, что в экономической области функция $f(x)$ вогнутая, а в особой – строго вогнутая.

Предполагаем, что все векторы понимаются как вектор-столбцы, $'$(штрих) – знак транспонирования, соотношения $x \geq y$ $(x \leq y, x = y)$ для векторов одинаковой размерности означают покомпонентные соотношения, а все операции с векторами и матрицами подчиняются правилам векторно-матричного исчисления.

В силу сказанного во введении будем рассматривать задачу с фиксированным выпуском. Пусть в задаче фиксирован выпуск в объеме Q. Тогда задача примет вид:

$$p_0 Q - p'x \to \max, \ f(x) = Q, \ x \geq 0. \tag{1}$$

Введем функцию Лагранжа $L(x,\lambda_Q) = p_0 Q - p'x + \lambda_Q(f(x) - Q)$. Будем считать, что функция $f(x)$ строго вогнутая. Тогда задача (1) – задача выпуклого программирования. Пусть $x^0 = x^0(Q) > 0$ – решение задачи (1), λ_Q^0 – соответствующий множитель Лагранжа. Согласно теореме Куна-Таккера [9] будут выполняться равенства

$$\frac{\partial L(x^0,\, \lambda_Q^0,)}{\partial x_i} = -p_i + \lambda_Q^0 \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0,\, i = \overline{1,m}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial L(x^0,\, \lambda_Q^0)}{\partial \lambda_Q} = f(x^0) - Q = 0. \tag{3}$$

Из равенства (2) согласно определению предельного продукта получим

$$\lambda_Q^0 M f_i(x^0) = p_i,\, i = \overline{1,m}. \tag{4}$$

Поскольку $p > 0$ и функция $f(x)$ строго вогнутая, то $\lambda_Q^0 > 0$. Очевидно, что если выпуск Q не фиксирован, то к системе (2), (3) добавится равенство

$$\frac{\partial L(x^0,\, \lambda_Q^0)}{\partial Q} = p_0 - \lambda_Q^0 = 0,$$

откуда $\lambda_Q^0 = p_0$. В этом случае равенство (4) примет известный из литературы вид

$$p_0 M f_i(x^0) = p_i,\, i = \overline{1,m},$$

что, как указывалось выше, некорректно для реальной экономики, в которой фирма будет работать с нулевой прибылью. Если же фиксировать Q, то, решив систему (2), (3) относительно затрат, получим $\lambda_Q^0 = \lambda_Q^0(Q)$, $x^0 = x^0(Q)$.

Определив таким образом вектор затрат $x^0 = x^0(Q)$ как функцию выпуска, получим множество $\{x^0 : x^0 = x^0(Q),\, Q \geq 0\}$, которое называют *долгосрочным путем расширения*.

3. Показатели сравнительной статики теории фирмы

Рассмотрим теперь задачу (1) как семейство задач, зависящих от цен p_0, p. Решением этого семейства будет $x^0 = x^0(p_0, p),\ p_0 \geq 0,\ p \geq 0.$ Очевидно, в этом случае и выпуск зависит от цен:

$$Q(p_0, p) = f(x^0(p_0, p)) \equiv Q. \tag{5}$$

Как известно, чувствительность оптимальных затрат и выпуска к изменениям цен определяется величинами $\partial x^0 / \partial p_0$, $\partial x^0 / \partial p$, $\partial Q / \partial p_0$, $\partial Q / \partial p$, которые называют *показателями сравнительной статики теории фирмы*.

Будем считать, что функция $f(x)$ строго вогнута в особой области. В экономической литературе для семейства задач вида (1) подробно исследовано поведение спроса на затраты и предложения выпуска при отдельном изменении либо цены p_0, либо цен p_i, $i = 1, \ldots, m$.

К сожалению, автору данного сообщения неизвестны исследования поведения спроса и предложения при одновременном изменении цены на какой-либо фактор и на выпускаемую продукцию, чтобы при этом, например, не изменилась прибыль. Другими словами, как ведут себя спрос и предложение при так называемом компенсированном изменении цен. Обозначим эти величины $\left(\partial x^0 / \partial p\right)_{comp}$, $\left(\partial Q^0 / \partial p\right)_{comp}$.

4. Уравнения сравнительной статики для задач с фиксированным выпуском

Используем подход к исследованию по аналогии с подходом Хикса в теории потребления. Рассмотрим следующую ситуацию. Изменяется цена p_i на какой-либо фактор. Как при этом надо изменить цену p_0 на выпускаемую продукцию, чтобы не изменилась прибыль, другими словами, чтобы выполнялось тождество

$$\Pi(p_0, p) = p_0 Q - p' x^0(p_0, p) \equiv const. \tag{6}$$

В этой ситуации $p_0 = p_0(p)$, причем $x^0 = x^0(p_0(p), p)$, а в силу (5) выполняется тождество

$$Q = Q(p_0(p), p) \equiv f(x^0(p_0(p), p). \tag{7}$$

Заметим, что в таком случае, например, $\left(\partial x_i^0 \big/ \partial p_j\right)_{comp}$ – это с математической точки зрения полная производная по p_j от x^0, т.е. в матрично-векторной форме получим

$$\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{comp} = \frac{\partial x^0}{\partial p} + \frac{\partial x^0}{\partial p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)', \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_{comp} = \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{\partial Q}{\partial p_0}\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)'. \tag{9}$$

Найдем величину $\partial p_0/\partial p$. Дифференцируя тождества (6), (7), получим

$$\left(\frac{\partial p_0}{\partial p}\right)' Q - x^{0\prime} - p'\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{comp} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x}\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{comp} = 0. \tag{11}$$

Согласно (2) имеем $\partial f/\partial x = p\big/\lambda_Q^0$. Тогда равенство (11) примет вид

$$\frac{1}{\lambda_Q^0} p'\left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{comp} = 0. \tag{12}$$

В силу (12) из равенства (10) для выражения $\partial p_0/\partial p$ получим

$$\frac{\partial p_0}{\partial p} = \frac{x^0}{Q}. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (8), (9), получим

$$\frac{\partial x^0}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^0}{\partial p}\right)_{comp} - \frac{1}{Q}\frac{\partial x^0}{\partial p_0} x^{0\prime}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)_{comp} - \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial p_0}x^{0\prime}. \qquad (15)$$

Уравнения (14), (15) и представляют ***аналог уравнений Слуцкого в теории производства (фирмы)*** в дифференциальной форме. Конечно, здесь использован подход, аналогичный схеме Хикса, а не Слуцкого, и правильнее было бы назвать эти уравнения *аналогом уравнений Хикса*.

Заметим, что уравнение (14) в дискретной постановке можно представить в следующем виде:

$$\Delta x_{(p)} = (\Delta x_{(p)})_{comp} - \Delta x_{(p_0)}. \qquad (16)$$

Здесь $\Delta x_{(p)}$ – общий эффект от изменения цен на производственные факторы, $-\Delta x_{(p_0)}$ – эффект от изменения цены на выпускаемую продукцию, $(\Delta x_{(p)})_{comp}$ – эффект замены или компенсации.

Таким образом, уравнения (14), (15) (или (16)) в теории производства можно интерпретировать по аналогии с теоремой Слуцкого в теории потребления в виде следующего утверждения.

Теорема. *Общий эффект от изменения цен на производственные факторы равен сумме эффекта от изменения цены на выпускаемую продукцию и эффекта замены (компенсации).*

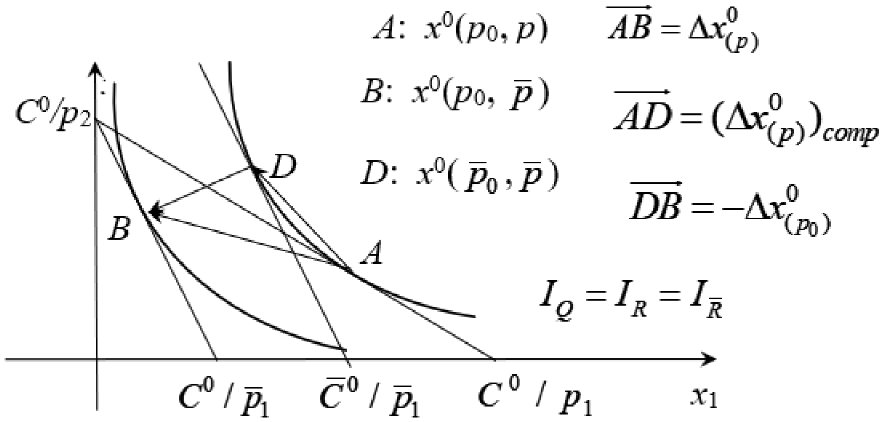
5. Графическая интерпретация основного результата

К сожалению, для семейства задач теории фирмы в общепринятой постановке основной результат в графической интерпретации представить невозможно. Как указывалось выше, в общем случае найти конкретное решение задачи невозможно, а лишь при определенном соотношении цен, при котором прибыль нулевая. Правда, при изучении поведения показателей сравнительной статики постановка семейства общепринятых задач несколько изменяется, т.е. добавляется тождество

$$Q^0 = Q^0(p_0(p), p) \equiv f(x^0(p_0(p), p),$$

которое аналогично тождеству (7), но здесь выпуск Q^0 не фиксирован. Однако в этом случае нельзя получить конкретное решение задачи. Другими словами, решение этих задач заполняет все пространство факторов при изменении цен. Поэтому рассмотрим случай фиксированного выпуска Q.

На рисунке представлена графическая интерпретация уравнения (14) (или (16)) в случае двух факторов при достаточно малых изменениях цен.



Приведем пояснения. Пусть меняется цена на первый фактор: увеличивается от p_1 до $\bar{p}_1$. Поскольку выпуск фиксирован, то получаем изокванту I_Q, любая точка которой соответствует набору факторов, использование которых определяет один и тот же уровень выпуска Q.

Точка A соответствует набору факторов $x^0(p_0, p)$ – решению задачи (1) при заданных ценах p_0, p.

Заметим, что решение задачи (1) не зависит от p_0 [7]. Поэтому, на самом деле, $x^0 = x^0(p, Q)$. Это – точка касания изокванты $I_R = \{x \in \mathbf{R}^2_+ : R = p_0 f(x) = p_0 Q\}$ с изокостой $I_{C^0} = \{x \in \mathbf{R}^2_+ : p_1x_1 + p_2x_2 = C^0\}$, где $C^0 = = p'x^0(p,Q)$.

Как легко заметить, для изокванты I_Q справедливы соотношения: $I_Q = I_R = I_{\bar{R}}$, где I_R соответствует цене p_0, $I_{\bar{R}}$ – цене $\bar{p}_0$.

Точка B соответствует точке касания изокосты $\bar{p}_1x_1 + p_2x_2 = C^0$ и изокванты $I_{\tilde{Q}} = I_{\tilde{R}}$, где $\tilde{R} = p_0\tilde{Q}$, $\tilde{Q}$ – решение задачи с фиксированными издержками при $\bar{p} = (\bar{p}_1, p_2), C = C^0$, которая в данном случае не приводится из-за объема сообщения.

Точка D соответствует решению задачи (1) с тем же выпуском Q и новыми ценами $\bar{p}_0$, $\bar{p}$, причем цена $\bar{p}_0$ такова, что прибыль не меняется. Как указывалось выше, точка D соответствует набору факторов $x^0 = x^0(\bar{p}, Q)$, так что $f(x^0(p, Q)) = f(x^0(\bar{p}, Q)) = Q$. Решив задачу (1) для нового вектора цен $\bar{p}$, найдем издержки $\bar{C}^0 = \bar{p}'x^0(\bar{p}, Q))$. Новая цена $\bar{p}_0$

определяется из условия $\Pi(p_0, p) \equiv const$, т.е. из равенства $p_0 Q - C^0 = = \bar{p}_0 Q - \bar{C}^0$, откуда получим

$$\bar{p}_0 = p_0 + \frac{\bar{C}^0 - C^0}{Q}.$$

К сожалению, из-за ограниченного объема статьи здесь приведены лишь краткие выводы.

Библиографические ссылки

1. *Слуцкий Е.* К теории сбалансированного бюджета потребителя // Экономико-математические методы. Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления. 1963. № 1. С. 241–277. (Пер. с ит.: *Slutsky E.* Sulla teoria del consumatore // Giornale degli Economisti. July, 1915.)

2. *Альсевич В. В.* Введение в математическую экономику. Кн. 1: Конструктивная теория: Учебное пособие. М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2021.

3. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М. : URSS, 2020.

4. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М. : Айрис-пресс, 2002.

5. *Хикс Дж. Р.* Стоимость и капитал. М. : Прогресс, 1993.

6. *Альсевич В. В., Астровский А. И.* К вопросу интерпретации компенсированных показателей сравнительной статики в микроэкономической теории // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем : сб. науч. трудов IX Междунар. школы-симпоз. АМУР-2015, Севастополь, 12–21 сентября 2015 / Симферополь : КФУ им. В. И. Вернадского, 2015. С. 12–17.

7. *Альсевич В. В.* О решении задачи фирмы // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем : сб. науч. трудов X Междунар. школы-симпоз. АМУР-2016, Симферополь-Судак, 12–21 сентября 2016 / Симферополь : КФУ им. В. И. Вернадского, 2016. С. 6–12.

8. *Альсевич В. В.* К вопросу об основном выводе теории фирмы // Тр. Междунар. научно-практич. конф. «Матем. методы и информ. технологии макроэкон. анализа и эконом. политики», посв. празднов. 80-лет. юбилея акад. НАН РК А. А. Ашимова, Алматы, 11–12 апр. 2017 г. / Алматы : Казах. нац. исследоват. техн. ун-т им. К. И. Сатпаева, 2017. С. 66–69.

9. Методы оптимизации / Р. Габасов [и др.]. Мн. : Четыре четверти, 2011.