УДК 517.966.6

Ю. Х. ПЕШЕВА

ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ ДЛЯ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Пусть дана система управления

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+A_1(t)x(t-h)+B(t)u(t), \tag{1}$$

где $A(t)$, $A_1(t)$, $B(t)$ — непрерывные $n\times n$-матричные функции, $h=\mathrm{const}>0$ (запаздывание).

Зададим начальное состояние

$$x_0(\cdot)=\{x(t)=\varphi(t),\ t\in[-h,0),\ x(0)=x_0\} \tag{2}$$

и момент $t=T>2h$. Пусть матрица $B(t)$ неособая на отрезке $[0, T]$. Будем считать, что функции $u(t)$ кусочно-непрерывные на $[0, T]$. Предположим, что качество процесса оценивается функционалом [1]

$$I(u)=\int_0^T [x'(t)C(t)x(t)+u'(t)D(t)u(t)]\,dt,$$

где $C(t)$ и $D(t)$ — заданные симметрические положительно определенные матрицы с непрерывными элементами.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, при котором

$$x^0(t)\equiv 0,\ T-h\leqslant t\leqslant T, \tag{3}$$

$$I(u^0)=\min I(u). \tag{4}$$

По формуле Коши запишем решение системы (1)—(2) в момент времени t:

$$x(t)=F(t,0)x_0+\int_{-h}^{0}F(t,\tau+h)A_1(\tau+h)\varphi(\tau)\,d\tau+\int_0^t F(t,\tau)B(\tau)u(\tau)d\tau,$$

где матрица $F(t, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial\tau}=-F(t,\tau)A(\tau)-F(t,\tau+h)A_1(\tau+h)$$

с начальными условиями: $F(t, t-0)=E_n$, $F(t,\tau)\equiv 0$, если $\tau\geqslant t+0$.

Введем обозначения:

$$e(t)=F(t,0)x_0+\int_{-h}^{0}F(t,\tau+h)A_1(\tau+h)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

$$S_t u(\cdot)=\int_0^t F(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача (А). Найти допустимое управление $u(t)$, при котором выполняется соотношение (3), и $I(u)\leqslant\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — заданное число.

Впредь ограничимся рассмотрением множества допустимых управлений $U(\cdot)$, управления $u(t)$ из которого осуществляют условие (3). Каждое $u(\cdot)\in U(\cdot)$ на интервале $[T-h, T)$ имеет вид:

$$u(t)=-B^{-1}(t)A_1(t)x(t-h). \tag{6}$$

При помощи теоремы об отделимости выпуклых множеств [2] доказывается

Теорема 1. Для разрешимости задачи (А) необходимо и достаточно, чтобы

$$\max_{\|g\|=1}\{g'e(T-h)+\min_{\substack{u(\cdot)\in U(\cdot)\\ I(u)\leqslant\varepsilon}} g'S_{T-h}u(\cdot)\}\leqslant 0. \tag{7}$$

Рассмотрим задачу на безусловный минимум функционала $G(u) = g' S_{T-h}u(\cdot) + \lambda I(u)$ на управлениях $u(\cdot) \in U(\cdot)$. Учитывая (3), (5) и (6), имеем

$$G(u) = \int_0^{T-h} g' F(T-h,\ t) B(t) u(t)\,dt + \lambda \int_0^{T-h} u'(t) D(t) u(t)\,dt +$$

$$+ \lambda \int_0^{T-h} x'(t) C(t) x(t)\,dt + \lambda \int_{T-h}^{T} (B^{-1}(t) A_1(t) x(t-h),$$

$$D(t) B^{-1}(t) A_1(t) x(t-h))\,dt. \tag{8}$$

Вводя обозначение $S(t,\ \tau) = F(t,\ \tau) B(\tau)$ и преобразуя последних два слагаемых в правой части (8), получаем:

$$G(u) = \int_0^{T-h} (S'(T-h,\ t) g,\ u(t))\,dt + \lambda \int_0^{T-h} (u(t),\ D(t) u(t))\,dt +$$

$$+ \lambda \left[M + 2 \int_0^{T-h} (d(t),\ u(t))\,dt + \int_0^{T-h} \left(\int_0^{T-h} K(t,\ \vartheta) u(\vartheta)\,d\vartheta,\ u(t) \right) dt \right] +$$

$$+ \lambda \left[P + 2 \int_0^{T-h} (p(t),\ u(t))\,dt + \int_0^{T-h} \left(\int_0^{T-h} L(t,\ \vartheta) u(\vartheta)\,d\vartheta,\ u(t) \right) dt \right],$$

где $M = \int_0^{T-h} e'(\tau) C(\tau) e(\tau)\,d\tau;$

$$P = \int_{T-2h}^{T-h} e'(\tau) A_1'(\tau+h) (B^{-1}(\tau+h))' D(\tau+h) B^{-1}(\tau+h) A_1(\tau+h) e(\tau)\,d\tau;$$

$$d(t) = \int_t^{T-h} S'(\tau,\ t) C(\tau) e(\tau)\,d\tau;$$

$$p(t) = \int_{T-2h}^{T-h} S'(\tau,\ t) A_1'(\tau+h) (B^{-1}(\tau+h))' D(\tau+h) B^{-1}(\tau+h) A_1(\tau+h) e(\tau)\,d\tau;$$

$$K(t,\ \vartheta) = \begin{cases} \int_t^{T-h} S'(\tau,\ t) C(\tau) S(\tau,\ \vartheta)\,d\tau, & t \geqslant \vartheta, \\ \int_\vartheta^{T-h} S'(\tau,\ t) C(\tau) S(\tau,\ \vartheta)\,d\tau, & \vartheta \geqslant t; \end{cases}$$

$$L(t,\ \vartheta) = \int_{T-2h}^{T-h} S'(\tau,\ t) A_1'(\tau+h) (B^{-1}(\tau+h))' D(\tau+h) B^{-1}(\tau+h) \times$$

$$\times A_1(\tau+h) S(\tau,\ \vartheta)\,d\tau;$$

$$K'(t,\ \vartheta) = K(\vartheta,\ t),\ L'(t,\ \vartheta) = L(\vartheta,\ t), \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$N = M + P,\ q(t) = d(t) + p(t),\ R(t,\ \vartheta) = K(t,\ \vartheta) + L(t,\ \vartheta), \tag{10}$$

тогда

$$G(u) = \int_0^{T-h} (S'(T-h,\ t) g,\ u(t))\,dt + \lambda \int_0^{T-h} (u(t),\ D(t) u(t))\,dt +$$

$$+ \lambda \left[N + 2 \int_0^{T-h} (q(t),\ u(t))\,dt + \int_0^{T-h} \left(\int_0^{T-h} R(t,\ \vartheta) u(\vartheta)\,d\vartheta,\ u(t) \right) dt \right].$$

В силу (9), (10) $R'(t, \vartheta) = R(\vartheta, t)$. Итак,

$$\delta G(u) = \left.\frac{\partial G(u+\alpha v)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_0^{T-h} \Big(S'(T-h, t)\, g +$$

$$+ 2\lambda \left[D(t)\, u(t) + q(t) + \int_0^{T-h} R(t, \vartheta)\, u(\vartheta)\, d\vartheta\right], v(t)\Big)\, dt.$$

Пусть $G(\tilde{u}) = \min\limits_{u(\cdot)\in U(\cdot)} G(u)$, тогда $\delta G(\tilde{u}) = 0$ для любых $v(t)$. Следовательно,

$$S'(T-h, t)\, g + 2\lambda \left[D(t)\, \tilde{u}(t) + q(t) + \int_0^{T-h} R(t, \vartheta)\, \tilde{u}(\vartheta)\, d\vartheta\right] = 0. \quad (11)$$

Решение $\tilde{u}(t)$ уравнения (11) (существование и единственность которого нетрудно установить, следуя альтернативе Фредгольма) можно представить в виде

$$\tilde{u}(t) = u_1(t) + \frac{1}{2\lambda} W(t)\, g, \quad (12)$$

где n — вектор-функция $u_1(t)$ и $n \times n$—матрица $W(t)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$D(t)\, u_1(t) + q(t) + \int_0^{T-h} R(t, \vartheta)\, u_1(\vartheta)\, d\vartheta = 0, \quad (13)$$

$$S'(T-h, t) + D(t)\, W(t) + \int_0^{T-h} R(t, \vartheta)\, W(\vartheta)\, d\vartheta = 0. \quad (14)$$

Найдем λ из условия $I(\tilde{u}) \leqslant \varepsilon$. Имеем

$$\frac{a}{4\lambda^2} + c \leqslant \varepsilon, \quad (15)$$

где

$$a = \int_0^{T-h} \Big(W(t)\, g,\ D(t)\, W(t)\, g + \int_0^{T-h} R(t, \vartheta)\, W(\vartheta)\, g\, d\vartheta\Big)\, dt =$$

$$= I(Wg)|_{x_0(\cdot)\equiv 0} = -\int_0^{T-h} (W(t)\, g,\ S'(T-h, t)\, g)\, dt,$$

$$c = I(u_1) = \int_0^{T-h} (q(t), u_1(t))\, dt + N.$$

Так как $a > 0$, то $a = \alpha^2$. Пусть $\alpha > 0$.

Лемма 1. Задача минимизации

$$g' S_{T-h}\, \tilde{u}(\cdot) = \min_{\substack{u(\cdot)\in U(\cdot) \\ I(u)\leqslant\varepsilon}} g' S_{T-h}\, u(\cdot) \quad (16)$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$c < \varepsilon. \quad (17)$$

Замечание. Неравенство (17) выделяет совокупность начальных условий $\{x_0(\cdot)\}$, при которых имеет решение задача (16).

Лемма 2. Управление $\tilde{u}(t)$, решающее задачу (16), находится по формуле (12), где $\lambda = \alpha/2\sqrt{\varepsilon - c}$.

Используя лемму 2 и выражение для a, условие (7) запишем в виде

$$\max_{\|g\|=1}\left\{g'e(T-h)+\int_0^{T-h} g'S(T-h,\ t)\,u_1(t)\,dt-\sqrt{\varepsilon-c}\times\right.$$
$$\left.\times\left[-\int_0^{T-h} g'S(T-h,\ t)\,W(t)\,g\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\leqslant 0. \qquad (18)$$

Теорема 2. Существует минимальное $\varepsilon=\varepsilon^0>0$, удовлетворяющее неравенству (7) (или, все равно, (18)), и оно единственно. Если вектор g_0 доставляет максимум в левой части (18) при $\varepsilon=\varepsilon^0$, то оптимальное управление $u^0(t)$ удовлетворяет условию

$$g_0'S_{T-h}\,u^0(\cdot)=\min_{\substack{u(\cdot)\in U(\cdot)\\ I(u)\leqslant\varepsilon}} g_0'S_{T-h}\,u(\cdot)$$

и определяется равенством

$$u^0(t)=u_1(t)+\frac{1}{2\lambda^0}W(t)\,g_0,$$

где

$$\lambda^0=\frac{\alpha^0}{2\sqrt{\varepsilon^0-c}}=\frac{\left[-\int_0^{T-h} g_0'S(T-h,\ t)\,W(t)\,g_0\,dt\right]^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\varepsilon^0-c}},$$

а $u_1(t)$ и $W(t)$ удовлетворяют уравнениям (13) и (14) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полетаева И. А.— «Автоматика и телемеханика», 1966, № 6.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. М., 1971.

Поступила в редакцию 22/X 1977 г.

Кафедра МОУ

УДК 517.5

А. С. ГАХОВИЧ

ОБ ЕДИНСТВЕННОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ЛАПЛАСА — ЭЙЛЕРА БЫСТРОРАСТУЩИХ ФУНКЦИЙ *

Определение 1. Обозначим символом $L^{(N)}$ класс функций, суммируемых на любом конечном интервале $(0,\ T)$, равных нулю при $t<0$ и удовлетворяющих условию

$$f(t)=O\left(e^{\alpha_N t^N}\right)\ \text{при}\ t\to+\infty,$$

где α_N — некоторое неотрицательное действительное число.

Для $f(t)\in L^{(N)}$ рассматриваем функцию двух комплексных переменных

$$F(z,\ s)=\int_0^{\infty} e^{-zt}f(t)\,e^{-st^N}\,dt,$$

которая в общем случае аналитична по совокупности переменных при любом z из конечной комплексной плоскости и s из полуплоскости $\operatorname{Re} s>\alpha_N$. Пусть $F(z,\ s)$, определяемая из последнего соотношения, допускает аналитическое продолжение по переменной s до односвязной

* Продолжение. См. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ., мех.», 1978, № 3, 46.