дачи (1), когда заданные главные части $F_k(p)$ подчинены дополнительным ограничениям аналитической продолжимости с контуров $\partial U(p_k)$ в некоторые области. Предполагая, например, что функции $F_k(p)$ аналитичны в проколотых окрестностях $\dot{U}(p_k)$, сразу можно несколько упростить условия разрешимости (10) и выражения (11) и (12) для общего решения. В этом случае каждый интеграл в правой части равенства (10) не зависит от пути $\partial U(p_k)$, окружающего точку p_k, поэтому равен вычету подынтегрального дифференциала в точке p_k. Таким образом, в этом случае условия разрешимости (10) можно привести к виду:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L g(\tau)\,d\Psi^+(\tau)=\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{res}_{q=p_k}\{F_k(q)\,d\Psi(q)\}. \tag{10'}$$

По тем же соображениям контуры $\partial U(p_k)$ можно считать сколь угодно малыми, и на этом основании при $q\neq p_k$ вторую строку в правых частях (11) и (12) можно вообще отбросить. Тем самым общее решение задачи (1) в случае а) можно построить по формуле

$$\Phi(p)=\Phi_0+\tilde{\Phi}-\frac{1}{d\Psi_0}\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{res}_{q=p_k}\{\hat{\omega}_{qq_0}(p)\,F_k(q)\,d\Psi_0(q)\}, \tag{11'}$$
$$q\neq p_k\quad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ s),$$

а в случае б) задача разрешима безусловно, а решение дается формулами

$$\Phi(p)=\Phi_0+\Phi^*-X_0(p)\sum_{k=1}^{s}\operatorname*{res}_{q=p_k}\left\{\frac{F_k(q)\,A_1(p,\,q)\,dp}{X_0(q)}\right\}, \tag{12'}$$
$$q\neq p_k\quad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ s).$$

Сформулируем полученный результат.

Следствие. Если при каждом $k=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ заданная главная часть $F_k(p)$ аналитична в проколотой окрестности $\dot{U}(p_k)=U(p_k)\setminus\{p_k\}$ точки p_k, то условия разрешимости краевой задачи (1) приводятся к виду (10′) и при их выполнении общее решение задачи (1) в случае а) можно построить по формуле (11′), а в случае б) решение дается формулой (12′).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверович Э. И.— «УМН», 1971, 26, вып. 1 (157), 113.
2. Jacob C.— «Rev. de math. pures appl.» 1960, 5, № 1. 5.
3. Спрингер Д. Введение в теорию римановых поверхностей. М., 1960.

Поступила в редакцию
18/XI 1976 г.

Кафедра теории функций

УДК 532.516

В. П. САВЧУК

ОБТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПЛАСТИНЫ, ПОМЕЩЕННОЙ В ПЛОСКИЙ КАНАЛ

Пусть в плоский канал $0\leqslant y\leqslant 2h$, $-\infty<x<\infty$ помещена полубесконечная пластина $y=h$, $x>0$. Канал заполнен вязкой несжимаемой жидкостью, скорость которой на бесконечном удалении от сечения $x=0$ в сторону отрицательной полуоси x параллельна стенкам канала и равна $\frac{3}{2}\frac{U_0}{h^2}(2hy-y^2)$, где u_0 — средняя скорость по сечению канала. Считая течение жидкости стационарным, запишем уравнения движения и граничные условия в таком виде:

$$R\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad R\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad R=\frac{u_0 h}{\nu};\tag{1}$$

$$y=0:u=v=0;\quad y=1,\ x>0:u=v=0;$$
$$y=1,\quad x<0:v=\frac{\partial u}{\partial y}=0;\quad x\to-\infty:u\to\frac{3}{2}(2y-y^2),\ v\to 0,\tag{2}$$

Здесь u, v — продольная и поперечная составляющие скорости жидкости соответственно; p — давление; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости. Граничные условия записаны с учетом симметрии течения относительно плоскости $y=1$.

Введем новые неизвестные функции u_1, p_1 по формулам

$$u=u_1+\frac{3}{2}(2y-y^2),\quad p=p_1-3x.\tag{3}$$

Из двух последних уравнений (1) получим

$$R\frac{\partial p_1}{\partial x}=-\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+f(x),\tag{4}$$

где $f(x)$ — неизвестная функция. Учитывая (3), (4) и постоянство расхода через любое сечение канала, придем к задаче

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-R\frac{\partial u_1}{\partial x}=f,\tag{5}$$

$$\int_0^1 u_1 dy=0;\quad y=0:u_1=0;\tag{6}$$

$$y=1,\ x>0:u_1=-\frac{3}{2};\ y=1,\ x<0:\frac{\partial u_1}{\partial y}=0.\tag{7}$$

Доопределим второе условие (7):

$$y=1,\ -\infty<x<\infty:\frac{\partial u_1}{\partial y}=\varphi(x),\ \varphi(x)=0\ \text{при}\ x<0.\tag{8}$$

Применим теперь к уравнению (5) и условиям (6), (8) преобразование Лапласа по x. Решая полученную задачу, найдем

$$\bar{u}_1=\frac{\bar{\varphi}}{z(z\cos z-\sin z)}[(z-\sin z)\sin zy+(1-\cos zy)(\cos z-1)],\tag{9}$$

где $\begin{matrix}\bar{u}_1(y,\lambda)\\ \bar{\varphi}(\lambda)\end{matrix}=\int_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}u(y,x)\\ \varphi(x)\end{matrix}\,e^{-\lambda x}dx,\ z^2=2\lambda^2-R\lambda.$

Предположим, что $\bar{\varphi}$ однозначная функция, удовлетворяющая условиям леммы Жордана. Тогда в силу (8) $\bar{\varphi}$ не имеет особенностей при $\operatorname{Re}\lambda>0$. Из (9) получим:

$$\bar{u}_1(1,\lambda)=\frac{4\bar{\varphi}\sin\frac{z}{2}}{z(z\cos z-\sin z)}\left(\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}-\sin\frac{z}{2}\right).$$

Так как по первому условию (7) $\bar{u}_1(1,\lambda)$ не имеет особенностей при $\operatorname{Re}\lambda<0$ и $\operatorname{Res}\bar{u}_1(1,\lambda)\Big|_{\lambda=0}=-\frac{3}{2}$, то

$$\bar{\varphi}(\lambda)=-\frac{6}{\lambda}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-\frac{\lambda}{\alpha_k}}{1-\frac{\lambda}{\lambda_k}}.\tag{10}$$

Здесь $\alpha_k = \frac{R}{4} - \sqrt{\frac{R^2}{16} + \frac{\delta_k^2}{2}}$; δ_k — положительные корни $\operatorname{tg} z = z$; λ_k — упорядоченные по возрастанию модулей отрицательные корни уравнения

$$\left(\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} - \sin\frac{z}{2}\right)\sin\frac{z}{2} = 0, \quad z = \sqrt{2\lambda^2 - R\lambda}.$$

Способом, предложенным в [1], можно доказать, что бесконечное произведение (10) равномерно сходится для любых $\lambda \neq 0$, λ_k и удовлетворяет условиям леммы Жордана.

Применим теперь к равенству (9) обратное преобразование Лапласа.

$$u_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{(z - \sin z)\sin zy + (1 - \cos zy)(\cos z - 1)}{z(z\cos z - \sin z)}\bar{\varphi} e^{\lambda x} d\lambda,$$

$$0 < \gamma < \frac{R}{4} + \sqrt{\frac{R^2}{16} + \frac{\delta_1^2}{2}}.$$

Вычислим этот интеграл с помощью теории вычетов и сделаем замену по первой формуле (3).

$$u = \begin{cases} 6(y - y^2) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k\left(\frac{\lambda_k}{\alpha_k} - 1\right) g_k(\lambda_k)\, m_k(z_k, y)}{z_k(z_k\cos z_k - \sin z_k)} e^{\lambda_k x}, & x > 0; \\ \frac{3}{2}(2y - y^2) - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}\left(\frac{R}{2} - \alpha_k\right) m_k(\delta_k, y)}{\delta_k \sin\delta_k\left(\alpha_k - \frac{R}{4}\right)} e^{\left(\frac{R}{2} - \alpha_k\right)x}, & x < 0; \end{cases} \tag{11}$$

$$m_k(z, y) = (z - \sin z)\sin zy + (1 - \cos zy)(\cos z - 1),$$

$$z_k = \sqrt{2\lambda_k^2 - R\lambda_k}, \quad \bar{\varphi}(\lambda) = \frac{1 - \frac{\lambda}{\alpha_k}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}} g_k(\lambda).$$

Из третьего уравнения системы (1) имеем

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy. \tag{12}$$

Интегрируя почленно уравнение (5) по y от 0 до 1, и учитывая первое условие (6) и первую формулу (3), получим

$$f = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_0^1 + 3. \tag{13}$$

Формулы (4), (11) — (13) дают решение задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилевський А. М.— «Зап. Науково-дослид. ін-ту матем. та механ. ХДУ», 1936, 13, сер. 4, вип. 1.

Поступила в редакцию
23/XII 1976 г.

Кафедра теоретической механики