Используя лемму 2 и выражение для a, условие (7) запишем в виде

$$\max_{\|g\|=1}\left\{g'e(T-h)+\int_0^{T-h} g'S(T-h,\ t)\,u_1(t)\,dt-\sqrt{\varepsilon-c}\times\right.$$
$$\left.\times\left[-\int_0^{T-h} g'S(T-h,\ t)\,W(t)\,g\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant 0. \qquad (18)$$

Теорема 2. Существует минимальное $\varepsilon=\varepsilon^0>0$, удовлетворяющее неравенству (7) (или, все равно, (18)), и оно единственно. Если вектор g_0 доставляет максимум в левой части (18) при $\varepsilon=\varepsilon^0$, то оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет условию

$$g_0'S_{T-h}u^0(\cdot)=\min_{\substack{u(\cdot)\in U(\cdot)\\ I(u)\leqslant\varepsilon}} g_0'S_{T-h}u(\cdot)$$

и определяется равенством

$$u^0(t)=u_1(t)+\frac{1}{2\lambda^0}W(t)\,g_0,$$

где

$$\lambda^0=\frac{\alpha^0}{2\sqrt{\varepsilon^0-c}}=\frac{\left[-\int_0^{T-h} g_0'S(T-h,\ t)\,W(t)\,g_0\,dt\right]^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\varepsilon^0-c}},$$

а $u_1(t)$ и $W(t)$ удовлетворяют уравнениям (13) и (14) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полетаева И. А.— «Автоматика и телемеханика», 1966, № 6.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.

Поступила в редакцию 22/X 1977 г.

Кафедра МОУ

УДК 517.5

А. С. ГАХОВИЧ

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ЛАПЛАСА — ЭЙЛЕРА БЫСТРОРАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ *

Определение 1. Обозначим символом $L^{(N)}$ класс функций, суммируемых на любом конечном интервале $(0,\ T)$, равных нулю при $t<0$ и удовлетворяющих условию

$$f(t)=O\left(e^{\alpha_N t^N}\right) \text{ при } t\to+\infty,$$

где α_N — некоторое неотрицательное действительное число.

Для $f(t)\in L^{(N)}$ рассматриваем функцию двух комплексных переменных

$$F(z,\ s)=\int_0^\infty e^{-zt}f(t)\,e^{-st^N}\,dt,$$

которая в общем случае аналитична по совокупности переменных при любом z из конечной комплексной плоскости и s из полуплоскости $\operatorname{Re}s>\alpha_N$. Пусть $F(z,\ s)$, определяемая из последнего соотношения, допускает аналитическое продолжение по переменной s до односвязной

---

* Продолжение. См. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех.», 1978, № 3, 46.

с жордановой границей области D_s, включающей достаточно большие по модулю s и точку $s=0$. Если же точка $s=0$ принадлежит границе аналитичности, то аналитическое продолжение непрерывно вплоть до границы в ее окрестности. Изображением Лапласа — Эйлера функции $f(t)$ назовем функцию $F(z)=\lim\limits_{s\to 0;\ s\in D_s} F(z,\ s)$.

В работе [1] доказано, что для любой функции $f(t)\in L^{(N)}$ можно построить единственное изображение Лапласа — Эйлера путем выбора определенных областей D_s. Возникает вопрос, сколько вообще можно построить изображений Лапласа — Эйлера для данной функции $f(t)$ за счет выбора различных областей D_s? Если изображение неоднозначно, то необходимо дать конструктивное правило выбора единственного изображения.

Начнем с изучения поставленного вопроса для функций класса $A^{(N)}$ [1], так как именно они служат основой общих построений.

Пусть $f(t)\in A^{(N)}$, т. е. $f(t)$ допускает аналитическое продолжение до функции $f(\xi)$, аналитичной и непрерывной вплоть до границы области D ($\arg\xi=0$, $\arg\xi=\gamma$) (см. рисунок) и удовлетворяющей оценке $f(\xi)=O(e^{c_N|\xi|^N})$ при $\xi\to\infty$ по $\overline{D}$. Кроме того, существует луч, принадлежащий D, на котором $f(\xi)\in L^{(1)}$.

Из результатов, полученных в работе [1], следует, что выбор определенной области D_s задает луч ограниченной степени роста функции $f(\xi)$, по которому берется преобразование Лапласа. Следовательно, наша задача свелась к следующей: сколько может быть лучей ограниченной степени роста, определяющих различные преобразования Лапласа — Эйлера для данной функции $f(t)\in A^{(N)}$? Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1. Лучи ограниченной степени роста функции $f(\xi)$, отстоящие друг от друга на угол, не превосходящий величины $\frac{\pi}{N+\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малое положительное число, определяют одно и то же преобразование Лапласа — Эйлера.

Опираясь на известное свойство преобразования Лапласа [2], доказательство теоремы 1 можно свести к доказательству следующего эквивалентного утверждения: для функции $f(t)\in A^{(N)}$ лучи ограниченной степени роста, отстоящие друг от друга на угол, не превосходящий величины $\frac{\pi}{N+\varepsilon}$, образуют область D, на каждом внутреннем луче которой $f(\xi)$ является функцией ограниченной степени роста.

Для доказательства воспользуемся частным случаем известного из теории функций комплексного переменного так называемого принципа Фрагмена — Линделефа [3, 4], являющегося обобщением принципа максимума для аналитических функций на неограниченной области.

Для простоты доказательства ограничимся случаем φ_1, $\varphi_2\neq\frac{\pi}{2}$. Для общего случая необходимо сделать поворот области на определенный угол. Итак, пусть $f(t)\in A^{(N)}$ и лучи ограниченной степени роста для нее $\arg\xi=\varphi_1$ и $\arg\xi=\varphi_2$ отстоят на угол, меньший $\frac{\pi}{N+\varepsilon}$. Рассмотрим функцию $g(\xi)=e^{-c\xi}f(\xi)$, где c — произвольный неотрицательный действительный параметр, конкретное значение которого выберем из условий, изложенных ниже. Оценим значение функции $g(\xi)$ на луче $\arg\xi=\varphi_1$.

$$|g(\xi)|=e^{-c|\xi|\cos\varphi_1}O(e^{c_1|\xi|})=O(e^{-|\xi|(c\cos\varphi_1-c_1)}).$$

Следовательно, $|g(\xi)|$ при $c>\frac{c_1}{\cos\varphi_1}$ на луче $\arg\xi=\varphi_1$ будет ограничен определенной константой M_1. Аналогично на луче $\arg\xi=\varphi_2$

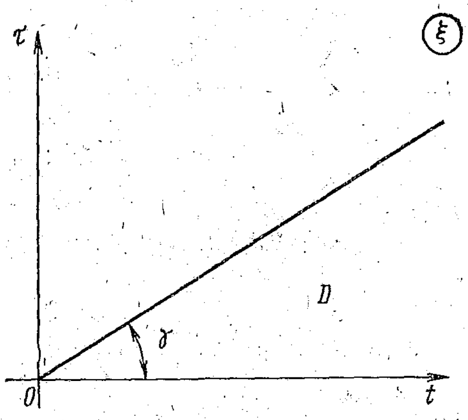
$$|g(\xi)|=O(e^{-|\xi|(c\cos\varphi_2-c_1)}),$$

т. е. при $|g(\xi)|$ $c > \frac{c_1}{\cos\varphi_2}$ будет ограничен константой M_2. Таким образом, при выборе c, удовлетворяющего одновременно обоим неравенствам, функция $g(\xi)$ будет ограничена по модулю некоторой константой M на сторонах угла раствора $\leqslant \frac{\pi}{N+\varepsilon}$. Далее, так как $f(\xi) = O(e^{c_N|\xi|^N})$ равномерно по $\arg\xi$ внутри угла, то, очевидно, и $g(re^{i\varphi}) = O(e^{c_N r^N})$ равномерно по φ. Из последней оценки сразу следует, что

$$\ln|g(re^{i\varphi})| = o(r^{N+\varepsilon})$$

равномерно по φ внутри угла.

Следовательно, функция $g(\xi)$ удовлетворяет требованиям принципа Фрагмена — Линделефа. Значит, она по модулю ограничена константой M внутри и на границе рассматриваемого угла. Возвращаясь к функции $f(\xi)$, имеем $|f(\xi)e^{-c\xi}| \leqslant M$, $|f(\xi)| \leqslant e^{c|\xi|}M = O(e^{c|\xi|})$ при $\xi \to \infty$ по $\overline{D}$, что и требовалось доказать.



Из доказанной теоремы и произвольности ε следует, что для любой функции класса A_N для числа K возможных изображений справедлива оценка $K \leqslant 2N$.

Для функций класса $L^{(N)}$ исследуемый вопрос решается просто, так как, согласно процедуре, предлагаемой в [1], любая функция $f(t)$ данного класса может быть с помощью операции интегрирования представлена в виде разности двух функций, каждая из которых при $\xi \to \infty$ ведет себя аналогично функции $e^{\xi N}$. Поэтому число возможных изображений Лапласа — Эйлера для любой функции из $L^{(N)}$ заведомо конечно.

Рассмотрим возможные применения предлагаемого нами преобразования. Ввиду многозначности в общем случае преобразования Лапласа — Эйлера возникает необходимость предложить какие-то правила выбора единственного изображения. Выбор конкретного изображения Лапласа — Эйлера из конечного набора возможных будет определяться классом оригиналов, подвергаемых преобразованию, конкретизируем последнее.

1. Предположим, что мы имеем дело с классом целых функций экспоненциального роста. Тогда при любом выборе области D_s изображение Лапласа — Эйлера будет определяться однозначно, причем оно эквивалентно изображению Лапласа по любому лучу. Поэтому в данном случае преобразование Лапласа — Эйлера можно интерпретировать как преобразование Бореля для целых функций [4], для которого операционные правила и теоремы обращения хорошо известны. Изображение Лапласа — Эйлера будет представлять собой функцию комплексного переменного $F(z)$, аналитическую, по крайней мере, вне круга радиуса, равного типу целой функции экспоненциального роста.

2. Рассматриваемый класс функций представляет собой функции, принадлежащие пространству оригиналов, преобразуемых по Лапласу. В качестве области D_s выбираем область, где определен исходный элемент функции $F(z, s)$. В этом случае преобразование Лапласа — Эйлера совпадает с обычным преобразованием Лапласа [5]. Следовательно, операционные правила и процедура обращения в данном классе полностью определены. Изображение Лапласа — Эйлера представляет собой функ-

цию комплексного переменного $F(z)$, аналитическую в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$, где α — степень роста функции $f(t)$.

3. Данный класс функций представляет собой $A_{\varphi}^{(N)}$. Тогда в качестве области D_s следует выбрать область, соответствующую лучу интегрирования $\arg \xi = \varphi$. Операционные правила и теоремы обращения будут являть собой видоизменения соответствующих процедур для операционного исчисления, базирующегося на преобразовании Лапласа. Подобный подход к операционному исчислению, правда, с несколько иных позиций, изложен в работе [2]. Изображение Лапласа — Эйлера для данного случая представляет собой функцию комплексного переменного $F(z)$, аналитическую в области $\operatorname{Re} ze^{i\varphi} > \alpha$, где α — степень роста функции $f(\xi)$ на луче $\arg \xi = \varphi$.

4. Изучаемый класс представляет собой функции из $L^{(N)}$. Как уже отмечалось выше, в этом случае любая функция из $L^{(N)}$ представима в виде разности двух функций, каждая из которых является производной от функции класса $A^{(N)}$, причем первая аналитична в верхней полуплоскости, вторая — в нижней. Вполне естественно выбрать в качестве областей D_s для каждой из указанных функций области, соответствующие любым лучам из ближайших к действительной положительной полуоси секторов ограниченной степени роста каждой из них. Этими секторами будут $\frac{\pi}{2N} \leqslant \arg \xi \leqslant \frac{3\pi}{2N}$ и $-\frac{3\pi}{2N} \leqslant \arg \xi \leqslant -\frac{\pi}{2N}$. При таком определении преобразования Лапласа — Эйлера изображение представляет собой функцию комплексного переменного $F(z)$, аналитическую в области $\operatorname{Re} z > 0$, $|\arg z| < \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$. Вывод операционных правил и теорем обращения для данного случая будет составлять содержание последующих работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахович А. С.— «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех.», 1978, № 3, 46.
2. Евграфов М. А. Аналитические функции. М., 1968.
3. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., 1972.
4. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М., 1962.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., 1975.

Поступила в редакцию
14/II 1978 г.

Кафедра ЭММ

УДК 517.925.6

Л. С. ЛАВРИНОВИЧ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$P(z, w, w', w'') = 0, \tag{1}$$

где P — однородный многочлен третьей степени относительно искомой функции и ее производных с аналитическими по z коэффициентами. Уравнения вида (1) встречаются в математической статистике и теории вероятностей. Для уравнений (1) будем решать задачу: указать достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у ее любого решения. По предположению, $w(z)$ не должно иметь подвижных критических особых точек; кроме того, $w(z)$ — функция аналитическая, очевидно, этим свойством будут обладать $w'(z)$ и $w''(z)$, поэтому можно использовать метод, предложенный в работе [1].